12. Übung zur Struktur der Materie WS 2018/19

Ausgabe: 11.01.2019 Prof. Dr. D. Suter
Abgabe: bis 18.01.2019 12:00 Uhr Dr. J. Weingarten

Aufgabe 1: Mandelstam-Variablen — 5 Punkte

a) In $2 \to 2$–Streuexperimenten $(1+2 \to 3+4)$ ist es günstig die Mandelstam-Variablen einzuführen: $s = (p_1+p_2)^2$, $t = (p_1-p_3)^2$, $u = (p_1-p_4)^2$. Zeigen Sie, dass gilt $s+t+u = m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2$.

b) Drücken Sie die Energie von Teilchen 1 im Schwerpunktssystem in Mandelstam-Variablen und den Teilchenmassen aus.

c) Drücken Sie die Schwerpunktsenergie des Prozesses in den Mandelstam-Variablen aus.

d) Berechnen Sie die Mandelstam-Variablen für die elastische Streuung identischer Teilchen als Funktion des Impulses der einlaufenden Teilchen und des Streuwinkels.

e) Wie groß ist die minimale Schwerpunktsenergie für den Prozess $pp \to tt$ mit $m_t = 173{,}0\,\mathrm{GeV}$, wenn man das Topquark-/Anti-Topquark-Paar in einem Fixed-Target-Experiment erzeugen möchte?

Aufgabe 2: Elektron Myon Streuung — 15 Punkte

Betrachten Sie für diese Aufgabe ausschließlich die Elektromagnetische Wechselwirkung und vernachlässigen Sie die Elektron- und Myonmasse. Beachten Sie dass einige Aufgabenteile lösbar sind ohne die vorherigen gelöst zu haben. Zur Hilfe bei der Berechnung des Matrixelements können die Kapitel 7.6 und 7.7 im Buch „Introduction to Elementary Particles“ von David Griffith hilfreich sein.

a) Zeichnen Sie das Feynman Diagramm für den Prozess

$$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$$

und beschriften Sie das Diagramm mit den Impulsen der einlaufenden und auslaufenden Teilchen, mit dem Impuls virtueller Teilchen und den Vertexfaktoren.

b) Verwenden Sie die Feynmanregeln der QED um das Matrixelement $\mathcal{M}$ aufzustellen.

c) Stellen Sie nun $\overline{|\mathcal{M}|^2}$. Bilden Sie dafür $|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}^*$ und mitteln Sie über die eingehenden Spins und summieren Sie über die ausgehenden Spins. Die Summe über die Spins muss dabei nicht explizit ausgerechnet werden.

Tipps:
1) $[\bar{u_1}\gamma^\mu u_2]^* = [\bar{u_2}\gamma^\mu u_1]$
2) Die Lorentz Indizes für $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}^*$ beim Quadrieren müssen unterschiedlich sein.

Kontrollergebnis ohne Vorfaktoren (rechnen Sie hiermit weiter wenn Sie kein Ergebnis haben):

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \propto \sum_{\text{Spins}} [\bar{u}_4\gamma_\mu u_1][\bar{u}_3\gamma^\mu u_2][\bar{u}_1\gamma_\nu u_4][\bar{u}_2\gamma^\nu u_3]$$

Mit den ein-/auslaufenden Elektron $1,4$ und Myon $2,3$.

d) Nutzen Sie Kasimirs Trick um die Summe über die Spins auszuführen. Die Formel dafür lautet:

$$\sum_{Spins} [\bar{u}_1 \gamma^\mu u_2] \, [\bar{u}_2 \gamma^\nu u_1] = \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \left(\gamma^\alpha p_{2\alpha} + m_1\right) \gamma^\nu \left(\gamma^\beta p_{1\beta} + m_2\right)\right]$$

Dabei ist $\mathrm{Tr}[A]$ die Spur der Matrix A. Diese bestimmt sich über die Summe der Diagonalelemente, welche hier jedoch nicht explizit durchgeführt werden muss.

Vereinfachen Sie $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ mit Hilfe der Relationen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\epsilon] &= 4(g^{\alpha\beta} g^{\delta\epsilon} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\epsilon} + g^{\alpha\epsilon} g^{\beta\delta}) \\
p_{1\alpha} \, g^{\alpha\beta} \, p_{2\beta} &= (p_1 \cdot p_2) \\
g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} &= 4 \\
\mathrm{Tr}[\alpha A] &= \alpha \mathrm{Tr}[A] \\
\mathrm{Tr}[A + B] &= \mathrm{Tr}[A] + \mathrm{Tr}[B]
\end{aligned}$$

Hinweis: Denken Sie daran dass die Masse der Teilchen vernachlässigt werden kann.

Kontrollergebnis ohne Vorfaktoren (rechnen Sie hiermit weiter wenn Sie kein Ergebnis haben):

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \propto 32((p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4))$$

Mit den ein-/auslaufenden Elektron $1, 4$ und Myon $2, 3$.

e) Bestimmen Sie die Mandelstam Variablen s, t, u für diesen Prozess und nutzen Sie diese, um $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ weiter zu vereinfachen.

f) Angenommen das Matrixelement sei gegeben, wie berechnet sich aus diesem der totale Wirkungsquerschnitt.