

6 Wellen

6.1 Grundlagen

6.1.1 Beispiele und Definition

Als Welle bezeichnet man die Ausbreitung einer Störung in einem kontinuierlichen Medium oder einer räumlich periodischen Struktur.



Abbildung 6.1: Erzeugung einer Welle auf einer Feder.

Als Beispiel zeigt Abb. [6.1](#) wie eine Feder die von Hand ausgelenkt wird. Die Auslenkung läuft der Feder entlang bis zu ihrer Befestigung.

Wellen treten z.B. in Festkörpern auf, wo Atome durch interatomare Kräfte (“Federn”) aneinander gekoppelt sind: jedes Atom kann schwingen, doch sind die Schwingungen voneinander abhängig. Die Störung ist in diesem Fall die Auslenkung der Atome aus ihrer Ruhelage. Da die Atome dabei eine Kraft auf ihre Nachbarn ausüben, wird die Störung auf den Nachbarn übertragen, wie dies im Rahmen der gekoppelten Schwingungen diskutiert wurde. Ein wichtiger Aspekt ist, dass die Atome selber dabei in der Nähe ihres Ausgangspunktes bleiben, die Störung sich aber immer weiter ausbreitet.

Eine bekannte Art von Wellen sind Wasserwellen: hier schwingen Flüssigkeitsteile vertikal, die Störung breitet sich entlang der Flüssigkeitsoberfläche aus. Während in Masse-Feder Systemen klar ist, dass die einzelnen Massen sich nicht fortbewegen ist dies in einem flüssigen- oder gasförmigen System weniger offensichtlich.

Während die Wellen den Eindruck erwecken, dass Wasser entlang der Oberfläche transportiert



Abbildung 6.2: Ball auf Wasseroberfläche bleibt an Ort.

wird, erkennt man durch “Markieren” eines Flüssigkeitsvolumens, z.B. mit Hilfe eines schwimmenden Körpers wie in Abb. [6.2](#), dass die einzelnen Flüssigkeitsteile nur lokale Bewegungen ausführen. In diesem Fall ist es eine nahezu kreisförmige Bewegung. Dies zeigt, dass allgemein bei einer Welle keine Materie transportiert wird. Es wird jedoch Energie übertragen. Dies gilt zum Mindesten für die Arten von Wellen, die hier diskutiert werden. Es gibt natürlich auch Wellen, welche nicht nur Energie sondern auch Materie transportieren. Ein Beispiel ist ein Tsunami: er kann sich über tausende von Kilometern ausbreiten ohne Materie zu transportieren, aber wenn er auf Land trifft, dann wird sehr viel Wasser transportiert.

6.1.2 Ausbreitung von Wellen

Wenn die Wellen auch keine Materie transportieren ist es trotzdem sinnvoll, von der Ausbreitung der Welle zu sprechen. Damit wird die Ausbreitung der Störung, also der Auslenkung bezeichnet. Für die Beschreibung von Wellen vergleicht man zunächst die Orte gleicher Phase, d.h. die Vereinigung aller Elemente, die um den gleichen Betrag ausgelenkt sind.

Diese wird als Wellenfront bezeichnet. Bei den zweidimensionalen Wasserwellen im Beispiel von

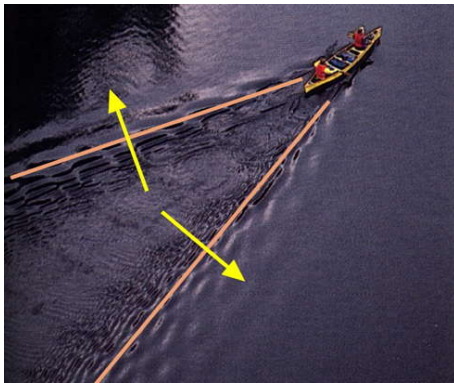


Abbildung 6.3: Wellenfronten einer Bugwelle und Ausbreitungsrichtung \vec{k} senkrecht dazu.

Abb. 6.3 handelt es sich um eine Linie (resp. 2 Linien); bei einer Seilwelle ist die Wellenfront ein Punkt; in einem dreidimensionalen Medium handelt es sich um eine Fläche.

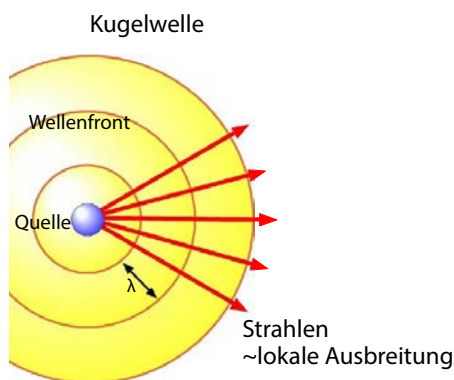


Abbildung 6.4: Kugelwelle.

