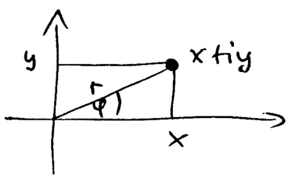
1 Übung zu Physik WS 2019

Prof. D. Suter

1. Komplexe Zahlen (5.37)

Stellen Sie die folgenden Zahlen in der komplexen Zahlenebene dar und ermitteln Sie ihre Polar- (trigonometrische) und ihre exponentielle Darstellung:



$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$$
$$x + \mathrm{i}y = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = re^{\mathrm{i}\varphi}$$
$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}\ \text{(Pythagoras)},\quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Quadrant beachten:

$$\text{I. Quadrant: } \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$
$$\text{II./III. Quadrant: } \varphi = \arctan\frac{y}{x} + \pi$$
$$\text{IV. Quadrant: } \varphi = \arctan\frac{y}{x} (+2\pi)$$

a) *3*,

$r = 3, \varphi = 0; 3 = 3(cos0 + isin0) = 3e^{i0}$

b) *1+i*,

$r = \sqrt{1^2 + i^2} = \sqrt{2}, \varphi = 45° = \frac{\pi}{4}$

$1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

c) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$r = \sqrt{(1/2)^2 + (i\sqrt{3}/2)^2} = 1, \varphi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$

$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = cos\frac{2\pi}{3} + sin\frac{2\pi}{3} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Stellen Sie die komplexe Zahl $\frac{(1+i)^3+2i}{1+i}$ in der Form *a+bi* und in Polarform dar!

$\frac{(1+i)^3+2i}{1+i} = \frac{((1+i)^3+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1+i)^3(1-i)+2i(1-i)}{2} = \frac{2(1+i)^2+2i(1-i)}{2} =$

$= (1 + i)^2 + i(1 - i) = 1 + 3i,$

$1 + 3i = \sqrt{10}e^{i1.249}$

2. Differenzialrechnung

Differenziationsregeln		**Ableitung elementarer Funktionen**
$(u \pm v)' = u' \pm v',\ (cu)' = cu'$		$(x^n)' = nx^{n-1}$ (d.h. auch $x' = 1,\ 1' = 0$)
$(uv)' = u'v + uv'$	(Produktregel)	$(\sin x)' = \cos x$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	(Quotientenregel)	$(\cos x)' = -\sin x$
		$(e^x)' = e^x$
$\frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$	(Kettenregel)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Differenzieren Sie nach *x*:

a) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4\sqrt{x} - 5$

$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$: $\frac{dy}{dx} = x^2 - 4x + 2/\sqrt{x}$

b) $y = x\sin(ax+3)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx}\sin(ax+3) + x\frac{d\sin(ax+3)}{dx} = \sin(ax+3) + ax\cos(ax+3)$$

c) $y = \frac{cosx}{x^2}$

$$y' = \frac{-x^2 sinx - 2xcosx}{x^4} = -\frac{xsinx - 2cosx}{x^3}$$

d) $y = (\sqrt{a} + \sqrt{bx+c})^2$

$$y' = 2(\sqrt{a} + \sqrt{bx+c})(-1)\frac{b}{2\sqrt{bx+c}} = b\left(1 - \sqrt{\frac{a}{bx+c}}\right)$$

3. Integralrechnung

Unbestimmtes Integral (Stammfunktion): $\left.\begin{array}{r} F'(x) = f(x) \\ (F(x)+C)' = f(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

Integrationsregeln analog Differenziationsregeln

$$\int (u \pm v)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}x \pm \int v\,\mathrm{d}x, \quad \int cu\,\mathrm{d}x = c\int u\,\mathrm{d}x$$

Produktregel $\longrightarrow$ partielle Integration

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$$

Kettenregel $\longrightarrow$ Integration durch Substitution

$x = x(t)$, $f(x) = \tilde{f}(t)$,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \tilde{f}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \tilde{f}(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$$

bzw. falls $f(x) = g(t(x))t'(x)$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(t(x))t'(x)\,\mathrm{d}x = \int g(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int g(t)\,\mathrm{d}t$$

