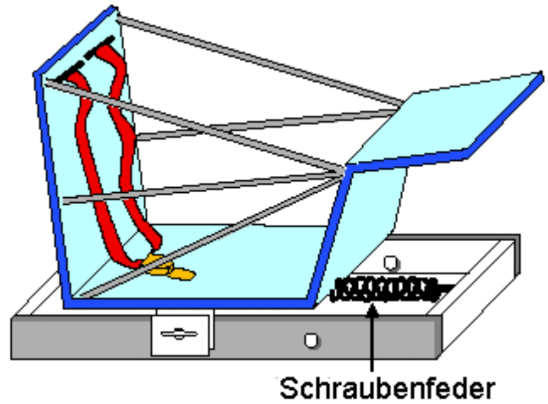
18. Übung zu Physik SS 2020

Ausgabe:21.04.2020 Prof. D. Suter

1. Massebestimmung im Weltall

Befinden sich Astronauten im Spaceshuttle in der Erdumlaufbahn, dann bestimmen sie ihre Körpermasse mit dem sogenannten "Body Mass Measurement Device" (BMMD). Es besteht aus einem Gestell, in dem sich die Astronautin mit einem Gurt festgeschnallt hat. Dieses Gestell ist reibungsfrei in einer Schiene montiert und an einer Schraubenfeder befestigt.



a) Warum verwendet die NASA keine „normale Bodenwaage“?

b) Erklären Sie, wie das BMMD funktioniert (Betrachten Sie die Bewegung welche das Gestell durchführt wenn man es aus seiner Gleichgewichtsposition verschiebt). Erläuterten Sie, ob die Orientierung dieses Geräts relativ zur Erde eine Rolle spielt.

c) Warum müssen sich die Astronauten in dem Gestell festschnallen und es genügt nicht, dass sie sich nur hineinsetzen?

d) Schätzen Sie ab, welche Federkonstante man für dieses Gerät wählen sollte, wenn die Schwingungsdauer der Anordnung in der Größenordnung von 0,5 s liegen soll.

a) Bei einer normalen Bodenwaage wirkt der Schwerkraft eines Körpers die Bodendruckkraft entgegen. Diese beiden gegeneinander wirkenden das Kräftegleichgewicht bestimmenden gleichgroßen Kräfte führen zu einer Dehnung einer eingebauten Feder oder zu einer Verbiegung eines Sensors. Die Dehnung der Feder oder die Sensorverbiegung führt über eine Skala oder über Elektronik zu einer Anzeige der Schwerkraft, die im allgemeinen zu einer Massenanzeige entsprechend der Formel $F_G = m \cdot g$ „umgerechnet“ wird. Da in der Erdumlaufbahn aber der Boden genau wie der Körper beschleunigt wird, wirkt der Gravitationskraft keine Bodendruckkraft entgegen und die Feder der Waage wird nicht zusammengedrückt. Diesen Zustand der gemeinsamen Beschleunigung von Umgebung und Körper nennt man meist Schwerelosigkeit, besser ist der Begriff Mikrogravitation.

b) Dieses Gerät, in dem die Astronautin festgeschnallt ist, stellt zusammen mit der Feder ein harmonisches Federpendel dar, dessen Masse die Summe aus Astronautenmasse und Gestellmasse ist. Unter den Bedingungen der Mikrogravitation ("Schwerelosigkeit") spielt die Orientierung (horizontal) keine Rolle – alle Raumrichtungen sind im Gegensatz zu einem Experiment auf der Erdoberfläche gleichberechtigt.

c) Wenn sich die Astronautin nicht festschnallt, besteht keine Verbindung zwischen Gestell und Astronautin und bereits die kleinsten Kräfte führen dazu, dass sie aus dem Gestell wegbeschleunigt wird und damit keine Messung möglich ist.

d) Für ein Federpendel gilt (Kapitel 5.2.3)

