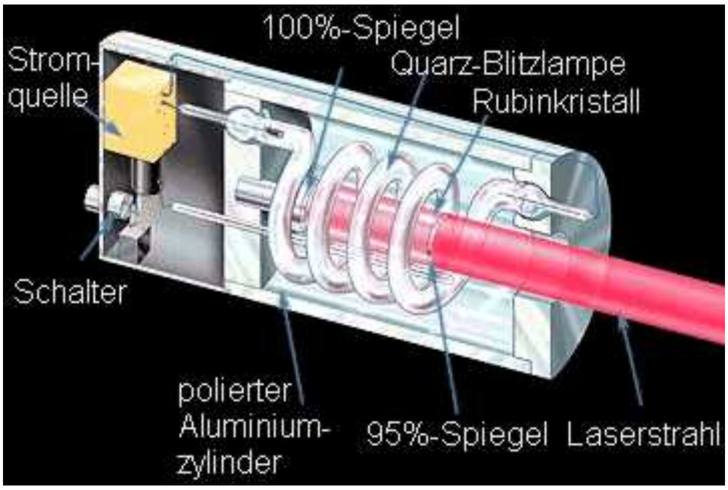
1. Hochleistungs-Rubinlaser

Während die kontinuierlich arbeitenden Helium-Neon-Gaslaser für den Schulbetrieb im Milliwatt-Bereich arbeiten, sind mit Hochleistungs-Festkörperlasern (z.B. ausgestattet mit Rubinstäben) Leistungen im Gigawatt-Bereich im Pulsbetrieb möglich.



(a) Die Pulsdauer des Lasers sei $1{,}0\cdot10^{-9}$ s, seine Leistung 1,0 GW. Berechnen Sie die Energie, welche in dem Laserpuls steckt.

(b) Die Energie der Photonen im Laserimpuls ist 1,79 eV. Berechnen Sie, wie viele Photonen der Laser bei einem Puls aussendet.

(a)

$$E_{Puls} = P \cdot t = 10^9\, W \cdot 10^{-9}\, s = 1\, J$$

(b)

$$N = \frac{E_{Puls}}{E_{Photon}} = \frac{1\, J}{1{,}79\, eV}$$

da $1\, eV = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\, C \cdot 1\, V = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\, J$

$$N = \frac{1\, J}{1{,}79 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\, J} = 3{,}5 \cdot 10^{18}\ Photonen$$

2. Gesetz von Moseley

Mit Hilfe der RÖNTGEN-Spektroskopie konnte Henry Moseley eine einfache Methode zur Bestimmung der Kernladungszahl von Elementen einführen. Dazu untersuchte er die Frequenz $\boldsymbol{f}$ der $\boldsymbol{K_\alpha}$-Linie in Abhängigkeit von der Ordnungszahl.

(a) Erläutern Sie, wie die $\boldsymbol{K_\alpha}$-Linie zustande kommt.

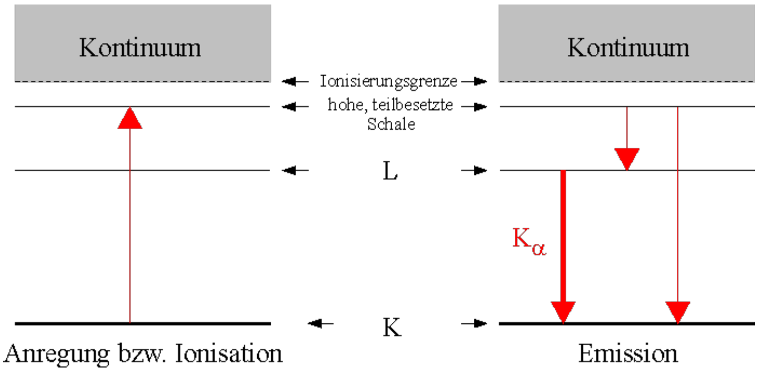
(b) Zeichnen Sie mit Hilfe der folgenden Werte ein $\boldsymbol{Z}-\sqrt{\boldsymbol{f}}$-Diagramm.

$\boldsymbol{Z}$	13	20	30
$\boldsymbol{f}\,/10^{16}$ Hz	35,9	89,1	207

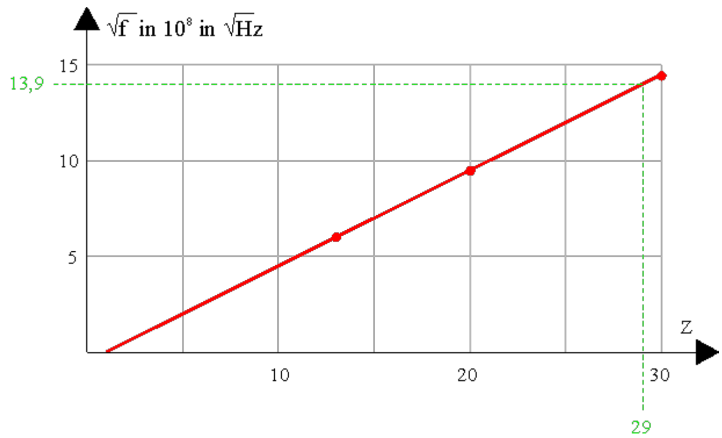
Bestimmen Sie damit die Ordnungszahl eines Elements, dessen $\boldsymbol{K_\alpha}$-Linie die Wellenlänge 155 pm hat.