Die Ausbreitungsrichtung \vec{k} der Welle ist immer senkrecht zur Wellenfront. Bei einer optischen Welle (d.h. Licht) entspricht diese lokale Ausbreitungsrichtung dem Lichtstrahl. Wird die Welle durch eine punktförmige Anregung erzeugt, wie in Abb. 6.4, so sind die Wellenfronten konzentrische Kugelflächen. Man spricht in diesem Fall von einer Kugelwelle. Kugelwellen kann man z.B. in einer Wasserwanne durch periodisches Eintauchen eines Stifts erzeugen.

Ein anderer wichtiger Wellentyp sind ebene Wellen, wie in Abb. 6.5 gezeigt. Hier sind die Wel-

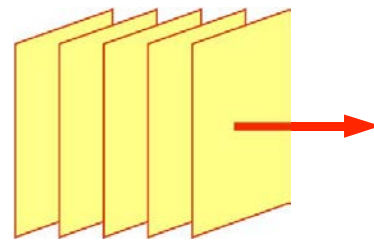


Abbildung 6.5: Wellenfronten einer ebenen Welle.

lenfronten parallele Ebenen. Die Ausbreitungsrichtung, welche senkrecht auf den Phasenflächen steht, ist somit überall die gleiche. Auch für diese Art von Wellen kann man in der Wellenwanne ein zweidimensionales Analogon erzeugen, indem die Wellen mit einem geraden Blech erzeugt werden.

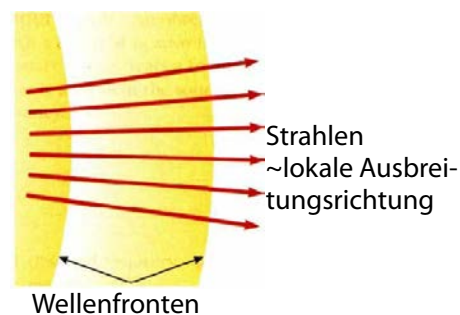


Abbildung 6.6: Lokale Wellenfronten zwischen Kugel- und ebenen Wellen.

Beide, sowohl die Kugelwelle wie auch die ebene Welle sollten als mathematisch einfache Idealisierungen der Wirklichkeit verstanden werden. Es gibt auch viele Fälle, die zwischen diesen Extremfällen liegen. Wie in Abb. 6.6 gezeigt, kann eine Kugelwelle weit vom Ursprung näherungsweise als ebene Welle beschrieben werden.

Wellen findet man in einer, zwei oder drei Dimensionen. In zwei Dimensionen wird z.B. eine Kugelwelle zu einer kreisförmigen Welle. Beispiele dafür sind Wellen auf einer Wasseroberfläche.

6.1.3 Longitudinale und transversale Wellen

Wellen beschreiben immer eine Auslenkung eines Systems aus dem Gleichgewicht als Funktion von Ort und Zeit. Man kann sie somit nach dem Medium klassifizieren, in dem diese Auslenkung stattfindet, oder nach der Art der Auslenkung. Als Medium kommen Gase, Flüssigkeiten, Festkörper, aber auch das Vakuum in Betracht. Elektromagnetische Wellen stellen ein Beispiel dar, bei dem kein Medium benötigt wird: hier beschreibt die Welle die Stärke des elektromagnetischen Feldes als Funktion von Ort und Zeit. Elektromagnetische Wellen umfassen Radiowellen, Licht, Röntgenstrahlen, und Gammastrahlen. Die wichtigsten elektromagnetischen Wellen sind Licht. Diese werden im folgenden Kapitel (7) separat diskutiert.

Das Medium bestimmt unter anderem auch die mögliche Art der Auslenkung. Bei einer Seilwelle ist die Störung eine Auslenkung des Seils, welche sich entlang dem Seil bewegt. Bei einer Oberflächenwelle, wie z.B. Wasserwellen oder bestimmten Arten von seismischen Wellen, ist die Störung die Auslenkung von Volumenelementen aus der Gleichgewichtsoberfläche. Bei Schallwellen ist die Störung eine Druckschwankung. Man unterscheidet Longitudinal- und Transversalwellen, je nachdem ob die Auslenkung in Ausbreitungsrichtung oder senkrecht dazu geschieht.

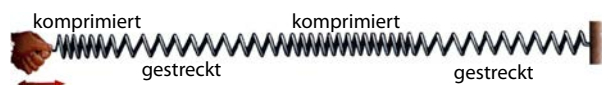


Abbildung 6.7: Longitudinalwelle.