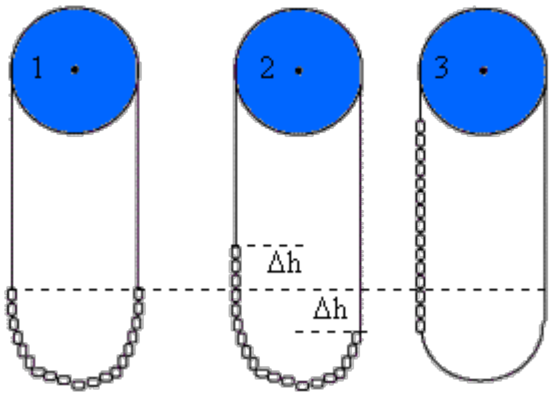
$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}} \Rightarrow c = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T^2}$$

Setzt man die Periodendauer von 0,5s und die Masse von 100 kg für Gestell plus Astronautengewicht an, so ergibt sich

$$c = \frac{4\pi^2 \cdot 100\text{ kg}}{(0{,}5\text{ s})^2} = 16 \cdot 10^3\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

2. Kettenschwingung

Ein Kettenstück der Länge *l* = 60 cm und der Masse *m* = 600 g ist über einen dünnen Faden über eine reibungsfreie Rolle mit beiden Enden aufgehängt (Zeichnung links). Nun wird ein Kettenende um *Δh* = 10 cm an einer Seite hochgehoben (Zeichnung rechts) und anschließend losgelassen.



a) Zeigen Sie, dass das Kettenstück eine harmonische Schwingung durchführt und dass für die Auslenkung Δh das lineare Kraftgesetz gilt $F_{Rück}(\Delta h) = 2 \cdot \frac{m}{l} \cdot g \cdot \Delta h$.

b) Berechnen Sie die Schwingungsdauer *T* sowie die maximale Geschwindigkeit v_{max} der Kettenschwingung.

c) Erläuterten Sie, ob das Kettenstück auch noch eine harmonische Schwingung durchführt, wenn man es, wie in Zeichnung 3 gezeigt, um fast 60 cm hochhebt und loslässt.

a) Als Rückstellkraft $F_{Rück}$ der Bewegung wird bei der Kettenschwingung durch den Unterschied der Gewichtskräfte links und rechts der Rolle gebildet. Hierfür gilt:

$$F_{Rück} = m_{links} \cdot g - m_{rechts} \cdot g = \Delta m \cdot g$$

Der Unterschied der Massen links und rechts hängt von der "Dichte" ml der Kette und der Auslenkung Δh der Kette ab. Dabei ist zu beachten, dass eine Auslenkung der Kette um Δh zu einem Massenunterschied von

$$\Delta m = 2 \cdot \frac{m}{l} \cdot \Delta h$$

führt, da die Masse auf einer Seite zunimmt und gleichzeitig natürlich auf der anderen Seite in gleichem Maße abnimmt. Einsetzen in die obere Gleichung führt zu

$$F_{Rück} = 2 \cdot \frac{m}{l} \cdot \Delta h \cdot g$$

und damit einem linearen Kraftgesetz (Kapitel 5.2.2). Die Kettenschwingung führt eine harmonische Schwingung aus.

b) Die Schwingungsdauer einer harmonischen Schwingung ergibt sich allgemein aus

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

wobei k der ermittelten Konstanten aus dem Kraftgesetz, also k= $2 \cdot \frac{m}{l} \cdot g$ entspricht. Einsetzen liefert

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$$

Wie beim Fadenpendel kürzt sich hier die Masse m der schwingenden Kette heraus, die somit, wie auch die anfängliche Auslenkung Δh keinen Einfluss auf die Periodendauer hat. Einsetzen von l = 0,60 m liefert die gesuchte Periodendauer:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{0{,}6\ \mathrm{m}}{2 \cdot 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 1{,}1\ \mathrm{s}$$

Die maximale Geschwindigkeit v_{max} ergibt sich allgemein aus

$$v_{max} = x_0 \sqrt{\frac{k}{m}} = x_0 \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

Einsetzen der gegebenen Werte liefert

$$v_{max} = 0{,}1\ \mathrm{m} \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}6\ \mathrm{m}}} = 0{,}57\ \mathrm{m/s}$$

c) Nein, in dem Fall führt die Kette keine harmonische Schwingung mehr durch, da kein lineares Kraftgesetz vorliegt. Sobald sich die Kette vollständig auf der linken Seite befindet, ist die wirkende Kraft die gesamte Gewichtskraft $F_g = m \cdot g$ der Kette und daher konstant und unabhängig von der Höhe Δh.

