

# 6. Übung zur Struktur der Materie WS 2018/19

**Ausgabe:** 16.11.2018  
**Abgabe:** bis 23.11.2018 12:00 Uhr

Prof. Dr. D. Suter  
Dr. J. Weingarten

---

## Aufgabe 1: Fermi-Gas-Modell

8 Punkte

Das Fermi-Gas-Modell des Kerns betrachtet den Kern als einen rechteckigen dreidimensionalen Potentialtopf mit unendlichen hohen Wänden und mit der Kantenlänge  $a$ . Die maximale Anzahl  $n$  der Zustände mit einer Energie unterhalb einer bestimmten maximalen Energie  $E$  berechnet sich folgendermaßen:

$$n = \int_0^{E_F} 2 \frac{dn}{dE} dE$$

mit der Zustandsdichte

$$\frac{dn}{dE} = \frac{m^{\frac{3}{2}} a^3}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \sqrt{E}.$$

Die Energie des höchst besetzten Zustands, die erreicht wird, wenn alle verfügbaren Nukleonen lückenlos auf solche Niveaus gesetzt werden, wird als Fermienergie  $E_F$  bezeichnet.

1. Wie viele Nukleonen hat ein Kern? Woher kommt der Faktor 2 im obigen Integral?
2. Zeigen Sie, dass für einen Kern im Grundzustand mit gleicher Anzahl von Protonen und Neutronen die Energie  $E_F$  des Fermi-Niveaus gegeben ist durch:

$$E_F = \frac{1}{2m} 3^{\frac{2}{3}} \pi^{\frac{4}{3}} \hbar^2 \left( \frac{2n}{a^3} \right)^{\frac{2}{3}}$$

wobei  $m$  die Masse eines Nukleons ist. Welche Annahmen mussten Sie hierfür machen?

3. Berechnen Sie die typische Fermienergien von Kernmaterie. Verwenden Sie dabei die folgende Näherungsformel für den Kernradius:  $a = R_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$  mit  $R_0 = 1,2$  fm und der Massenzahl  $A$ .

## Aufgabe 2: Schalenmodell

4 Punkte

Die Abbildung 1 zeigt die Energieniveaus der Kerne  $^{15}\text{N}$ ,  $^{15}\text{O}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{17}\text{O}$  und  $^{17}\text{F}$ .

1. Erklären Sie, warum die Energieniveaus der Kerne  $^{15}\text{N}$  und  $^{15}\text{O}$  sowie die der Kerne  $^{17}\text{O}$  und  $^{17}\text{F}$  einander sehr ähnlich sind.
2. Erklären Sie, warum die Energie, die nötig ist, um  $^{16}\text{O}$  auf den ersten angeregten Zustand zu heben, viel größer ist, als für  $^{15}\text{O}$  und  $^{17}\text{O}$ . Welche  $nl$ -Quantenzahlen haben die jeweiligen Grundzustände?
3. Wieso ist die Energie des ersten angeregten Zustandes für  $^{17}\text{O}$  und  $^{17}\text{F}$  relativ klein? Wie regen sich diese Kerne wieder ab?
4. Welchen Gesamtdrehimpuls  $J$  haben die Kerne  $^{15}\text{O}$ ,  $^{16}\text{O}$  und  $^{17}\text{O}$  jeweils? Begründen Sie Ihre Antwort. Dazu kann Abbildung 2 hilfreich sein.
5. Präsenzaufgabe in der Übung: Berechnen Sie ebenso den Gesamtdrehimpuls von  $^7\text{Be}$ ,  $^{33}\text{Sc}$  und  $^{41}\text{Sc}$ .

