22. Übung zu Physik SS 2020

Ausgabe:19.05.2020 Prof. D. Suter

1. Elektromagnetische Welle

Das Magnetfeld einer elektromagnetischen Welle sei

$$\vec{B}(x,y,z) = \vec{e}_x \cdot a \cdot \sin(\omega t - kx) + \vec{e}_y \cdot aky \cdot \sin(\omega t - kx).$$

$\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ sind hierbei Einheitsvektoren entlang der *x*- und *y*-Achse.

(a) Zeigen Sie, dass das angegebene Magnetfeld die Wellengleichung erfüllt.

(b) Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld.

(c) Um welche Arte von Welle handelt es sich?

(a) Die allgemeine Wellengleichung lautet (Kapitel 6.1.5)

$$\frac{d^2\vec{B}}{dt^2} = c^2 \Delta \vec{B} = c^2 \left(\frac{d^2\vec{B}}{dx^2} + \frac{d^2\vec{B}}{dy^2} + \frac{d^2\vec{B}}{dz^2} \right)$$

Differenzierung ergibt

$$\frac{d^2\vec{B}}{dt^2} = -\omega^2 \left(\vec{e}_x \cdot a \cdot \sin(\omega t - kx) + \vec{e}_y \cdot aky \cdot \sin(\omega t - kx) \right) = -\omega^2 \vec{B}$$

$$\frac{d^2\vec{B}}{dx^2} = -k^2 \left(\vec{e}_x \cdot a \cdot \sin(\omega t - kx) + \vec{e}_y \cdot aky \cdot \sin(\omega t - kx) \right) = -k^2 \vec{B}$$

$$\frac{d^2\vec{B}}{dy^2} = 0$$

$$\frac{d^2\vec{B}}{dz^2} = 0$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt

$$-\omega^2 \vec{B} = -k^2 c^2 \vec{B} \Rightarrow k = \frac{\omega}{c}$$

$c = \frac{\omega}{k}$ ist die Phasengeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen.

(b) Im freien Raum ($\vec{j} = 0$, kein Strom) lautet die vierte Maxwellsche Gleichung (Kapitel 4.11.4)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -\frac{d}{dt}\vec{D} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt}\vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{e}_x \left(\frac{d^2 B_z}{dy^2} - \frac{d^2 B_y}{dz^2} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{d^2 B_x}{dz^2} - \frac{d^2 B_z}{dx^2} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{d^2 B_y}{dx^2} - \frac{d^2 B_x}{dy^2} \right)$$

Die einzig nicht verschwindende Ableitung ist im vorliegenden Problem

$$\frac{d^2 B_y}{dx^2} = ak^2 y \cdot \sin(\omega t - kx)$$

Daher folgt

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \vec{e}_z \frac{ak^2 y}{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \sin(\omega t - kx)$$

Integration über die Zeit liefert bei Vernachlässigung der Integrationskonstanten

$$\vec{E} = -\vec{e}_z \frac{ak^2 y}{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \cos(\omega t - kx)$$

(c) Das *E*-feld besitzt nur eine *z*-Komponente senkrecht zu *x*-Ausbreitungsrichtung. Das *B*-Feld besitzt zwei Komponenten (*x,y*), i.e. eine davon parallel zu Ausbreitungsrichtung. Diese Art von EM-Wellen heißt Transversalelektrische (TE) Welle.

Da das *B*-Feld linear mit *y* anwächst, kann eine solche Welle nicht im freien Raum existieren. Sie treten aber in Wellenleitern und Resonatoren auf, also wenn (leitende) Wände Randbedingungen bilden.

2. Zwei Wellen

Zwei elektromagnetische Wellen gleicher Frequenz, aber unterschiedlicher Phase, breiten sich in der gleichen Richtung im Raum aus. Unter welchen Umständen addieren sich die Intensitäten der beiden Wellen so, dass die Gesamtintensität immer gleich der Summe der Einzelintensitäten der beiden Wellen ist, und zwar unabhängig von deren Phasenbeziehung?

Wir betrachten zwei elektromagnetische Wellen

$$\vec{E}_1 = \vec{A}_1 \cos(\omega t) \text{ und } \vec{E}_2 = \vec{A}_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

Die Überlagerung beider ist

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{A}_1 \cos(\omega t) + \vec{A}_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

Das Quadrat der Feldstärke berechnet sich zu

$$\vec{E}^2 = \vec{A}_1^2 \cos^2(\omega t) + \vec{A}_2^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + 2\vec{A}_1\vec{A}_2 \cos(\omega t)\ \cos(\omega t + \varphi)$$

Um die Intensität zu erhalten, muss dieser Ausdruck über die Zeit gemittelt werden. Dieses ergibt

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{E}^2\, dt = \frac{1}{2}\vec{A}_1^2 + \frac{1}{2}\vec{A}_2^2 + \frac{2\vec{A}_1\vec{A}_2}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\cdot\cos(\omega t + \varphi)\, dt$$

Der letzte Term in diesem Ausdruck soll verschwinden, unabhängig von der Phase φ.

$$\frac{2\vec{A}_1\vec{A}_2}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\cdot\cos(\omega t + \varphi)\, dt = \frac{\vec{A}_1\vec{A}_2}{T}\int_0^T [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)]\, dt$$

$$= \vec{A}_1\vec{A}_2 \cos(\varphi)$$

Das ist nur möglich, wenn $\vec{A}_1 \perp \vec{A}_2$, d.h. die beiden Felder müssen senkrecht zueinander stehen.