3. Elektrischer Schwingkreis

Ein ungedämpfter Schwingkreis besteht aus einer Spule mit der Induktivität L und einem Kondensator mit der Kapazität C sowie einem zweiten „Trimmerkondensator“, der parallel zum ersten Kondensator geschaltete ist und dessen Kapazität zwischen C_1 = 10 pF und C_2 =

100 pF stufenlos eingestellt werden kann. Welche Werte müssen L und C haben, damit man mit diesem Schwingkreis Frequenzen zwischen f_1 = 300 kHz und f_2 = 100 kHz erzeugen kann?

Die Kapazitäten der beiden parallel geschalteten Kondensatoren addieren sich. Die beide Frequenzen sind dann (Kapitel 5.3.5)

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C+C_1)}}; \quad f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C+C_2)}}$$

Die Induktivität L ist konstant:

$$\frac{1}{4\pi^2 \cdot f_1^2 \cdot (C+C_1)} = L = \frac{1}{4\pi^2 \cdot f_2^2 \cdot (C+C_2)} \Rightarrow C = \frac{f_1^2 \cdot C_1 - f_2^2 \cdot C_2}{f_2^2 - f_1^2}$$

Einsetzen der gegebenen Werte liefert

$$C = \frac{(3 \cdot 10^5\ \frac{1}{\mathrm{s}})^2 \cdot 10^{-11}\mathrm{F} - (1 \cdot 10^5\ \frac{1}{\mathrm{s}})^2 \cdot 10^{-10}\mathrm{F}}{(1 \cdot 10^5\ \frac{1}{\mathrm{s}})^2 - (3 \cdot 10^5\ \frac{1}{\mathrm{s}})^2} = 1{,}25\ \mathrm{pF}$$

und

$$L = \frac{1}{4\pi^2 \cdot f_1^2 \cdot (C+C_1)} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot \left(3 \cdot 10^5\ \frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 1{,}125 \cdot 10^{-11}\mathrm{F}} = 25\ \mathrm{mH}$$

4. Corona-Krise

In der Tabelle sind die bestätigte Coronavirus-Infektionen in NRW zusammengefasst.
Sie können die Daten herunterladen:
https://www1.wdr.de/nachrichten/themen/coronavirus/corona-daten-nrw-100.html).

Tag	Bestätigte Infektionen
1 (1 März)	85
3	108
5	230
7	377
9	515
11	687
13	1264
15	2100
17	3060
19 (Shutdown)	4743
21	6740
23	8011
25	9421
27	11523
29	13630
31	15251
33	17614
35	19405
37	20814
39	22849

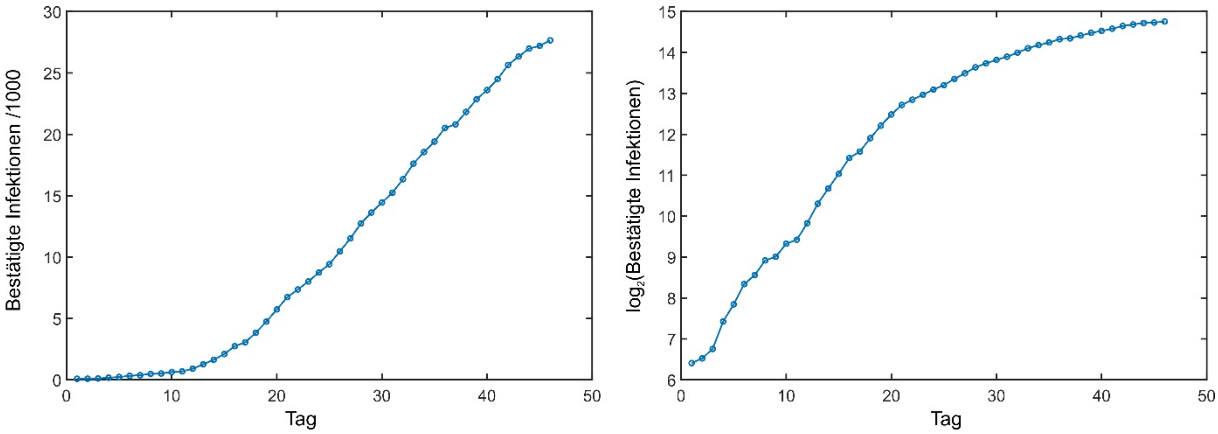
41	24499
43	26333
45 (15 April)	27206

Bitte stellen Sie die Daten graphisch dar: (1) Infektionen *versus* Tag; (2) $\log_2$(Infektionen) *versus* Tag.