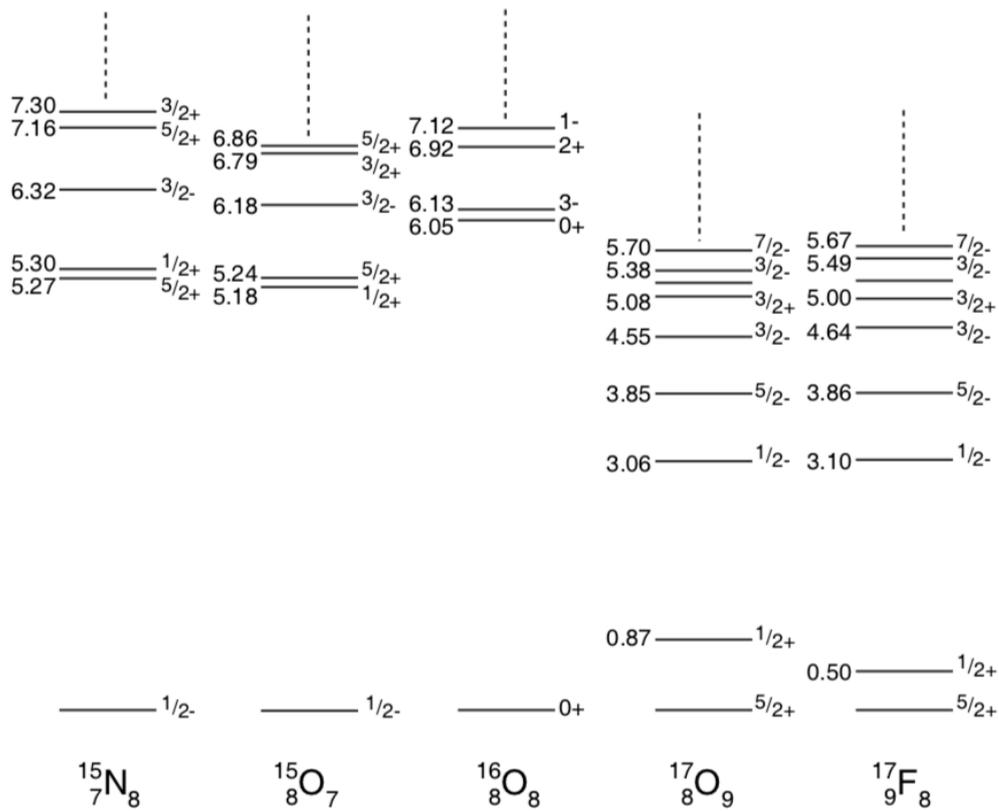


Abbildung 1: Energieniveaus von  $^{15}\text{N}$ ,  $^{15}\text{O}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{17}\text{O}$  und  $^{17}\text{F}$ . Die Energieangaben beziehen sich jeweils auf die Differenz zum Grundzustand in MeV.

