27. Übung zu Physik SS 2020

Ausgabe: 23.06.2020 Prof. D. Suter

1. Teilchenwellen

(a) Was für eine Wellenlänge $\boldsymbol{\lambda}$ hat ein Teilchen der Masse $\boldsymbol{m}$, das mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und damit dem Impuls $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{mv}$ seines Weges zieht.

(b) Wie groß ist die Wellenlänge für Elektronen- bzw. Protonstrahlen mit Energien von 10 eV, 10 keV und 1 MeV?

(c) Was könnte man erwarten wenn diese Wellen auf einen Kristall fallen?

(a) Der Impuls p einer Welle (Kapitel 8.2.1) ist geben als

$$p = \hbar k = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda} = mv$$

Damit gilt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Das ist die mit Recht berühmte de Broglie Beziehung.

(b) Da wir hier über rein kinetische Energie E_{kin} reden (Kapitel 8.2.2), gilt

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = eU$$

U ist dabei dieBeschleunigungsspannung, eU die gewonnene kinetische Energie nach durchlaufen der Spannung U. Mit der de Broglie Beziehung folgt sofort

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

Ein paar repräsentative Zahlenwerte für Elektronenstrahlen sind:

U /V	λ /nm
10	0,388
1 000	0,0388
10 000	0,0123

Die Wellenlängen bei Protonenstrahlen sind nach der Formel um

$$\sqrt{\frac{m_p}{m_e}} \approx 43$$

mal kleiner.

(c) Was wird wohl passieren, wenn die Welle auf periodische Strukturen mit Gitterkonstante ungefähr Wellenlänge fallen: Kräftige Interferenz und Beugung!

2. Ortswellenfunktion

Die quantenmechanische Wellenfunktion eines Teilchens sei gegeben durch

$$\boldsymbol{\psi(x) = N \cdot x \cdot e^{-a\cdot|x|/2}}$$

(a) Bestimmen Sie den Normierungsfaktor N so, dass die Wellenfunktion auf Eins normiert ist, d.h. dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})|^2 \, \boldsymbol{dx} = \mathbf{1}$$

gilt und begründen Sie die Notwendigkeit von normierten Wellenfunktionen für die Wahrscheinlichkeitsinterpretation in der Quantenmechanik. Welche Einheit hat die Wellenfunktion?

Hinweis: $\boldsymbol{x^n e^{-ax}} = (-\boldsymbol{d/da})^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{e^{-ax}}$

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen am Ort $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ zu finden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Intervall $[-\mathbf{1}/\boldsymbol{a}, \mathbf{1}/\boldsymbol{a}]$ zu finden?

(a) Für das Integral über das Betragsquadrat der Wellenfunktion erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} N^2 x^2 e^{-a\cdot|x|} \, dx = 2N^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-a\cdot x} \, dx$$

$$= 2N^2 \int_0^{\infty} \left(\frac{d^2}{da^2} e^{-a\cdot x}\right) dx = 2N^2 \frac{d^2}{da^2}\left(\int_0^{\infty} e^{-a\cdot x} \, dx\right)$$

$$= 2N^2 \frac{d^2}{da^2}\left(-\frac{1}{a} e^{-a\cdot x}\Big|_0^{\infty}\right) = 2N^2 \frac{d^2}{da^2}\left(\frac{1}{a}\right) = 4\frac{N^2}{a^3} \stackrel{\text{def}}{=} 1 \Rightarrow$$

$$N = \frac{a^{3/2}}{2}$$

Die (bis auf einen konstanten Phasenfaktor) normierte Wellenfunktion lautet somit

$$\boldsymbol{\psi(x) = \frac{a^{3/2}}{2} \cdot x \cdot e^{-a\cdot|x|/2}}$$

Der Normierungsfaktor ist notwendig um (Kapitel 8.3.2) $|\psi(x)|^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren zu können. Über den gesamten Raum intergriert muss sie Eins ergeben, da sich das mit ihr assoziierte Teilchen irgendwo im Raum befinden muss.

Da $|\psi(x)|^2$ eine eindimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte mit der Dimension $1/m$ ist, muss $\psi(x)$ selbst die Dimension $1/\sqrt{m}$ haben.