Typische Beispiele von Longitudinalwellen sind Schallwellen: eine Dichteschwankung (wie in Abb. 6.7 in einer Feder) läuft entlang der Ausbreitungsrichtung.

Ein einfaches Beispiel für eine Longitudinalwelle ist das in Abb. 6.8 gezeigte Magnetrollengerät: Die Dichteschwankung kann durch manuelles Anstoßen erzeugt werden, und die Wechselwirkung zwischen den Rollen wird durch die ma-

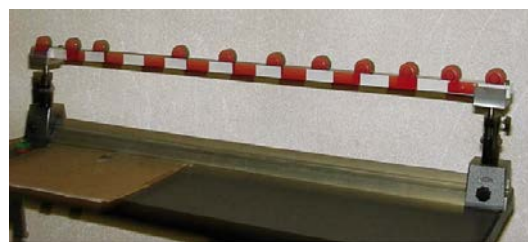


Abbildung 6.8: Magnetrollengerät.

gnetische Abstoßung bestimmt.



Abbildung 6.9: Transversale Federwelle.

Im Fall der Seilwelle oder der Federwelle in Abb. 6.9 findet die Auslenkung senkrecht zur Bewegungsrichtung statt. In diesen Fällen handelt es sich um eine Transversalwelle. Ein weiteres Beispiel sind Oberflächenwellen.

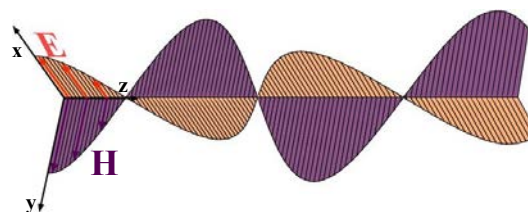


Abbildung 6.10: Elektrisches und magnetisches Feld einer transversalen elektromagnetischen Welle.

Ein wichtiger Unterschied zwischen Longitudinal- und Transversalwellen ist, dass Transversalwellen Polarisierungseffekte zeigen: sie können z.B. horizontal oder vertikal polarisiert sein, oder zirkular. Ein Beispiel für transversale Wellen sind elektromagnetische Wellen (\rightarrow Abb. 6.10). Das elektrische und magnetische Feld stehen senkrecht zueinander und zur Ausbreitungsrichtung. Die beiden Felder zeigen die gleiche räumliche und zeitliche Abhängigkeit.

Eine der wichtigsten Entdeckungen des letzten Jahrhunderts war, dass auch die Konstituen-

ten der Materie, also Elementarteilchen, Atome und Moleküle Welleneigenschaften besitzen. Dies konnte man zunächst für Elektronen zeigen; später auch für Neutronen, Atome, und sogar für Moleküle. Die Wellenlänge dieser Wellen hängt ab von der Masse und der Geschwindigkeit der Teilchen, ist aber meist im Bereich von wenigen Nanometern oder Bruchteilen davon. Details werden in Kapitel 8 diskutiert.

6.1.4 Harmonische Wellen

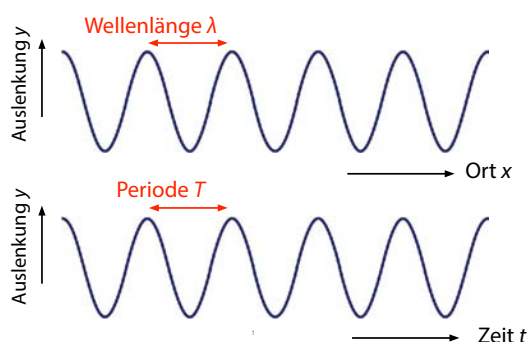


Abbildung 6.11: Harmonische Welle in einer Dimension.

Eine besonders einfache Welle ist eine harmonische Welle in einer Dimension, wie in Abb. 6.11 gezeigt. Sie wird beschrieben durch die Auslenkung

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

mit der Kreisfrequenz ω und der Wellenzahl k . Sie ist periodisch in Zeit und Raum. Im Raum wird die Periode als Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

bezeichnet, in der Zeit als Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

analog zu den Schwingungen.

Die meisten Wellen sind allerdings nicht harmonisch. Abb. 6.12 zeigt einige Beispiele. Diese

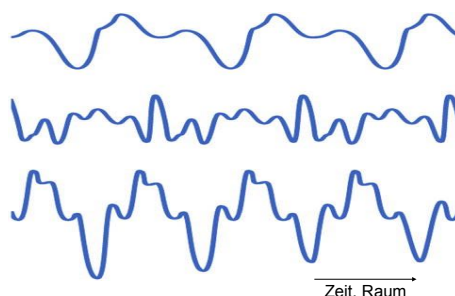


Abbildung 6.12: Beispiele für nicht-harmonische Wellen.

können als Summe von harmonischen Wellen geschrieben werden. Sind die Wellen periodisch, so sind die darin enthaltenen Frequenzen ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz:

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n(\omega t - kx) + \varphi_n).$$

Dies wird als Fourier-Reihe bezeichnet.

