20. Übung zu Physik SS 2020

Ausgabe:05.05.2020 Prof. D. Suter

1. Wellengleichung

(a) Berechnen Sie die Frequenz und die Periodendauer einer Rundfunkwelle mit der Wellenlänge λ = 600 m und einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von c = $3 \cdot 10^8$ m/s.

(b) Berechnen Sie die Wellenlänge und die Frequenz für oranges Licht mit der Periodendauer T = $2 \cdot 10^{-15}$ s und einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von c = $3 \cdot 10^8$ m/s.

(c) Wie schnell ist eine Wasserwelle mit Periodendauer T = 3 s und Wellenlänge λ = 3 m?

(d) Welche Wellenlänge hat eine Schallwelle, die sich mit c = 330 m/s und einer Frequenz von 440 Hz (Kammerton a) ausbreitet?

(a) T = c/λ = 2 μs und f = 1/T = 500 kHz

(b) λ = c·T = 600 nm und ν = 1/T = $5 \cdot 10^{14}$ Hz

(c) v = λ/T = 1 m/s

(d) λ = c/f = 0.75 m

2. Harmonische Welle

Zeigen Sie, dass die Überlagerung folgender harmonischer Wellen

$$y_1 = y_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_1)\,, y_2 = y_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_2)$$

mit $\varphi_1 = 30°, \varphi_2 = 60°$ und $y_0 = 2\ cm$ wieder eine harmonische Welle ist. Wie groß sind die Frequenz, Wellenlänge, Phasenkonstante und Amplitude der resultierenden Welle?

Die einfache trigonometrische Formel lautet

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Die Überlagerung (Kapitel 6.1.9) läßt sich dann schreiben als

$$y = y_1 + y_2 = y_0[\cos(\omega t - kx) \cdot \cos(\varphi_1) - \sin(\omega t - kx) \cdot \sin(\varphi_1) +$$
$$+ \cos(\omega t - kx) \cdot \cos(\varphi_2) - \sin(\omega t - kx) \cdot \sin(\varphi_2)]$$

oder

$$y = y_0[\cos(\omega t - kx) \cdot (\cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2)) - \sin(\omega t - kx) \cdot (\sin(\varphi_1) + \sin(\varphi_2))]$$

Dieser Ausdruck ergibt sicher eine harmonische Welle der Form

$$y = A \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi) = A \cdot [\cos(\omega t - kx)\cos(\varphi) - \sin(\omega t - kx)\sin(\varphi)]$$

Falls $A \cdot \cos(\varphi) = y_0 \cdot (\cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2))$ und $A \cdot \sin(\varphi) = y_0 \cdot (\sin(\varphi_1) + \sin(\varphi_2))$.

Mit den gegebenen Werten für φ_1 und φ_2 gilt $\cos(\varphi_1) = \sin(\varphi_2)$ und $\cos(\varphi_2) = \sin(\varphi_1)$, und damit auch $\cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2) = \sin(\varphi_1) + \sin(\varphi_2)$. Daraus folgt

$$A\sin(\varphi) = A\cos(\varphi) \Rightarrow$$

Phasenkonstante: $\boldsymbol{\varphi = 45°}$

Entsprechend finden wir für die Amplitude:

$$A = \frac{y_0 \cdot (\cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2))}{\cos(\varphi)} = \frac{2\text{ cm} \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \boldsymbol{3{,}86\ cm}$$

Die Frequenz und Wellenlange ändern sich nicht, da (Kapitel 6.1.9)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}\ und\ \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

3. Harmonische Welle 2

(a) Beweisen Sie, dass die Multiplikation einer harmonischen Welle mit $\pm i$ mit einer Phasenverschiebung um $\pm\pi/2$ gleichwertig ist.

(b) Wir betrachten zwei Wellen $y_1 = A\,cos(\omega t + kx)$ und $y_2 = A\,cos(\omega t - kx + \pi)$. Was ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Betrag und Richtung) in den beiden Fällen?

(c) Zeigen Sie mit komplexer Schreibweise, dass die Überlagerung der beider Wellen aus (b) eine stehende Welle $y = y_1 + y_2 = -2A \cdot \sin kx \cdot \sin \omega t$ ergibt.

(a) Sei $\boldsymbol{f = A \cdot e^{i\varphi}}$, dann ist $\boldsymbol{\pm i \cdot f = \pm i \cdot A \cdot e^{i\varphi}}$. Wegen $\boldsymbol{\pm i = \cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}}$ folgt

$$\boldsymbol{\pm i \cdot f = A \cdot e^{\pm i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\varphi} = A \cdot e^{i\varphi \pm i\frac{\pi}{2}}}$$

(b) Die Überlagerung lautet in komplexer Schreibweise

$$\boldsymbol{y = Ae^{i\omega t} \cdot \left[e^{ikx} + e^{-ikx}e^{i\pi}\right]}$$

Wegen $\boldsymbol{e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1}$ folgt

$$\boldsymbol{y = Ae^{i\omega t} \cdot \left[e^{ikx} - e^{-ikx}\right] = Ae^{i\omega t} \cdot 2i \cdot \sin\omega t}$$

Anwendung der Eulerschen Formel auf $\boldsymbol{e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t}$ ergibt

$$\boldsymbol{y = A[2i \cdot \sin\omega t\cos kx - 2\sin kx\sin\omega t]}$$

Der Realteil dieses Ausdrucks ist

$$\boldsymbol{y = -2A\sin kx\sin\omega t}$$

4. Zwei Lautsprecher

Zwei identische Lautsprecher strahlen die gleiche Schallintensität ab, aber einer bei der Frequenz $\boldsymbol{\nu_1 = 400\ Hz}$, der andere bei $\boldsymbol{\nu_2 = 4000\ Hz}$.

(a) In welchem Verhältnis steht der maximale Hub der Membranen der beiden Lautspreche?

(b) In welchem Verhältnis stehen die maximalen Druckschwankungen in der Luft an Orten gleicher Schallintensität beider Wellen?

(a) Nach Vorlesung (Kapitel 6.2.4) gilt für die Intensität als Funktion der Amplitude

$$I = v_S \frac{\rho}{2} \chi_0^2 \omega^2$$

Beide Lautsprecher sollen gleiche Intensität abstrahlen, d.h.

$$\chi_{0,1}^2 \cdot \omega_1^2 = \chi_{0,2}^2 \cdot \omega_2^2$$

oder

$$\frac{\chi_{0,1}}{\chi_{0,2}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{4000\ Hz}{400\ Hz} = 10$$

(b) Entsprechend gilt für die maximalen Druckabweichungen

$$I = \frac{1}{2\rho v_S} (\Delta p_0)^2$$

Daher folgt in diesem Fall

$$\frac{\Delta p_{0,1}}{\Delta p_{0,2}} = 1$$