(b) Die Wahrscheinlichkeit das Teilchen exakt am Ort $x = 0$ zu finden ist Null.

Die Wahrscheinlichkeit P das Teilchen im Intervall $[-1/a, 1/a]$ zu finden ist

$$P = \int_{-1/a}^{1/a} |\psi(x)|^2 \, dx = \cdots = 2N^2 \frac{d^2}{da^2}\left(-\frac{1}{a} \boldsymbol{e^{-a\cdot x}}\Big|_0^{1/a}\right) = 2N^2\left(1 - \frac{1}{e}\right)\frac{d^2}{da^2}\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$= 2N^2\left(1 - \frac{1}{e}\right)\frac{2}{a^3} = 2\frac{a^3}{4}\left(1 - \frac{1}{e}\right)\frac{2}{a^3} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}63$$

3. Potentialkasten

Ein kräftefreies Teilchen befinde sich in einem Potential

$$\boldsymbol{U(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{f\ddot{u}r} -\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}} < \boldsymbol{x} < \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}} \\ \infty & \boldsymbol{sonst} \end{cases}$$

in einem seiner stationären Zustände

$$\boldsymbol{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Zustände normiert sind und bestimmen sie die Energieeigenwerte $\boldsymbol{E_n}$. Welche Energie ist nötig um ein Elektron, das sich in einem Potentialkasten der Breite 1 nm befindet, vom Grundzustand in den zweiten angeregten Zustand anzuregen.

Hinweis: Masse des Elektrons $\boldsymbol{m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\,kg = 511\,keV/c^2}$

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert des Ortes *x* und des Impulsoperators $\hat{\boldsymbol{p}}$ für die stationären Zustände und interpretieren Sie die Ergebnisse.

(a) Für das Integral über das Betragsquadrat der Wellenfunktion ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2\, dx = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{4}{a}\int_0^{a/2} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

$$= \frac{4}{a}\left[\frac{\sin\left(2\frac{n\pi x}{a}\right)}{4\frac{n\pi}{a}} + \frac{x}{2}\right]_0^{1/a} = \frac{4}{a}\left[\frac{\sin(n\pi)}{4\frac{n\pi}{a}} + \frac{a}{4}\right] = \frac{4}{a}\frac{a}{4} = 1$$

Die stationären Zustände $\boldsymbol{\psi_n(x)}$ sind also normiert (Kapitel 8.3.2).

Die Schrödinger-Gleichung (Kapitel 8.3.5) im interessierenden Bereich $[-a/2, a/2]$ lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$$

Setzt man die stationären Zustände ein erhält man

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = E_n\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Die Eigenenergien lauten somit

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{a^2} = n^2 E_1$$

mit der sog. Nullpunktsenergie E_1. Die notwendige Anregungsenergie für das Elektron beträgt

$$E_3 - E_1 = 8E_1 = 3\,eV$$

(b) Für den Erwartungswert (Kapitel 8.3.3) des Ortes gilt

$$\langle\hat{x}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \cdot x \cdot \psi_n(x)\, dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} |\psi_n(x)|^2\, x dx = \frac{4}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1+\cos\left(2\frac{n\pi x}{a}\right)}{2} x dx$$

$$= \frac{2}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) x dx$$

$$= \frac{2}{a}\left(\frac{a}{2n\pi}\right)^2 \left[\frac{2n\pi}{a}x \cdot \sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) + \cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = 0$$

Für den Erwartungswert des Impulsoperators (Kapitel 8.3.4) gilt

$$\langle\hat{p}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \cdot \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \cdot \psi_n(x)\, dx = -i\hbar \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{2n\pi}{a} x\right) \left[\frac{d}{dx} \cos\left(\frac{2n\pi}{a} x\right)\right] dx$$

$$= i\hbar \frac{2n\pi}{a^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{2n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{2n\pi}{a} x\right) dx = 0$$

Der Erwartungswert des Ortes liegt natürlich in der Mitte des Potentialkastens. Dass der Erwartungswert des Impulses verschwindet wird ersichtlich wenn man sich überlegt, dass sich das Teilchen im Potentialkasten in beide Richtungen bewegen kann. Zu jedem Impuls in positive x-Richtung gibt es auch einen Impuls in negative x-Richtung. Der Erwartungswert muss also dementsprechend verschwinden.