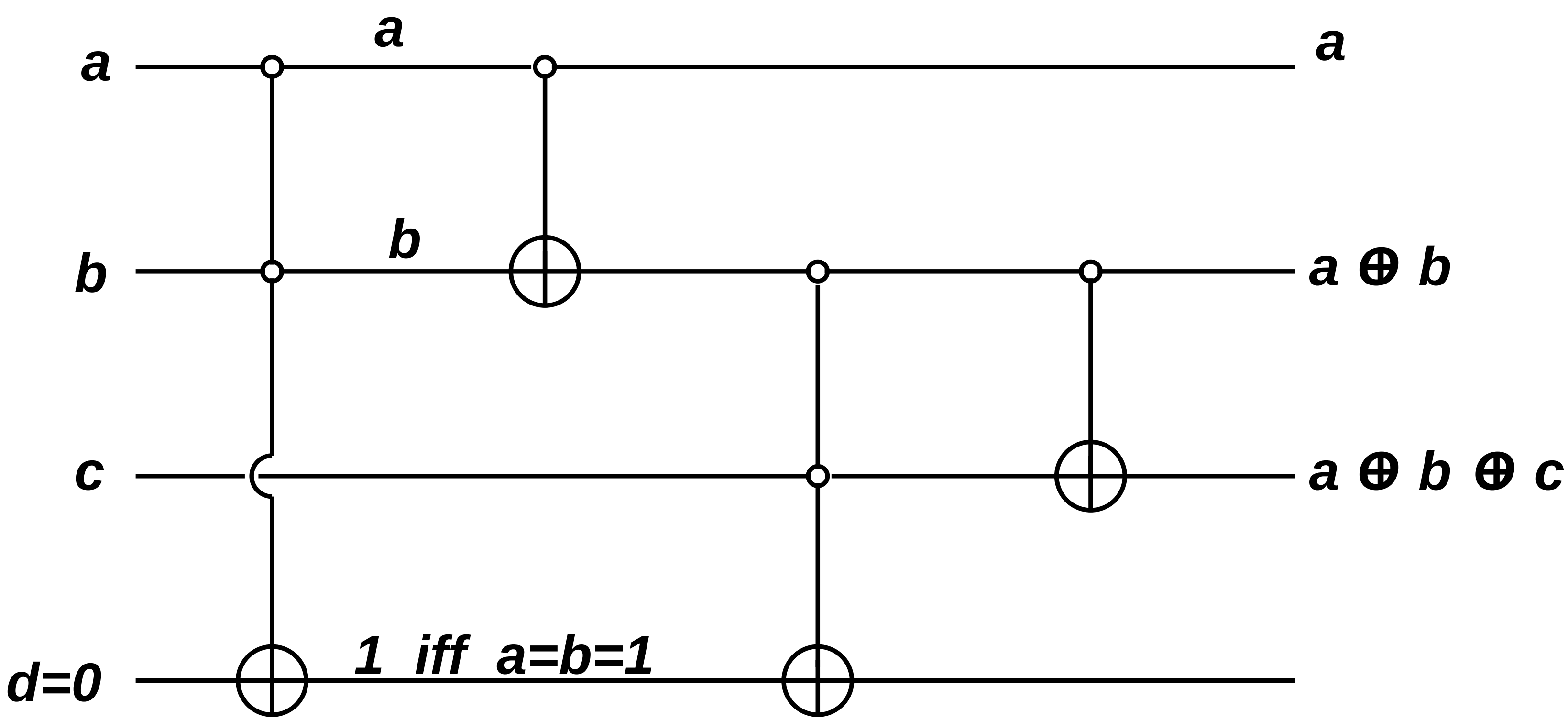
Feynman und der Volladdierer



Alle Gatter sind selbstinvers und unitär, also auch hermitesch:
$\mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1}, \quad \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\dagger} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^{\dagger}$

$$\text{CNOT } (b,c)\boldsymbol{\theta}^{(3)}(b,c,d) \text{ CNOT } (a,b)\boldsymbol{\theta}^{(3)}(a,b,d)|a,b,c,0\rangle$$

$$=: \mathbf{A}_4\mathbf{A}_3\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1|a,b,c,0\rangle = \exp\left(-i\frac{\mathcal{H}t}{\hbar}\right)|a,b,c,0\rangle$$