6.1.5 Mathematische Beschreibung harmonischer Wellen

Wellen werden mathematisch durch Wellenfunktionen $\Psi(x, t)$ dargestellt, welche die Auslenkung als Funktion von Raum und Zeit beschreiben. Diese muss einer Wellengleichung der Form

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v_p^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

gehören. Hier stellt Ψ die Auslenkung und v_p die Phasengeschwindigkeit der Welle dar. Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine partielle Differentialgleichung: sie verknüpft die partielle Ableitung nach dem Ort mit der partiellen Ableitung nach der Zeit.

In drei Dimensionen lautet die entsprechende Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v_p^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right).$$

Wir beschränken uns hier hauptsächlich auf die Beschreibung harmonischer Wellen, also Wellen

bei denen die Abhängigkeit von Raum und Zeit einer harmonischen Funktion entspricht. Dies ist natürlich immer eine Näherung, da in realen Systemen z.B. die Schwingung sich nie unendlich lange fortsetzt und das Medium nicht unendlich ausgedehnt ist. Trotzdem können viele der Schlussfolgerungen auf reale Systeme übertragen werden.

Eine harmonische Welle in einer Dimension, wie in Abb. 6.11, kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_0 \cos \left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right) \\ &= y_0 \cos (\omega t - kx + \varphi). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Hier bezeichnen y die Auslenkung, x die räumliche und t die zeitliche Koordinate, T die Periode der Welle, λ die Wellenlänge, φ die Phase, ω die Kreisfrequenz und $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl.

Die Verallgemeinerung auf mehrere Dimensionen erhält man, indem man für die Berechnung der Phase die Beiträge für alle drei Koordinaten addiert:

$$y(\vec{r}, t) = y_0 \cos (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi).$$

\vec{k} stellt jetzt den Wellenvektor dar; er steht senkrecht auf den Phasenflächen, in Ausbreitungsrichtung der Welle. Offensichtlich kann man diesen Fall auf den eindimensionalen Fall zurückführen, indem man die x -Achse entlang der Ausbreitungsrichtung wählt. In diesem Fall wird $\vec{k} = (k_x, 0, 0)$ und das Skalarprodukt $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x$ reduziert sich auf einen Term. Dies stimmt mit der Betrachtung der Welle als parallele Phasenflächen überein: Das Problem hängt nicht von den Koordinaten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ab.

Betrachtet man die Auslenkung an einem festen Ort x , so erhält man eine einfache Oszillation (deren Phase von x abhängt):

$$y_x(t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi_x) \quad (6.2)$$

mit

$$\varphi_x = \varphi - kx.$$

Die Phase φ_x ist ortsabhängig, sie wächst in diesem Fall linear mit der Koordinate x .

Die Funktion (6.1) beschreibt eine Welle, die von links nach rechts (also in Richtung positives x) läuft. Eine Welle, die in entgegengesetzter Richtung läuft, kann durch einen negativen Wellenvektor dargestellt werden.

Einsetzen von (6.2) in die Wellengleichung ergibt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y = v_p^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 v_p^2 y.$$

Somit ist die angegebene Form eine Lösung der Wellengleichung für $v_p = \omega/k$.

6.1.6 Lineare Kette

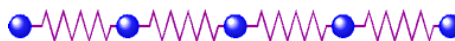


Abbildung 6.13: Modell einer linearen Kette.

Bereits im Kapitel Schwingungen hatten wir ein Modell diskutiert, in dem Massen durch Federn verbunden sind (\rightarrow Abb. 6.13). Diese Schwingungen können sich auch über die Kette ausbreiten, sich also als Wellen fortpflanzen. Dazu erweitern wir das Modell auf eine unendlich lange Kette. Für identische Massen und Federn entlang der Kette lautet die Bewegungsgleichung für eine einzelne Masse an der Stelle s

$$m\ddot{y}_s = -c(2y_s - y_{s-1} - y_{s+1}).$$

Die rechte Seite ist eine diskrete Variante der zweiten Ableitung nach der Raumkoordinate; dies ist somit eine Verallgemeinerung der Wellengleichung und wir erwarten, dass sich in diesem System eine harmonische Welle ausbreiten kann.