3. Optischer Doppler-Effekt

Sie fahren in Ihrem (relativistisch schnellen) Auto auf eine Ampel zu. Die Ampel erscheint Ihnen blau (λ_1 = 495 nm). Nachdem Sie an der Ampel vorbeigefahren sind, erscheint Ihnen die Ampel im Rückspiegel rot (λ_2 = 680 nm).

(a) Welche Farbe zeigte die Ampel für den neben der Ampel stehenden Polizisten an, kann er Sie aufgrund eines Rotlichtverstoßes belangen?

(b) Kann er Sie auf Grund eines Geschwindigkeitsverstoßes belangen (berechnen Sie Ihre Geschwindigkeit im System des Polizisten)?

(a) Optischer Doppler-Effekt (Kapitel 6.5.9) besagt

$$\lambda_1 = \lambda_Q \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

wenn Sie auf die Ampel zufahren, und

$$\lambda_2 = \lambda_Q \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

wenn Sie von die Ampel entfernen.

Daraus folgt

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda_Q^2 \Rightarrow \lambda_Q = \sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = 580\ \mathrm{nm}$$

Die Ampel war gelb (gelb ≈ 590–560 nm).

(b)

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c-v}{c+v} \Rightarrow v = c\,\frac{1-\lambda_1/\lambda_2}{1+\lambda_1/\lambda_2} \approx 0.16\,c$$

Zu schnell!

4. Sonnenstrahlung

Als Solarkonstante E_0 = 1361 W/m^2 wird die langjährig gemittelte extraterrestrische Bestrahlungsstärke (Intensität) bezeichnet, die von der Sonne bei mittlerem Abstand Erde–Sonne (150 Millionen Kilometern) ohne den Einfluss der Atmosphäre senkrecht zur Strahlrichtung auf die Erde auftrifft.

(a) Was ist die Strahlungsleistung der Sonne?

(b) Wie groß ist die Gesamtkraft, die die Sonnenstrahlen auf die Erde ausüben? Gehen Sie dabei dass die Erde die Sonnenstrahlung vollständig absorbiert.

Der Erdradius beträgt r_E=6370 km. Der durchschnittliche Abstand zwischen Erde und Sonne beträgt 1 AE oder 149,6 Mio km.

(a) Mit der Solarkonstanten kann man die Strahlungsleistung Φ der Sonne berechnen. Dazu muss die Solarkonstante mit der Oberfläche A=4πr^2 einer Hüllkugel um die Sonne mal genommen werden, wobei die Kugel den Radius des mittleren Erd-Sonne-Abstands aufweist:

$$\Phi = E_0 \cdot A = E_0 \cdot 4\pi r^2 = 1361\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \cdot 4\pi \cdot (149{,}6 \cdot 10^9\ \mathrm{m})^2 = 3{,}83 \cdot 10^{26}\ \mathrm{W}$$

(b) Die Erde absorbiert aus der Sonnenstrahlung denselben Anteil wie eine senkrecht zu Strahlung gestellte Scheibe mir der Fläche A=πr_E^2, was man aus der Vorstellung der Querschnittsfläche sofort einsieht.

Der Impuls, den jedes einzelne Photon auf diese Fläche überträgt, ist $p = \frac{E}{c}$, wo E die Energie des Photons ist. Die von diesem Photon übertragende Kraft lautet

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{p}{t}$$

Da die Intensität der Sonnenstrahlung zeitlich konstant ist. Die Intensität der Sonnenstrahlung benutzt man zur Berechnung des insgesamt übertragenden Impulses. Sie lautet

$$E_0 = \frac{P}{A} = \frac{Leistung}{Fläsche} = \frac{E}{A \cdot t} = \frac{Energie}{Fläche\ Zeit} \Rightarrow \frac{E}{t} = E_0 \cdot A$$

Daraus folgt

$$F = \frac{p}{t} = \frac{E}{c \cdot t} = \frac{E_0 \cdot A}{c} = \frac{E_0 \cdot \pi r_E^2}{c} = \frac{1361\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \cdot \pi \cdot (6{,}370 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^2}{2{,}998 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 5{,}79 \cdot 10^8\ \mathrm{N}$$

Das entspricht einem Gewicht von

$$\frac{F}{g} = \frac{5{,}79 \cdot 10^8\ \mathrm{N}}{9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 5{,}9 \cdot 10^7\mathrm{kg} = 59000\ \mathrm{Tonnen}$$