

29. Übung zu Physik SS 2020

Ausgabe: 07.07.2020

Prof. D. Suter

1. Bariumoxid

Bariumoxid zeigt NaCl-Struktur (Madelung-Konstante $\alpha \approx 1,747$). Schätzen Sie die Bindungsenergie pro Ionenpaar für den hypothetischen Kristall Ba^+O^- und für $\text{Ba}^{2+}\text{O}^{2-}$ ab. Nehmen Sie dass der Kernabstand für beide Kristalle gleich ist $R = 2,76 \text{ \AA}$.

Die Bindungsenergie pro Ionenpaar kann abgeschätzt werden (Kapitel 9.6.4) als

$$U_b = -\frac{\alpha q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Man erhält für Ba^+O^-

$$U_b = -\frac{1,747 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2 \cdot 2,76 \cdot 10^{-10} \text{ m}} = -1,46 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -9,11 \text{ eV}$$

Und für $\text{Ba}^{2+}\text{O}^{2-}$

$$U_b = -\frac{1,747 \cdot (2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2 \cdot 2,76 \cdot 10^{-10} \text{ m}} = -5,83 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -36,43 \text{ eV}$$

2. Elektronen in metallischen Festkörpern

- (a) Berechnen Sie die Dichte freier Elektronen in Silber und in Gold unter der Annahme eines freien Elektrons pro Atom.
- (b) Berechnen Sie die Fermi-Energie bei $T = 0 \text{ K}$ für Kupfer (die Dichte der freien Elektronen in Kupfer bei $T = 0 \text{ K}$ beträgt $8,47 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$).
- (c) Berechnen Sie die Fermi-Temperatur für Kupfer

(a) Mit einem freien Elektron pro Atom ist die Anzahldichte der freien Elektronen:

$$n = \rho \cdot \frac{N_A}{m_{mol}}$$

Darin bezeichnet ρ die Dichte des betrachteten Metalls und m_{mol} seine molare Masse. N_A ist die Avogadro-Konstante.

Silber hat die Dichte $\rho = 10,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ und die molare Masse $m_{mol} = 107,87 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Damit ergibt sich eine Dichte freier Elektronen von

$$n = 10,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \frac{6,0222 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{107,87 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 6,05 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} = 6,05 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

Für Gold ($\rho = 19,3 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, $m_{mol} = 196,97 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) ergibt sich

$$n = 5,90 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

(b) Die Fermi-Energie im dreidimensionalen Fall bei $T = 0 \text{ K}$ lässt sich mit der folgenden Formel berechnen (Kapitel 9.6.5):

$$E_F = \frac{h^2}{8m_e} \left(\frac{3N_Z}{\pi V} \right)^{2/3}$$

Darin bezeichnet h das Plancksche Wirkungsquantum und m_e die Elektronenmasse. N_Z gibt die Anzahl besetzbarer Zustände im Betrachteten Volumen V im Energieintervall

$(0, E_F)$. Bei $T = 0 \text{ K}$ besetzen alle vorhandenen freien Elektronen N im Metall genau diese und nur diese Zustände.

Für die Konzentration freier Elektronen in Kupfer gilt somit bei $T = 0 \text{ K}$:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_Z}{V} = 8,96 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \frac{6,0222 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{63,546 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 8,49 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

Die Fermi-Energie beträgt

$$E_F = \frac{(6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1})^2}{8 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \left(\frac{3}{\pi} 8,49 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \right)^{2/3} = 1,13 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$= 1,13 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 7,00 \text{ eV}$$

(c) Die sogenannte Fermi-Temperatur T_F wird über die Beziehung $E_F = k_B T_F$ definiert.

Die Fermi-Temperatur von Kupfer beträgt mit $E_F = 7,00 \text{ eV}$ rund

$$T_F = \frac{E_F}{k_B} = \frac{1,13 \cdot 10^{-18} \text{ J}}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}} = 81850 \text{ K}$$

3. Der elektrische Widerstand eines Metalls

Warum steigt der elektrische Widerstand eines Metalls mit zunehmender Temperatur?

Die Einflüsse der Temperatur auf die Fermi-Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen spielt hier ebenso wenig eine entscheidende Rolle wie die Einflüsse eines angelegten elektrischen Feldes auf die Fermi-Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen. Die Verteilung der Elektronen in den einzelnen Bändern ist beim Metall in sehr guter Näherung temperaturunabhängig, denn die Fermi-Temperatur liegt um Größenordnungen höher als alle für ein Material erreichbaren Temperaturen (siehe Aufgabe 2). Entscheidend aber sind die Schwingungen der Gitterionen, die sehr direkt mit der Temperatur zusammenhängen, sodass sich die Zahl der Stöße, die ein Elektron im Laufe seiner Bewegung erfährt, mit steigender Temperatur vergrößert. Dadurch können die Elektronen dem angelegten elektrischen Feld um so schlechter folgen, je wärmer das Metall wird, was den Ohm'schen Widerstand mit steigender Temperatur erhöht.

4. Dotierte Halbleiter

(a) Erläutern Sie, warum der spezifische Widerstand dotierter Halbleiter deutlich kleiner ist, als der reiner Halbleiter (bei gleicher Temperatur).

(b) Warum gibt es in einem n-dotierten Halbleiter nahezu keine Löcher?

(c) Bei einem dotierten Halbleiter überwiegt bei 20°C die Störstellenhalbleitung gegenüber der Eigenleitung. Erläutern Sie, warum mit steigender Temperatur sich die Eigenleitung immer stärker bemerkbar macht.

(a) Durch die n-Dotierung stehen im dotierten Halbleiter mehr bewegliche negative Ladungsträger zur Verfügung als im nicht dotierten Halbleiter. Der dotierte Halbleiter kann Strom besser leiten, die Leitfähigkeit nimmt zu. Entsprechend ist der spezifische Widerstand des dotierten Halbleiters niedriger als der des reinen Halbleiters.

Im Fall der p-Dotierung sind im dotierten Halbleiter mehr "positive" Ladungsträger (Löcher) vorhanden. Es gilt das gleiche Argument wie bei n-Halbleitern.

(b) Im n-dotierten Halbleiter werden nahezu alle Löcher im Halbleiter mit den "überschüssigen" Elektronen der Dotierungselemente gefüllt.

(c) Mit steigender Temperatur werden immer mehr Bindungselektronen aus ihrer Bindung gelöst und stehen dann als Leitungselektronen zur Verfügung. Gleichzeitig hinterlassen die herausgelösten Elektronen ein Loch (positiver Ladungsträger). Der Prozess trägt also auf zwei Arten zur Steigerung der Leitfähigkeit bei, sodass die Eigenleitung bei höheren Temperaturen stärker steigt als die Störstellenleitung.