(c) Erläutern Sie, wo der Graph in Teilaufgabe **(b)** nach dem Gesetz von MOSELEY die *Z*-Achse schneiden muss.

(a) Ein Elektron der K-Schale wird auf ein noch freies bzw. teilbesetztes Niveau gehoben. Der nun freie Platz auf der K-Schale wird wieder aufgefüllt, wobei eine hohe Wahrscheinlichkeit dafür besteht, dass das "Loch" in der K-Schale von einem Elektron der L-Schale aufgefüllt wird. Dabei kommt es zur Emission der $\boldsymbol{K_\alpha}$ -Strahlung. Der freie Platz auf der L-Schale wird durch energetisch höher liegende Elektronen gefüllt.



(b)



Berechnung von $\sqrt{f}$ für die Wellenlänge 155pm:

$$\sqrt{f}=\sqrt{\frac{c}{\lambda}}=\sqrt{\frac{3\cdot 10^{8}\,m/s}{155\cdot 10^{-12}\,m}}=13{,}9\cdot 10^{8}\,\sqrt{Hz}$$

Aus der Graphik erzieht man, dass bei der gegebenen Wellenlänge sich eine Ordnungszahl von *Z* = 29 ergibt.

(c) Nach dem Gesetz von Moseley (Kapitel 7.10.5) gilt

$$\frac{3}{4}R_\infty\cdot(Z-1)^2=\frac{1}{\lambda}=\frac{f}{c}\Leftrightarrow f=\frac{3}{4}R_\infty\cdot c\cdot(Z-1)^2\Rightarrow$$

$$\sqrt{f}=\sqrt{\frac{3\cdot R_\infty\cdot c}{4}}\cdot(Z-1)$$

Zur obigen Gleichung gehört eine Gerade, die im $\boldsymbol{Z} - \sqrt{\boldsymbol{f}}$-Diagramm die Z-Achse bei Z = 1 schneidet.

3. Planck'sches Strahlungsgesetz

(a) Zeigen Sie, dass das Planck'sche Strahlungsgesetz für große Wellenlängen in das Rayleigh-Jeans-Gesetz für Hohlraumstrahler

$$\frac{dP}{d\lambda} = \frac{2ckT}{\lambda^4}$$

übergeht.

(b) Diskutieren Sie das Verhalten beider Kurven für sehr kleine Wellenlängen.

(a) Das Planck'sche Strahlungsgesetz (Kapitel 7.1.3 und 8.1.4)

$$\frac{dP}{d\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

lässt sich für große Wellenlängen entwickeln. Dabei wird ausgenutzt, dass die Exponentialfunktion e^x für x nahe 0 durch das Taylorpolynom

$$e^x \approx 1 + x$$

dargestellt werden kann.

Damit wird

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \approx 1 + \frac{hc}{\lambda kT} - 1 = \frac{hc}{\lambda kT}$$

Daraus folgt

$$\frac{dP}{d\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{\lambda kT}{hc} = \frac{2ckT}{\lambda^4}$$

(b) $\frac{dP}{d\lambda}$ beschreibt die Leistung, die pro Volumenelement und Wellenlängenintervall von einem schwarzen Körper emittiert wird. Im Rayleigh-Jeans-Gesetz geht die spektrale Leistungsdichte für λ → 0 gegen unendlich, das Integral über alle Wellenlängen divergiert. Damit wäre die Leistungsdichte, die ein schwarzer Körper abstrahlt, unendlich groß. Im Gegensatz dazu bleibt das Planck'sche Strahlungsgesetz über den gesamten Wellenlängenbereich integrierbar.

4. Compton-Stoß

Zeigen Sie mit Hilfe des Energie- und Impulserhaltungssatzes, dass beim Compton-Stoß das freie Elektron nicht die gesamte Photonenenergie aufnehmen kann. Berechnen Sie dazu relativistisch $(\boldsymbol{v}/\boldsymbol{c})$ nach dem Stoß!

Unter der Voraussetzung, dass das freie Elektron Energie und Impuls des Photons vollständig übernimmt, gilt (Kapitel 8.1.12):

1. Energieerhaltungssatz:

$$hf_{Photon} = c^2 \left(\frac{m_e}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_e \right)$$

2. Impulserhaltungssatz:

$$\frac{hf_{Photon}}{c} = \frac{m_e}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v$$

Dividiert man die erste Gleichung durch c, so kann man anschließend die rechten Seiten der beiden Gleichungen gleichsetzten:

$$c\left(\frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_e\right) = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v \Rightarrow$$

$$\frac{v}{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 - \frac{v}{c} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - 2\frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow$$

$$v = 0 \; oder \; v = c$$

Keine dieser Fälle ist möglich.