Diese müsste in komplexer Schreibweise die Form

$$y(x, t) = y_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad (6.3)$$

aufweisen. Da es sich um ein diskretes System handelt, kann man die Ortskoordinate x durch

den Index s : $x = sa$ ersetzen, wobei a den Abstand zwischen benachbarten Massen im Gleichgewicht bezeichnet. Dann wird

$$y_s(t) = y_0 e^{i(\omega t - ksa)}.$$

Die zweite Ableitung nach der Zeit ist

$$\ddot{y}_s = -\omega^2 y_s. \quad (6.4)$$

Zur Auswertung der rechten Seite verwenden wir

$$e^{i(\omega t - k(s+1)a)} = e^{i(\omega t - ksa)} e^{-ika}.$$

Damit lässt sich die Differenz zur Summe der Auslenkungen der Nachbarn schreiben als

$$m\ddot{y}_s = -c(2y_s - y_{s-1} - y_{s+1}).$$

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_s &= c(2y_s - y_{s-1} - y_{s+1}) \\ &= c y_0 e^{i(\omega t - ksa)} (2 - e^{ika} - e^{-ika}) \\ &= 2cy_s(1 - \cos(ka)). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Die Beschleunigung \ddot{y}_s wird also proportional zur Auslenkung y_s .

6.1.7 Transversalwellen in einer Massenkette

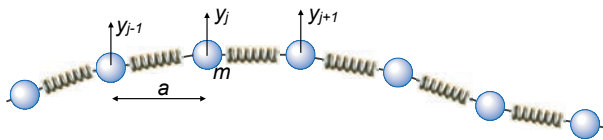


Abbildung 6.14: Transversalwelle auf einer Kette aus Massen und Federn.

Wir betrachten die transversale Auslenkung von Massenpunkten, welche durch Federn verbunden sind, wie in Abb. 6.14 gezeigt. Wir nehmen an, dass die beiden transversalen Koordinaten voneinander und von der longitudinalen Koordinate unabhängig sind, d.h. wir nehmen an dass die Abstände in x -Richtung konstant sind, so dass die potenzielle und kinetische Energie nur durch die y -Verschiebung zustande kommen.

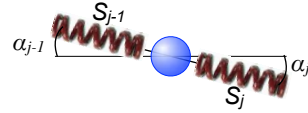


Abbildung 6.15: Gleichgewicht der longitudinalen Kräfte in der Federkette.

Unter dieser Voraussetzung muss die x -Komponente der Kraft im Gleichgewicht sein, d.h. die Kräfte auf benachbarte Segmente stehen im Verhältnis

$$S_{j-1} \cos \alpha_{j-1} = S_j \cos \alpha_j,$$

wobei S_j die Kraft darstellt, welche die Feder j auf ihre Endpunkte ausübt, wie in Abb. 6.15 dargestellt. Für kleine Auslenkungen, d.h. $\alpha \ll 1$, ist

$$\cos \alpha_{j-1} \approx \cos \alpha_j \approx 1,$$

und damit

$$S_{j-1} \approx S_j \approx S$$

d.h. alle longitudinalen Kräfte sind nach Betrag gleich und die Spannung der Kette ist über ihre Länge konstant.

Die transversale Kraft in y -Richtung ist

$$\begin{aligned} F_j &= -S \sin \alpha_{j-1} + S \sin \alpha_j \\ &\approx -\frac{S}{a}(y_j - y_{j-1}) + \frac{S}{a}(y_{j+1} - y_j) \\ &= \frac{S}{a}(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}), \end{aligned} \quad (6.6)$$

wobei y_j die Auslenkung der j 'ten Masse beschreibt. Diese Bewegungsgleichung hat die gleiche Form wie bei den longitudinalen Wellen; lediglich die Kraftkonstante ist nicht mehr die Federkonstante selber. Somit sollte eine Transversalwelle die gleiche Form haben wie eine Longitudinalwelle.

Dies beinhaltet auch die gleiche Dispersionsrelation (\rightarrow Abb. 6.16), d.h. die maximale Frequenz wird erreicht wenn die Wellenlänge dem

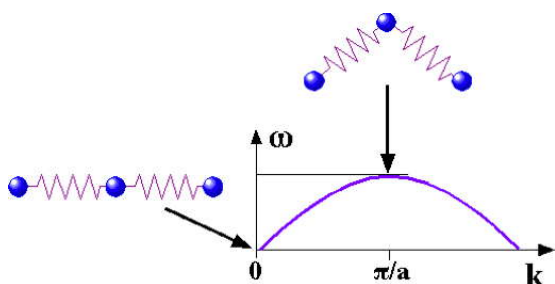


Abbildung 6.16: Auslenkung für unterschiedliche k -Vektoren.

doppelten Abstand zwischen benachbarten Atomen entspricht,

$$k = \frac{\pi}{a} = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = 2a.$$

