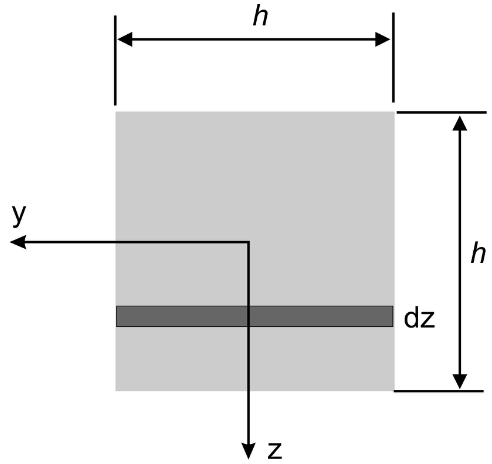
8. Übung zu Physik WS 2019

Ausgabe: 23.11.2019 Prof. D. Suter

1. Balken

Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment und das Widerstandsmoment eines Balkens mit quadratischen Querschnitt.



Das Flächenträgheitsmoment ist eine in der Festigkeitslehre verwendete, aus dem Querschnitt eines Trägers abgeleitete geometrische Größe, die zu dessen Verformungs- und Spannungsberechnung bei Biege- und Torsionsbeanspruchung eingeführt wurde.

Die axialen Flächenträgheitsmomente lassen sich durch diese Gleichungen beschreiben:

$J_z = \int_A z^2 \cdot dA$ - z = senkrechter Abstand der y-Achse zum Element dA;

$J_y = \int_A y^2 \cdot dA$ - *y* = senkrechter Abstand der *z*-Achse zum Element d*A.*

Die Bestimmung der z-Flächenträgheitsmoment erfolgt mit:

$$J_z = \int_A z^2 \cdot dA \ mit \ dA = h \cdot dz$$

$$J_z = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cdot hdz = \left[\frac{1}{3} z^3 h\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h^4}{12}$$

Analog für y, i.e. $J_y = \int_A y^2 \cdot dA \ mit \ dA = h \cdot dy, i.e. J_y = J_z = J.$

Das Widerstandsmoment ist definiert als: $W = J/e_R$ mit dem maximalen senkrechten Abstande_R der Randfaser (Querschnittsrand) zur neutralen (spannungsfreien) Faser.

Widerstandsmoment: $W = \frac{J}{\frac{h}{2}} = h^3/6$

2. Das Flugzeug

Ein Flugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit bezüglich der Luft von v_F = 910 km/h von Nordamerika nach Europa, also von Westen nach Osten. Es gerät in einen starken Wind, der mit der Geschwindigkeit v_L = 210 km/h bezüglich des Bezugssystems Erdboden aus südlicher Richtung weht.

a) Mit welcher Geschwindigkeit über dem Erdboden fliegt das Flugzeug?

b) Wie muss der Pilot seinen Kurs ändern, damit das Flugzeug wieder genau nach Osten fliegt?

a) mit Pythagoras $v' = \sqrt{v_F^2 + v_L^2}$ = 934 km/h.
b) Abdrift beträgt $\alpha = \mathrm{asin}\left(\frac{v_L}{v_F}\right)$ = 13° nach Norden Der Pilot muss 13° nach Süden steuern.

3. Rotation
Für eine Kreisbahn gilt

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_x t \\ r_y t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} cos\,(\omega t) \\ sin\,(\omega t) \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie
a) den Betrag von $\vec{r}(t)$;
b) den Winkel zwischen Radiusvektor und Geschwindigkeit
c) den Winkel zwischen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung.

a) $|\vec{r}(t)| = \sqrt{\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)} = \sqrt{r^2(sin^2\omega t + cos^2\omega t)} = r = const$

b) Die Winkel zwischen Vektoren werden durch Bildung des Skalarprodukts ermittelt:

$$cos\theta = \vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = r\begin{pmatrix} cos(\omega t) \\ sin(\omega t) \end{pmatrix} \cdot r\begin{pmatrix} -\omega \cdot sin(\omega t) \\ \omega \cdot cos(\omega t) \end{pmatrix}$$
$$= r^2(-\omega\, cos(\omega t)\, sin(\omega t) + \omega\, sin(\omega t)\, cos(\omega t)) = 0$$

$\theta = 90°$

c)

$$cos\theta = \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = r\begin{pmatrix} -\omega^2 cos(\omega t) \\ -\omega^2 sin(\omega t) \end{pmatrix} \cdot r\begin{pmatrix} -\omega \cdot sin(\omega t) \\ \omega \cdot cos(\omega t) \end{pmatrix}$$
$$= (r\omega)^2(cos(\omega t)\, sin(\omega t) - \omega\, sin(\omega t)\, cos(\omega t)) = 0$$

$\theta = 90°$

4. Drehimpuls
Ein Massenpunkt (Masse *m*) bewegt sich auf folgender Trajektorie:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot cos\,(\omega t) \\ r \cdot sin\,(\omega t) \\ c \cdot t \end{pmatrix}$$

Wie lautet der Drehgeschwindigkeits-Vektor? Bestimmen Sie den Drehimpuls des Teilchens bezogen auf den Ursprung.

a) Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega \cdot sin\,(\omega t) \\ r\omega \cdot cos\,(\omega t) \\ c \end{pmatrix}$$

b) Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = m \cdot \vec{r}(t) \times \vec{v}(t) = m \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\omega t) \\ r \cdot \sin(\omega t) \\ c \cdot t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\omega \cdot \sin(\omega t) \\ r\omega \cdot \cos(\omega t) \\ c \end{pmatrix}$$

$$= m \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\omega t) \cdot c - ct \cdot r\omega \cdot \cos(\omega t) \\ -ct \cdot r\omega \cdot \sin(\omega t) - cr \cdot \cos(\omega t) \\ r \cdot \cos(\omega t)\, r\omega \cdot \cos(\omega t) + r \cdot \sin(\omega t) r\omega \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$= m \begin{pmatrix} cr \cdot \sin(\omega t) - crt\omega \cdot \cos(\omega t) \\ -ctr\omega \cdot \sin(\omega t) - cr \cdot \cos(\omega t) \\ r^2\omega \end{pmatrix}$$

c) Drehimpuls Große ist zeitunabhängig da

$$|\vec{L}| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = mr^2\omega$$