Versuchen Sie aus den beiden Grafiken

a) Die Verdopplungsrate bis zum Shutdown (19. März) zu bestimmen.

b) Wie viele Menschen in NRW wären am 30. April infiziert, wenn die Verdopplungsrate von (a) beibehalten würde?

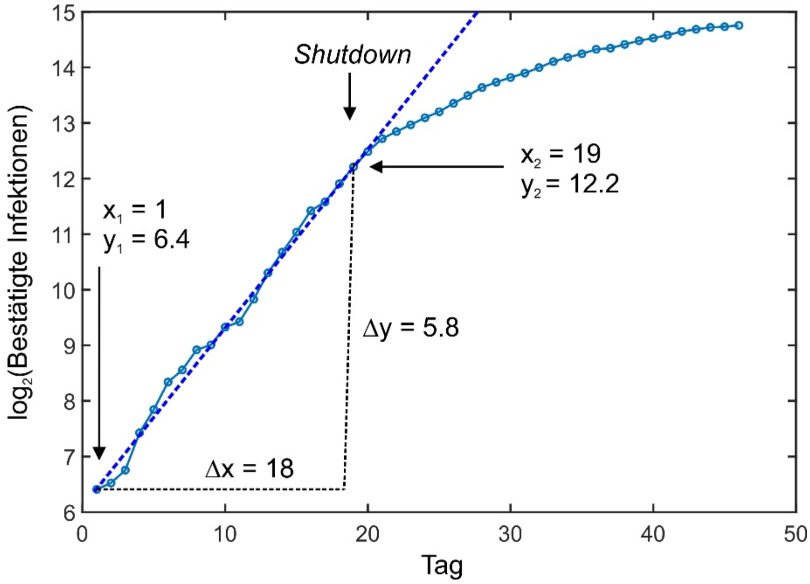


Wie man es aus obigen Abbildungen sehen kann ist die lineare Darstellung weniger aussagekräftig. Die logarithmische Grafik ist entgegen viel informativer und kann leicht ausgewertet werden. Der Infektionen Verlauf zwischen 1 (erste Datenpunkt) und 19 März (Shutdown) ist in gute Näherung linear, d.h. es kann durch

$$\mathrm{Infektionen(Tag)} = 2^{\frac{Tag+Tag_0}{T_2}}$$

beschrieben werden.

$$Y(x) = 2^{\frac{x+x_0}{T_2}} \Rightarrow y(x) = log_2 Y = \frac{x+x_0}{T_2}$$



Die Zahlen sind

$$y(1\,März) = y_1 = 6{,}4, y(19\,März) = y_2 = 12{,}2$$

Daraus lässt sich die Verdopplungszeit T_2 berechnen

$$T_2 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{19-1}{12.2-6.4} = 3{,}1\ Tag.$$

Die Verdopplungsrate ist dann

$$\frac{1}{T_2} = 0{,}32\ \frac{1}{Tag}$$

Wenn diese Verdopplungsrate bis zum 30 April beibehalten worden wäre, dann wäre die Zahl der Infektionen bis zu diesem Zeitpunkt gewachsen wie folgt: Zunächst der Logarithmus

$$y_3 = y_2 + \frac{x_3 - x_2}{T_2} = 12{,}2 + \frac{60}{3{,}1} = 31{,}6\,.$$

Daraus ergibt sich die Zahl der Infektionen als

$$Y(30\ April) = 2^{y_3} = 3{,}26 \cdot 10^9.$$

Da die Zahl ist viel großer als NRW-Bevölkerungszahl 17.932.651≈$1{,}79 \cdot 10^7$ (Stand 31. Dezember 2018), lautet die richtige Antwort:

Alle Menschen in NRW wären infiziert!