Gibt es einen Hamiltonian, der das tut? — Beachte

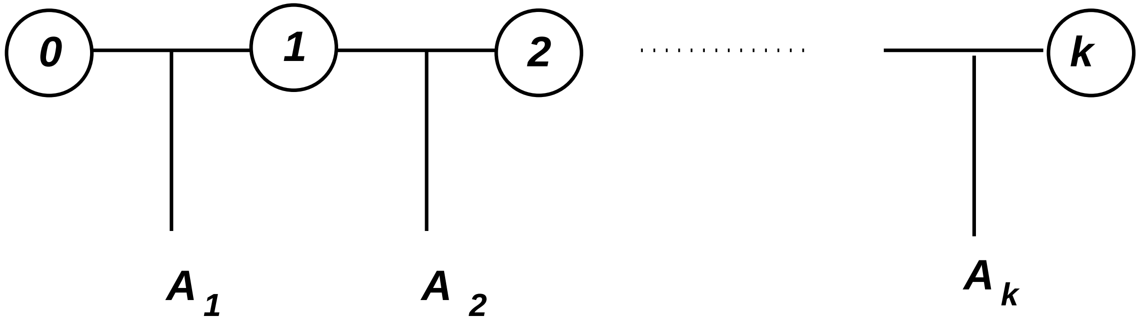
$$\exp\left(-i\frac{\mathcal{H}t}{\hbar}\right) = \mathbf{1} + \left(-i\frac{\mathcal{H}t}{\hbar}\right) + \frac{1}{2}\left(-i\frac{\mathcal{H}t}{\hbar}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-i\frac{\mathcal{H}t}{\hbar}\right)^3 + \cdots$$

Die Gatter $\mathbf{A}_i$ wurden ausgedrückt durch Erzeuger $\mathbf{a}^\dagger$, Vernichter $\mathbf{a}$ und Teilchenzahloperatoren $\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}$ für die Qubits a, b, c, d. Führe noch zusätzliche „Buchhalter-Qubits“ $0, ..., k$ ein, um

$$|\psi_f\rangle = \mathbf{A}_k\mathbf{A}_{k-1}\cdots\mathbf{A}_1|\psi_i\rangle$$

zu berechnen. Auf jedem dieser Qubits können wieder Teilchen erzeugt, vernichtet und gezählt werden, mit Operatoren $\mathbf{q}_i^\dagger$, $\mathbf{q}_i$, $\mathbf{q}_i^\dagger\mathbf{q}_i$. Dann ist der gewünschte Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \sum_{i=0}^{k-1}(\mathbf{q}_{i+1}^\dagger\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_i^\dagger\mathbf{q}_{i+1})\mathbf{A}_{i+1}.$$



Wirkung des Gatters $i+1$ zwingend verknüpft mit Transfer eines Buchhalter-Teilchens von i nach $i+1$ oder umgekehrt.

Starte mit genau einem Buchhalter-Teilchen bei 0; Gesamtzustand also $|1000\cdots 0\rangle|\psi_i\rangle$. Lasse $\mathcal{H}^\nu$ wirken. Vom ersten $\mathcal{H}$ kann dann nur der $\mathbf{A}_1$-Term wirken:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^\nu|1000\cdots0\rangle|\psi_i\rangle &= \mathcal{H}^{\nu-1}|0100\cdots0\rangle\mathbf{A}_1|\psi_i\rangle \\
&= \mathcal{H}^{\nu-2}\left(|0010\cdots0\rangle\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1|\psi_i\rangle + |1000\cdots0\rangle\underbrace{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1}_{\mathbf{1}}|\psi_i\rangle\right) = \cdots,
\end{aligned}
$$

Wenn also das Buchhalter-Teilchen am Platz l ist, muss als letztes das Gatter $\mathbf{A}_l$ gewirkt haben. Die nächste Anwendung von $\mathcal{H}$ kann dann einen von zwei möglichen Effekten bewirken:

- Buchhalter $l \to l-1$ und $\mathbf{A}_l$ wird nochmals angewendet (und damit rückgängig gemacht, da selbstinvers)

- Buchhalter $l \to l+1$ und $\mathbf{A}_{l+1}$ wird links an die Kette von $\mathbf{A}$-Gattern angefügt.

  Facit: wenn der Endzustand eine Komponente enthält, in der der Buchhalter bei k angekommen ist, sind wir fertig und können die gewünschte Komponente herausfiltern:

$$
\alpha|00\cdots01\rangle|\psi_f\rangle = \mathbf{q}_k^\dagger\mathbf{q}_k \exp\left(-i\frac{\mathcal{H}t}{\hbar}\right)|100\cdots0\rangle|\psi_i\rangle,
$$

in der Hoffnung, dass die Amplitude α hinreichend groß ist.