Grundintegrale

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

(d.h. auch $\int \mathrm{d}x = \int x^0\,\mathrm{d}x = x + C$),

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

a) Integrieren Sie folgende Funktion:

$f(x) = x^6 + 5x^4 + 3x^2 + 1$

$$\int x^6 + 5x^4 + 3x^2 + 1 = \frac{x^7}{6} + x^5 + x^3 + x + C$$

b) Berechnen Sie folgende unbestimmte Integral:

$$\int (e^{-x} + e^{-2x})dx$$

$$\int (e^{-x} + e^{-2x})dx = -\int e^{-x}d(-x) - \frac{1}{2}\int e^{-2x}d(-2x) = -e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

c) Berechnen Sie folgende Integral:

$$\int_{-\pi/4}^{5\pi/4} |sinx|dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |sinx|dx = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} sinxdx + \int_{0}^{\pi} sinxdx - \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} sinxdx =$$

$$\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - cos0\right] - [cos\,\pi - cos0] + \left[cos\frac{5\pi}{4} - cos\pi\right] =$$

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (-1-1) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - (-1)\right) = 4 - \sqrt{2}$$

4. Differenzialgleichungen (21.6, 21.35)

a) Lösen Sie die Randwertaufgabe: $y(x)'' = 1, y\,(0) = 1,\; y(1) = 3$

$$y'' = 1 => y' = x + C => y(x) = \frac{x^2}{2} + Cx + D$$

$$y\,(0) = D = 1\,, y(1) = \frac{1}{2} + C + D = 3 => C = \frac{3}{2}$$

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 1$$

b) Lösen Sie mithilfe des Ansatzes $y(x) = Ce^{\lambda x}$ folgenden linearen homogenen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

a) $y' - 2y \;=\; 0,$

$y = Ce^{\lambda x}, y' = \lambda Ce^{\lambda x},$

Einsetzen in Dgl.: $\lambda Ce^{\lambda x} - 2Ce^{\lambda x} = (\lambda - 2)Ce^{\lambda x} = 0 => \;\lambda - 2 = 0 \; oder\; C = 0$

Allgemeine Lösung $\lambda = 2, y(x) = \; Ce^{2x}, C\; beliebig$

b) $y'' - 5y' + 6y \;=\; 0,$

$y = Ce^{\lambda x}, y' = \lambda Ce^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 Ce^{\lambda x}$

Einsetzen in Dgl.: $(\lambda^2 - 5\lambda + 6)Ce^{\lambda x} => \;(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$

$$\lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = 2{,}3$$

Allgemeine Lösung $\lambda = 2{,}3,\; y(x) = \; C_1e^{2x} + C_2e^{3x}, C_1, C_2\; beliebig$

c) $y'' + \omega^2 y \;=\; 0\; (\omega > 0)$!

Einsetzen in Dgl. wie oben: $(\lambda^2 + \omega^2)Ce^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \;\; \lambda^2 = -\omega^2 \Rightarrow \lambda = \pm i\omega$

Allgemeine (komplexe Lösung) der Dgl.: $y(x) = C_1e^{i\omega x} + C_2e^{-i\omega x}, C_1, C_2\; beliebig\; komplex$

Mit der Zerlegung in Real- und Imaginärteil $C_1 = A_1 + iB_1, C_2 = A_2 + iB_2$ erhält man

$$y(x) = A_1cos\omega x - B_1sin\omega x + A_2cos\omega x + B_2sin\omega x$$
$$+i(A_1sin\omega x + B_1cos\omega x - A_2sin\omega x + B_2cos\omega x)$$

Damit dies immer reell wird, muss man $A_1 = A_2\; und\; B_1 = -B_2$ wählen

Dann ergibt sich die allgemeine reelle Lösung der Differenzialgleichung zu

$$y(x) = 2A_1cos\omega x - 2B_1sin\omega x = Dcos\omega x + Esin\omega x$$