

1. Impulserhaltung

Zwei Kugeln mit den Massen $m_1 = 5,0$ kg und $m_2 = 10$ kg stoßen mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 5,0$ m/s und $v_2 = 8,0$ m/s zentral aufeinander. Wie schnell sind die Kugeln nach dem Stoß, wenn dieser

- elastisch
- unelastisch ist?
- Wie groß ist die kinetische Energie vor und nach dem Stoß bei a) und b). Wieviel Bewegungsenergie geht in beiden Fällen verloren?

Festlegung: die kleine Kugel kommt von links mit positiver Geschwindigkeit, die große Kugel kommt von rechts mit negativer Geschwindigkeit:

$$m_1 = 5,0 \text{ kg}, v_1 = 5,0 \text{ m/s}, m_2 = 10 \text{ kg}, v_2 = -8,0 \text{ m/s}$$

a) Für einen elastischen Stoß gilt

$$\text{Impulserhaltung: } \sum_i p_i = \text{const} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$\text{Energieerhaltung: } \sum_i E_{kin,i} = \text{const} \Rightarrow m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$$

Lösung nach $v'_{1,2}$ ergibt:

$$v'_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} = -12,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die kleine Kugel rollt nach dem Stoß nach links zurück

$$v'_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} = 0,67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die große Kugel rollt nach dem Stoß langsam nach rechts zurück

b) Für einen unelastischen Stoß gilt

$$v'_1 = v'_2 = v' \text{ und Impulserhaltung } m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -3,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ (beide Kugeln rollen nach links)}$$

c) Beim elastischen Stoß ist die Energie konstant:

$$E_{kin} = E'_{kin} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = 382 \text{ J}$$

$$\Delta E = 0$$

Beim unelastischen Stoß:

$$E_{kin} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = 382 \text{ J}$$

$$E'_{kin} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = 102 \text{ J}$$

Es wird eine Energiemenge $\Delta E = 280 \text{ J}$ von kinetischer in Wärmeenergie umgewandelt

2. Kugelreihe

Beweisen Sie, dass beim elastischen Stoß von n Kugeln auf eine Kugelreihe genau n Kugeln an der anderen Seite abprallen. Alle Kugeln haben die gleiche Masse.

Es handelt sich um elastische Stöße, bei denen die kinetische Energie und der Impuls erhalten bleiben. Da beim Stoß keine äußeren Kräfte in Bewegungsrichtung wirken, muss der Impuls der n Kugeln der Masse m , die mit der Geschwindigkeit v_n von links auf die ruhenden Kugeln treffen, gleich dem Impuls der k angestoßenen Kugeln der Masse m sein. Nimmt man weiterhin an, dass die angestoßenen Kugeln sich kollektiv mit der Geschwindigkeit v_k nach rechts bewegen, besagt die Impulserhaltung:

$$n \cdot m \cdot v_n = k \cdot m \cdot v_k$$

Weiterhin muss die Energie vor und nach dem Stoß übereinstimmen:

$$n \cdot m \cdot \frac{v_n^2}{2} = k \cdot m \cdot \frac{v_k^2}{2}$$

Schreibt man dies als

$$n \cdot m \cdot v_n \frac{v_n}{2} = k \cdot m \cdot v_k \frac{v_k}{2}$$

Und berücksichtigt man die erste Gleichung, so sind die Geschwindigkeiten gleich:

$$v_n = v_k$$

Dann besagt die erste Gleichung

$$n = k$$

3. Drehimpuls

Eine 30 g schwere Kugel wird an einem 20 cm langen Faden zweimal pro Sekunde im Kreis herumgeschleudert.

- Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit und den Bahndrehimpuls der Kugel.
- Der Faden wird auf 10 cm verkürzt. Wie schnell ist die Kugel und wie viele Umläufe pro Sekunde schafft sie jetzt?

a) Vorgegeben: $m=0.03 \text{ kg}$, $r = 0,2 \text{ m}$, $f = 2 \text{ s}^{-1}$

Geschwindigkeit: $v = \omega \cdot r = 2\pi f r = 2,51 \text{ m/s}$

Drehimpuls: $L = r \cdot m \cdot v = 0.0151 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

b) $r=0,2 \text{ m} \Rightarrow r'=0,1 \text{ m}=r/2$

Der Drehimpuls bleibt erhalten:

$$L = L' = r \cdot m \cdot v = r' \cdot m \cdot v' \Rightarrow v' = \frac{r \cdot v}{r'} = 2v = 5.02 \text{ m/s}$$

Die Rotationsfrequenz wird damit $f' = \frac{v'}{2\pi r'} = 4 \frac{v}{2\pi r} = 4f = 8 \text{ s}^{-1}$

4. Jo-Jo

Ein Jo-Jo besteht aus zwei Kreisscheiben, die durch einen Mittelsteg verbunden sind, auf den eine Schnur aufgewickelt ist. Hält man das Schnurende fest und lässt das Jo-Jo fallen, so beginnt es beim Herunterrollen zu drehen, da sich die Schnur abwickeln muss. Ist die Schnur zu Ende, setzt es die Drehbewegung fort und steigt wieder an der Schnur hoch.

- Erläutern Sie, welche Energieumwandlungen, die bei diesem Vorgang anfallen.
- Erläutern Sie, warum das Jo-Jo nicht abkippt.

- c) Erläutern Sie, wie man durch geschicktes Ziehen an der Schnur die durch Reibungsverluste nach außen abgehende Energie dem Jo-Jo wieder zuführen kann.
- a) Beim Herunterrollen längs der Schnur wird Lageenergie in kinetische Energie (lineare- und vor allem Rotationsenergie) umgewandelt. Nach dem Umkehrpunkt wird die Rotationsenergie durch Aufwickeln der Schnur wieder in Lageenergie verwandelt.
- b) Das Jo-Jo dreht sich um die Mittelachse, die auf Grund des Drehimpulserhaltungssatzes ihre Richtung beibehält.
- c) Wenn man beim Herunterfallen des Jo-Jos die Schnur nach oben zieht, erhält das Jo-Jo eine höhere Winkelgeschwindigkeit und damit mehr Rotationsenergie als ohne dieses zusätzliche Ziehen. Wenn man beim Hochwandern des Jo-Jos an der Schnur das Schnurende nach unten bewegt, kann das Jo-Jo wesentlich mehr Schnur aufwickeln, während es die Rotationsenergie in Lageenergie umwandelt.