7 Übung zu Physik WS 2019

Prof. D. Suter

1. Eiskappen

Die Eiskappen an den Polen enthalten eine erhebliche Menge von Eis. Diese Masse trägt aber nur bei zum Trägheitsmoment der Erde (Erdmasse M_r=5,98·10^{24} kg), da sie sich sehr nahe an der Drehachse befindet. Schätzen Sie ab, wie sich die Länge eines Tages ändern würde, wenn die Polkappen abschmelzen würden und sich dieses Wasser gleichmäßig über die Erdoberfläche verteilte.

Was passiert beim Abschmelzen des Eises am Nordpol?

Was passiert beim Abschmelzen des Eises in der Antarktis? Die Masse des Eises in der Antarktis beträgt m=1,2·10^{19} kg.

Hinweis: Das Trägheitsmoment einer Kugelschale der Masse M mit dem Radius r ist $\frac{2}{3}Mr^2$)

Nordpol: das Eis schwimmt auf dem Wasser und daher ändert sich der Meeresspiegel beim Abschmelzen nicht solange man das Eis aus Alaska, Sibirien und Grönland nicht berücksichtigt. Dessen Masse ist etwa 10 mal geringer als die Masse des Eises in der Antarktis und es ist etwas weiter von der Drehachse entfernt. Der Effekt ist deshalb viel geringer als bei der Antarktis.

Südpol: Der Drehimpuls der Erde ist

$$L = I\omega = \frac{2\pi I}{T};$$

daraus folgt die Tageslänge

$$T = \frac{2\pi I}{L}.$$

Diese Schreibweise ist vorteilhaft, weil L konstant bleibt. Dies ist der Fall, weil beim Schmelzen der Eiskappen und der Umverteilung ihrer Masse nur interne Kräfte und Drehmomente auftreten.

Da die Periode T proportional ist zum Trägheitsmoment I gilt

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta I}{I}.$$

Hier ist das Trägheitsmoment der Erde

$$I = \frac{2}{5}M_e r^2.$$

Die Umverteilung der geschmolzenen Eismenge erzeugt eine Änderung von I um:

$$\Delta I = \frac{2}{3}mr^2,$$

Daraus ergibt sich

$$\Delta T = T\frac{5m}{3M_e} = 24 \cdot 60 \cdot 60\,\frac{5 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{19}}{3 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}} = 0{,}29\ s$$

Der Tag wäre eine viertel Sekunde länger, weil das Trägheitsmoment zunähme.

2. Kreisbewegung im Gravitationsfeld

Berechnen Sie die Umlaufdauer und die Bahngeschwindigkeit der 66 Satelliten des Iridium-GPS-Systems, die die Erde (Erdradius 6390 km) auf nahezu kreisförmigen Bahnen in 780 km Höhe umlaufen.

Die Zentripetalkraft $F_z = \frac{mv^2}{2}$ ist gleich der Gravitationskraft $F_G = G\frac{mM_e}{r^2}$. Daraus ergibt sich die Bahngeschwindigkeit

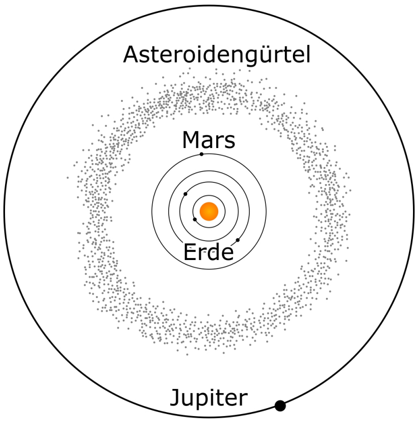
$$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6390 + 780) \cdot 10^3}} \frac{m}{s} = 7{,}46 \frac{km}{s}$$

und Umlaufdauer

$$T = \frac{2\pi r}{v} \approx 6039s$$

3. Asteroidengürtel

a) Die Asteroiden sind kleine Himmelskörper, die sich zwischen Mars- und der Jupiterbahn bewegen. Geben Sie einen sinnvollen Bereich für die Umlaufszeiten dieser Kleinobjekte um die Sonne an.



b) Auch der Kleinplanet Ceres mit seiner Umlaufdauer von 4,60 Jahren liegt im Asteroidengürtel. Bestimmen Sie den Radius der (vereinfacht kreisförmigen) Ceres-Bahn in astronomischen Einheiten AE. (1 AE = Erdbahnradius).

a) Die Radien der Asteroidenbahnen liegen zwischen dem Radius der Mars- und der Jupiterbahn. Aufgrund des 3. Kepler'schen Gesetzes folgt dann, dass die Umlaufdauern der Asteroiden zwischen der Umlaufdauer des Mars und des Jupiter liegen:

$$\boldsymbol{1{,}9a < T_{Asteroid} < 11{,}9a}$$

b) Aus dem 3. Kepler'schen Gesetz

$$\boldsymbol{\frac{T^2}{r^3} = const \Rightarrow T^2 \propto r^3 \Rightarrow T \propto r^{3/2}}$$

folgt

$$\boldsymbol{\frac{T^2_{Ceres}}{r^3_{Ceres}} = \frac{T^2_{Erde}}{r^3_{Erde}} \Rightarrow r_{Ceres} = r_{Erde}\left(\frac{T_{Ceres}}{T_{Erde}}\right)^{2/3} = 1\,AE\left(\frac{4{,}60}{1{,}0}\right)^{2/3} = 2.77\,AE}$$

4. Dehnung

Der Elastizitätsmodul E für einen Stab soll durch einen Zugversuch ermittelt werden. Hierzu wird ein Rundstab mit einem Durchmesser von d = 10 mm und einer Anfangslänge l_0 =50 mm verwendet. Auf der geradlinig verlaufenden Stabachse wirkt eine Kraft F=10 kN. Diese bewirkt, dass der Stab sich um Δl = 0,5 mm verlängert.

1) Wie groß ist die Zugspannung σ?

2) Wie groß ist die elastische Dehnung ϵ?

3) Welchen Wert besitzt der Elastizitätsmodul E?

1) Berechnung der Zugspannung

$$\sigma = \frac{F}{A_0} = \frac{F}{\pi(d/2)^2} = \frac{10^4}{\pi(5 \cdot 10^{-3})^2} \frac{N}{m^2} = 1{,}27 \cdot 10^8 \; Pa$$

2) Berechnung der Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0{,}5mm}{50mm} = 0{,}01$$

3) Berechnung des Elastizitätsmoduls

$$E = \frac{F l_0}{A_0 \Delta l} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = 1{,}27 \cdot 10^{10} \; Pa = 12{,}7 \; GPa$$