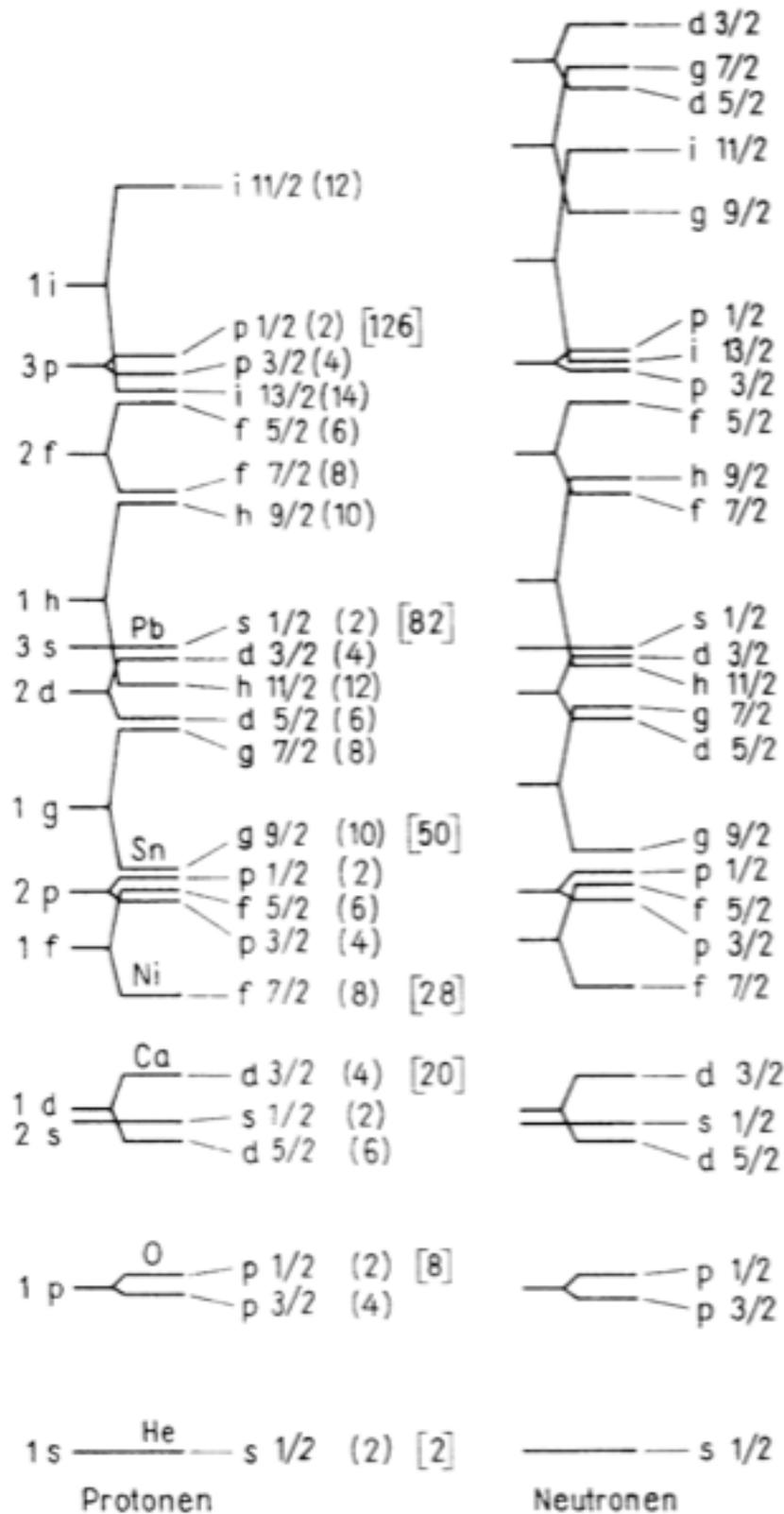


Abbildung 2: Niveaufolge des Schalenmodells mit Spin-Bahnaufspaltung.

### Aufgabe 3: Schmidt-Linien

8 Punkte

Im Rahmen des Einteilchen-Schalenmodells sind die Kernspins  $\vec{I}$  der Nuklide durch die Drehimpulse ungepaarter Nukleonen gegeben. Das magnetische Moment  $\mu_I$  eines Nuklids ergibt sich bei maximaler

Ausrichtung des Kernspins bezüglich der Quantisierungsachse. Daher gilt hier  $|m_I| = I = l \pm 1/2 = m_l \pm 1/2$ . Der Landé-Faktor eines Nukleons ist durch

$$g_I = \frac{1}{2} \left[ g_l + g_s + (g_l - g_s) \frac{(l - s)(l + s + 1)}{I(I + 1)} \right] \quad (1)$$

gegeben.

1. Berechnen Sie mit diesem die magnetischen Momente für Kerne mit ungerader Nukleonenzahl  $A$  in Abhängigkeit des Kernspins  $I$ . Differenzieren Sie dabei zwischen  $u$ - und  $g$ -Kernen. Die Landé-Faktoren für den Bahndrehimpuls  $g_l$  und den Spin  $g_s$  eines Nukleons sind

$$g_l = \begin{cases} 1 & \text{Proton} \\ 0 & \text{Neutron} \end{cases} \quad g_s = \begin{cases} 5,586 & \text{Proton} \\ -3,826 & \text{Neutron} \end{cases} \quad (2)$$

2. Stellen Sie ihr Ergebnis aus 2. graphisch dar (gerne mit Ihrem favorisierten Plotprogramm), indem Sie  $\mu_{\text{Kern}}/\mu_K$  gegen  $I$  auftragen und die Nuklide aus der Tabelle einzeichnen. Diskutieren Sie Ihre Beobachtungen.

Z ungerade			N ungerade		
Nuklid	Kernspin $I/\hbar$	$\mu_{\text{Kern}}/\mu_K$	Nuklid	Kernspin $I/\hbar$	$\mu_{\text{Kern}}/\mu_K$
<sup>19</sup> F	1/2	2,629	<sup>199</sup> Hg	1/2	0,503
<sup>205</sup> Tl	1/2	1,628	<sup>207</sup> Hg	1/2	0,59
<sup>7</sup> Li	3/2	3,256	<sup>9</sup> Be	3/2	-1,177
<sup>63</sup> Cu	3/2	2,226	<sup>201</sup> Hg	3/2	-0,557
<sup>121</sup> Sb	5/2	3,36	<sup>17</sup> O	5/2	-1,894
<sup>153</sup> Eu	5/2	1,53	<sup>67</sup> Zn	5/2	0,876
<sup>59</sup> Co	7/2	4,58	<sup>143</sup> Nd	7/2	-1,1
<sup>123</sup> Sb	7/2	2,55	<sup>167</sup> Er	7/2	-0,5665
<sup>113</sup> In	9/2	5,523	<sup>83</sup> Kr	9/2	-1,073
<sup>209</sup> Bi	9/2	4,08	<sup>87</sup> Sr	9/2	-1,209