Die Proportionalitätskonstante zwischen der zweiten Ableitung der Auslenkung und der Kraft ist jedoch nicht die Federkonstante c , sondern der Quotient S/a aus Federkraft und Abstand. Damit wird die Phasengeschwindigkeit einer Transversalwelle abhängig von der Spannung der Kette,

$$\omega = 2\sqrt{\frac{S}{am}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|.$$

6.1.8 Harmonische Longitudinalwelle

Einsetzen von [6.4](#) in die Bewegungsgleichung [\(6.5\)](#) ergibt

$$\ddot{y}_s = -\omega^2 y_s = -2\frac{c}{m}(1 - \cos(ka))y_s.$$

Somit ist der Wellenansatz [\(6.3\)](#) eine Lösung der Bewegungsgleichung wenn

$$\omega^2 = 2\frac{c}{m}(1 - \cos(ka)) = 4\frac{c}{m} \frac{1 - \cos(ka)}{2}.$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Formel

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

kann dies geschrieben werden als

$$\omega = 2\sqrt{\frac{c}{m}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|.$$

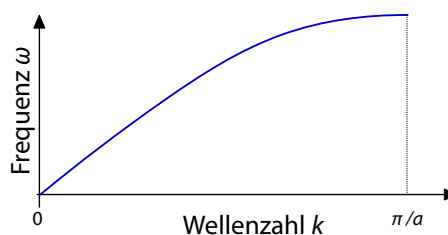


Abbildung 6.17: Dispersionsrelation für die lineare Kette.

Abb. [6.17](#) zeigt das Verhalten für den Bereich $0 \leq k \leq \pi/a$. Für kleine Wellenzahlen, d.h. $ka \ll 1$ oder große Wellenlängen, $\lambda \gg a$ wird die Frequenz proportional zur Wellenzahl

$$\omega \approx \sqrt{\frac{c}{m}} ka.$$

Bei höheren Wellenzahlen (kürzeren Wellenlänge) steigt die Frequenz langsamer und erreicht ihren Maximalwert für $ka = \pi$, also dann wenn benachbarte Massen in Gegenphase schwingen. Für diesen Wert wird die Kraft $c(1 - \cos(ka))y_s$ maximal. Ein noch größerer Wellenvektor ist physikalisch nicht von einem kleineren unterscheidbar. Dieses Verhalten findet man allgemein bei diskreten Gittern.

6.1.9 Phasengeschwindigkeit

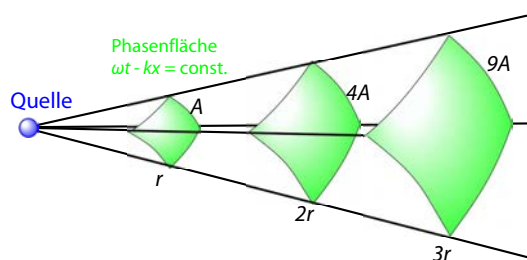


Abbildung 6.18: Phasenflächen in unterschiedlichen Abständen von einer Punktquelle.

Für eine harmonische ebene Welle ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit leicht zu bestimmen. Die Phasengeschwindigkeit v_P gibt an, wie schnell sich die Phase einer Welle, also z.B.

ein Nulldurchgang, ausbreitet. Wenn die Welle durch eine Funktion beschrieben wird, ist ein Zustand konstanter Phase dadurch definiert, dass

$$f(\omega t - kx + \phi) = \text{const.},$$

oder

$$x = \frac{\omega t + \phi - \text{const.}}{k}.$$

Abb. 6.18 zeigt einige solche Phasenflächen.

Die Phasengeschwindigkeit ist nach Definition

$$v_p = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu. \quad (6.7)$$

Im Beispiel von Kapitel 6.1.8 beträgt sie

$$\omega = 2\sqrt{\frac{c}{m}} \left| \frac{\sin \frac{ka}{2}}{k} \right|.$$

Für kleine Wellenzahlen, $ka \ll 1$ gilt somit

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{c}{m}} a.$$

Für größere Wellenzahlen nimmt die Phasengeschwindigkeit ab.

6.1.10 Schallgeschwindigkeit in Wasser

Gleichung 6.7 wird gerne für die Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit verwendet: man misst gleichzeitig die Wellenlänge und die Frequenz.



Abbildung 6.19: Messung der Schallgeschwindigkeit.

Das Experiment in Abb. 6.19 misst die Schallgeschwindigkeit in Wasser, indem ein ‘‘Transducer’’ eine Ultraschallwelle einkoppelt. Die Frequenz dieser Welle beträgt im Experiment 800 kHz. Die Wellenlänge ergibt sich durch die Messung der eintreffenden Schallwelle an unterschiedlichen Orten.

