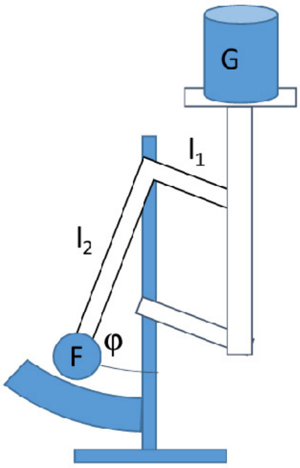
6 Übung zu Physik WS 2019

Prof. D. Suter

1. Briefwaage

Welcher allgemeine Ausdruck ergibt sich für den Drehwinkel φ des Zeigers einer Briefwaage, wenn auf das gewichtslos zu denkende Hebelsystem einerseits das Gewicht *G* und andererseits das Gegengewicht *F* einwirken? (Lastarm l_1 und Kraftarm l_2 bilden in jeder Lage einen rechten Winkel)



Drehmomentgleichgewicht zwischen Zeiger *F* und Last *G*. Der Bezugspunkt ist der Schnittpunkt von l_1 und l_2. Der Winkel zwischen Schwerkraft und l_2 ist φ.

Momentengleichgewicht:

$$l_2 \cdot F \cdot sin\varphi = l_1 \cdot G \cdot cos\varphi \;\Rightarrow tan\varphi = \frac{l_1 \cdot G}{l_2 \cdot F}$$

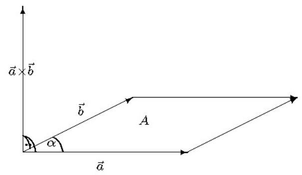
2. Winkel - Skalarprodukt - Vektorprodukt - Abhängigkeit

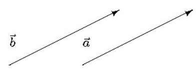
(1) Vektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) Vektoren: $\overrightarrow{a'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gesucht:
a) Länge der Vektoren
b) Skalarprodukt
c) Vektorprodukt
d) Fläche des Parallelogramms
e) Schnittwinkel

(1) Erklärung mit Lösung





$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Länge der Vektoren

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Länge der Vektoren:
$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}$
$|\vec{a}| = 3$
$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$
$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}$
$\left|\vec{b}\right| = 3$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$
$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$
Senkrechte Vektoren:
$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Skalarprodukt:
$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot -2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot -2 = -7$

Vektorprodukt - Fläche des Parallelogramms

$\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - b_3 \cdot a_1 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$
Fläche des Parallelogramms:
$A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$
$A = |\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$
Fläche des Dreiecks aus $\vec{a}, \vec{b}$
$A = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Vektorprodukt:
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$
Fläche des Parallelogramms:
$|\vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2}$
$|\vec{c}| = 5,657$

Winkel zwischen Vektoren

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$
$$\cos\alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Schnittwinkel:
$\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$
$\cos\alpha = \left|\dfrac{-7}{3 \cdot 3}\right|$
$\cos\alpha = \left|-\frac{7}{9}\right|$
$\alpha = 38,942$

(2) Lösung

(a) $\left|\overrightarrow{a'}\right| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 7^2} = 8{,}19;\ \left|\overrightarrow{b'}\right| = \sqrt{0^2 + 9^2 + 2^2} = 9{,}22$

(b) $\overrightarrow{a'} \circ \overrightarrow{b'} = 3 \cdot 0 + 3 \cdot 9 + 7 \cdot 2 = 41$

(c) $\overrightarrow{c'} = \overrightarrow{a'} \times \overrightarrow{b'} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - 9 \cdot 7 \\ 7 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 9 - 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -57 \\ -6 \\ 27 \end{pmatrix}$

(d) $|\vec{c}'| = \sqrt{(-57)^2 + (-6)^2 + 27^2} = 63{,}4$

(e) $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a'} \circ \overrightarrow{b'}}{\left|\overrightarrow{a'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b'}\right|} = \frac{41}{8{,}19 \cdot 9{,}22} = 0{,}543 \ \Rightarrow\ \alpha = 57{,}1°$

3. Doppelintegrale

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale

a)

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y} xydxdy$$

b)

$$\int_{x=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{x} (sinx + cosy)dxdy$$

a)

$$\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{y} xdx\right)ydy = \int_{y=0}^{1}\left(\frac{y^2}{2} - 0\right)ydy = \frac{y^4}{8}\bigg|_0^1 = \frac{1}{8}$$

b)

$$\int_{x=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{x} (sinx + cosy)dxdy = \int_{x=0}^{\pi/2}\left(\int_{y=0}^{x} sinxdy\right)dx + \int_{x=0}^{\pi/2}\left(\int_{y=0}^{x} cosydy\right)dx$$

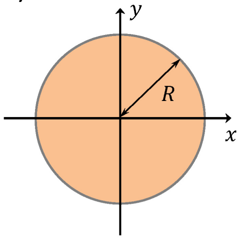
$$= \int_{x=0}^{\pi/2} sinx \cdot xdx + \int_{x=0}^{\pi/2} sinxdx = (sinx - xcosx)|_0^{\pi/2} - cosx|_0^{\pi/2}$$

$$= (0 - 1 + 0 - 0) - (0 - 1) = 0$$

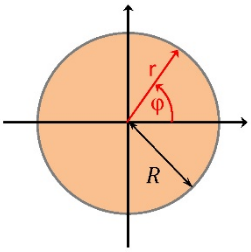
4. Koordinatensysteme

Berechnen Sie durch Integration die Fläche eines Kreises mit Radius *R*, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt! Nutzen Sie dafür

a) kartesische Koordinaten:



b) Polarkoordinaten:



a) Flächenelement in kartesischen Koordinaten $dA = dxdy$

$$A = \int dA = \int_{?}^{?} \int_{?}^{?} dxdy$$

Das X variiert von –R bis +R ⇒

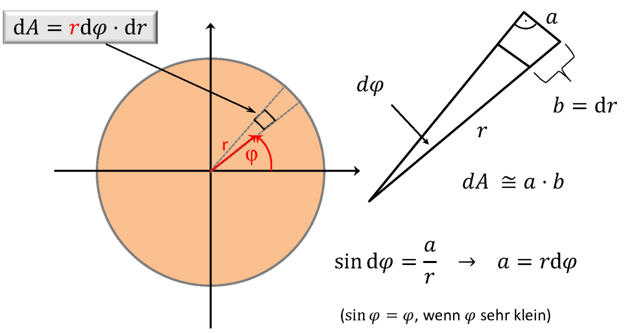
$$A = \int_{-R}^{R} \left(\int_{?}^{?} dy \right) dx$$

Das Y ist mit X durch Pyphagoras-Satz verbunden: $R^2 = x^2 + y^2 \;\Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow$

$$A = \int_{-R}^{R} \left(\int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2} dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2} arcsin\frac{x}{R}\right)\Big|_{-R}^{R} = \pi R^2$$

b)

Flächenelement in Polarkoordinaten



Das R variiert von 0 bis +R und φ von 0 bis 360° (oder 2π)⇒

$$A = \int dA = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{R} rdrd\varphi = \int_{0}^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\varphi = \pi R^2$$