19. Übung zu Physik SS 2020

Ausgabe:28.04.2020 Prof. D. Suter

1. Gedämpfte Schwingung

Eine Kugel hängt an einem Gummiband. Wenn sie ausgelenkt und losgelassen wird, schwingt sie um die Ruhelage. Nach 10 s ist die Amplitude der Schwingung auf die Hälfte des Anfangswertes zurückgegangen. Berechnen Sie die Abklingkonstante δ.

Die Amplitude einer gedämpften Schwingung hängt von der Zeit ab (Kapitel 5.4.2):

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

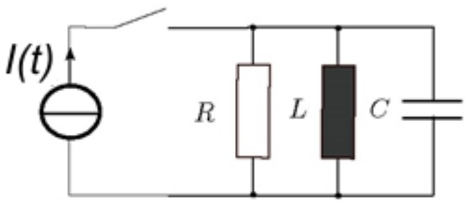
Für T = 10 s ist die Amplitude auf die Hälfte des Anfangswerts abgefallen:

$$A(T) = \frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot T} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\delta \cdot T} \Rightarrow 2 = e^{\delta \cdot T}$$

$$\delta = \frac{\ln(2)}{T} = \frac{\ln(2)}{10\text{ s}} = 0{,}069\text{ s}^{-1}$$

2. Parallelschwingkreis

Man betrachte die folgende Parallelschaltung eines Widerstands R mit einer Spule mit Induktivität L, sowie einem Kondensator mit Kapazität C. Zum Zeitpunkt t = 0 wird der Schalter geöffnet und der Strom durch die Spule betrage $I_L(0) = I_{L0}$, sowie die Spannung am Kondensator $U_C(0) = U_{C0}$.



(a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Anfangsbedingungen, deren Lösung das zeitliche Verhalten des Stromes durch die Spule $I_L(t)$ beschreibt.

(b) Wie lautet die charakteristische Gleichung dieser Differentialgleichung?

(c) Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung für den Fall, dass

$$4R^2C < L, \qquad I = I_0 \cdot \sin(\omega_q t)$$

(a) Nach dem Knotensatz (Kapitel 4.6.1) gilt

$$I(t) - I_R(t) - I_L(t) - I_C(t) = 0$$

Des Weiteren gelten die Bauteilgleichungen (Kapitel 4.6.4)

$$I_R(t) = \frac{U_R(t)}{R};\ I_C(t) = C\frac{dU_C(t)}{dt};\ I_L(t) = L\frac{dI_L(t)}{dt}$$

In der Parallelschaltung gilt außerdem

$$U_R(t) = U_C(t) = U_L(t)$$

Somit erhält man durch Einsetzen

$$I(t) - \frac{L}{R}\frac{dI_L(t)}{dt} - I_L(t) - LC\frac{d^2I_L(t)}{dt^2} = 0$$

und nach Umstellen die gesuchte DGL zweiter Ordnung mit zugehörigen Anfangsbedingungen:

$$\frac{d^2 I_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dI_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} I_L(t) = \frac{1}{LC}\, I(t)$$
$$I_L(0) = I_{L0}$$
$$\frac{dI_L(0)}{dt} = \frac{1}{L} U_{C0}$$

(b) Da $I(t \geq 0)=0$, lautet die charakteristische Gleichung für $I_L(t) = A \cdot e^{\lambda t}$ (Kapitel 5.4.2)

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \; mit \; \beta = \frac{1}{2RC}, \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

(c) Die Lösungen der charakteristischen Gleichung lauten (Kapitel 5.4.2)

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{L - 4R^2C}{4LR^2C^2}}$$

Für den Fall, dass $4R^2C < L$ (siehe Aufgabenstellung) folgt somit dass ein reales Zahlenpaar vorliegt (Kriechfall, Kapitel 5.4.5). Damit lautet die Lösung

$$I_L(t) = e^{-\beta t} \cdot (A_1 e^{\omega t} + A_2 e^{-\omega t}), \qquad \omega = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt

$$I_L(0) = I_{L0} \Rightarrow A_1 + A_2 = I_{L0}$$
$$\frac{dI_L(0)}{dt} = (-\beta + \omega)A_1 + (-\beta - \omega)A_2 = \frac{1}{L} U_{C0}$$

Daraus bestimmt man:

$$A_2 = \frac{\frac{1}{L}U_{C0} + I_{L0}}{1 - \frac{\omega + \beta}{\omega - \beta}} = \frac{\left(\frac{1}{L}U_{C0} + I_{L0}\right)(\beta - \omega)}{2\beta}; \; A_1 = I_{L0} - \frac{\left(\frac{1}{L}U_{C0} + I_{L0}\right)(\beta - \omega)}{2\beta}$$

3. Resonanz

Was ist Resonanz? Wo kommen Resonanzphänomene im Alltag vor?

Unter dem Einfluss einer periodischen Anregung erreicht die Amplitude eines schwingungsfähigen Systems sehr hohe Werte und hat ein Maximum bei der Resonanzfrequenz ω_R.

Beispiele:

(a) Wenn man mit einer Tasse mit heissem Tee durch den Park läuft und die Schrittfrequenz den Tee zum Überlaufen bringt.

(b) Die Tacoma Narrows Bridge in Washington, welche durch den externen Wind resonant angeregt wurde und dann in die Brüche ging.

(c) Ein Federpendel, dass wir am oberen Ende halten und anregen.

4. Saite

Warum hängt der Klang einer Saite davon ab, in welcher Entfernung von der Mitte man sie anspielt? Welche Oberschwingungen fehlen im Klang einer Saite, die in der Mitte angezupft wird?

Die relative Intensität der Obertöne hängt davon. Die Obertöne, welche am Ort der Anregung einen Bauch haben, werden bevorzugt. Beim Anzupfen in der Mitte der Saite fehlen dann z.B. alle Obertöne, welche an dieser Stelle einen Knoten haben, das sind alle Oberschwingungen mit geraden *n* (2., 4., 6.,...) (Kaptitel 5.6.5):