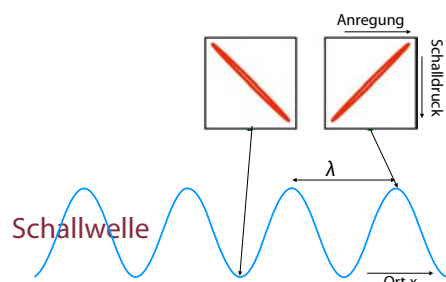


Abbildung 6.20: Messresultate an unterschiedlichen Orten.

Der Schalldruck wird auf dem Oszilloskop gegen die Anregungsspannung aufgetragen, wie in Abb. 6.20. Sind die beiden in Phase, so erhält man eine Gerade mit positiver Steigung. Verschiebt man den Schallaufnehmer um eine halbe Wellenlänge, so sind die beiden Signale um 180 Grad außer Phase und die Gerade hat eine negative Steigung. Abb. 6.20 zeigt eine grafische Darstellung dieses Verhaltens. Im Experiment wurde eine Wellenlänge von 1.86 mm gemessen. Dies entspricht einer Schallgeschwindigkeit

$$v_p = \lambda \nu = 8 \cdot 10^5 \text{s}^{-1} \cdot 1,86 \cdot 10^{-3} \text{m} = 1488 \text{m/s}.$$

Dies ist in guter Übereinstimmung mit dem Literaturwert von 1480 m/s bei 20°C.

6.1.11 Überlagerung von Wellen; Gruppengeschwindigkeit

In linearen Systemen können Wellen sich beliebig überlagern. Dabei entstehen auch interessante neue Phänomene.

Als einfaches Beispiel kann man die Überlagerung von zwei harmonischen Wellen betrachten,

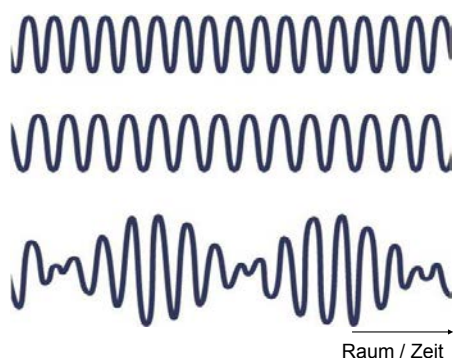


Abbildung 6.21: Überlagerung von 2 harmonischen Wellen und resultierende Schwebung.

wie in Abb. 6.21 gezeigt. Die resultierende Auslenkung ist die Summe

$$y = y_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + y_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x).$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme für harmonische Funktionen kann die Summe geschrieben werden als

$$y = 2y_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right).$$

Dies entspricht einer Welle mit durchschnittlicher Frequenz $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ und Wellenvektor $k = (k_1 + k_2)/2$, welche mit einer Einhüllenden moduliert ist. Diese Einhüllende hat selber eine Frequenz $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ und Wellenvektor $\Delta k = (k_1 - k_2)/2$:

$$y = 2y_0 \cos(\omega t - kx) \cos(\Delta\omega t - \Delta kx).$$

An einer gegebenen Stelle entspricht dies einer Schwebung einer Schwingung. Die Einhüllende ist selber eine Welle und bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

Das Ganze kann erweitert werden auf mehr als 2 sinus-förmige Wellen. Jeder endliche Wellenzug setzt sich aus einer unendlich großen Zahl

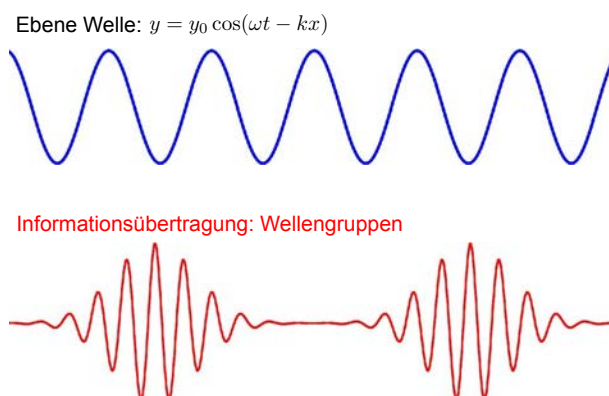


Abbildung 6.22: Harmonische Welle und Wellengruppen.

von sinus-förmigen Wellen zusammen, wie z.B. die Wellengruppen in Abb. 6.22. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der resultierenden Wellengruppe, also der Einhüllenden, ist dann der infinitesimale Grenzwert

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Diese unterscheidet sich von der Phasengeschwindigkeit wenn die Beziehung zwischen Frequenz und Wellenvektor nicht linear ist. Mit Hilfe von $v_p = \omega/k$ kann man die Gruppengeschwindigkeit ausdrücken als

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} v_p k = v_p + k \frac{dv_p}{dk}.$$

Die beiden unterscheiden sich also dann, wenn v_p von der Wellenzahl abhängt. Man bezeichnet dies als Dispersion.

6.2 Akustische Wellen

Die Erzeugung, Ausbreitung und Wahrnehmung von akustischen Signalen wird in der Physik im Wesentlichen über die Theorie von Schwingungen und Wellen beschrieben. Wie in Abb. 6.23 dargestellt, entspricht ein Ton einer monochromatischen Schwingung oder Welle. Ein Klang besteht aus mehreren Tönen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache sind und stellt deshalb selber ein periodisches Signal dar. Ein allgemeines

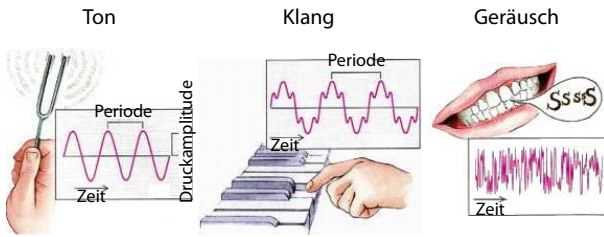


Abbildung 6.23: Akustische Signale als Wellenphänomene.

Geräusch ist nicht periodisch und enthält deshalb sehr viele Frequenzkomponenten.

6.2.1 Wellengleichung für Druck

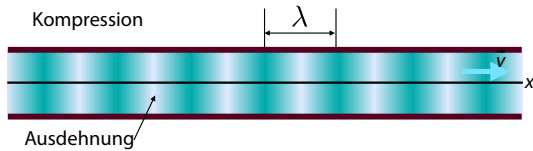


Abbildung 6.24: Druckwelle in einem Rohr.

In der Luft wird Schall durch Druckwellen übertragen, wie schematisch in Abb. 6.24 dargestellt. Die Auslenkung χ ist in diesem Fall eine Ortsänderung der Luftmoleküle oder eine lokale Druckänderung (Kompression). Wir betrachten hier nur ebene Wellen in horizontaler Richtung.

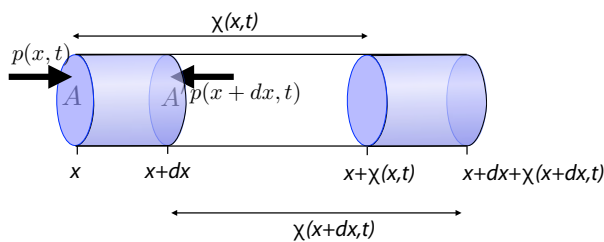


Abbildung 6.25: Verschiebung und Ausdehnung eines Volumenelements.

Als Modell verwenden wir ein Rohr, in dem sich eine harmonische Welle ausbreitet, wie in Abb. 6.25 gezeigt. Die Wände des Rohrs haben dabei keine Bedeutung und tauchen in der Lösung nicht auf. Für die Herleitung der Wellengleichung betrachten wir die Kraft auf ein Volumenelement

$\Delta V = A dx$, wobei A die Querschnittsfläche des Rohrs darstellt. Das Längenelement dx wie auch die Auslenkung χ sollen klein sein im Vergleich zur Wellenlänge λ . Die Kraft auf das Volumenelement kann als Differenz der Normalkräfte auf beiden Seiten berechnet werden:

$$F = A[p(x) - p(x + dx)] = -A \frac{dp}{dx} dx.$$

Die Druckdifferenz dp ist über den Kompressionsmodul K an eine Volumenänderung dV gekoppelt:

$$dp = -K \frac{dV}{\Delta V}.$$

Wir stellen die Auslenkung als eine Verschiebung $\chi(x, t)$ einer (imaginären) Trennwand zwischen benachbarten Volumenelementen dar. Damit kann die Volumenänderung dargestellt werden als Unterschied in der Verschiebung

$$dV = A(\chi(x + dx) - \chi(x)) = A \frac{d\chi}{dx} dx.$$

Mit $\Delta V = A dx$ erhalten wir für die Druckänderung

$$dp = -K \frac{A dx}{A dx} \frac{d\chi}{dx} = -K \frac{d\chi}{dx}$$

und für die Kraft

$$F = AK \frac{d^2\chi}{dx^2} dx.$$

Damit erhalten wir eine Bewegungsgleichung für die Auslenkung χ des Massenelementes $\rho \Delta V$:

$$\rho A dx \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -A \frac{\partial p}{\partial x} dx = AK \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} dx.$$

Division durch $\rho A dx$ ergibt die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}.$$

6.2.2 Schallwellen

Die Schallgeschwindigkeit, d.h. die Geschwindigkeit einer Schallwelle ist somit eine Konstante

für ein gegebenes Medium, unabhängig von der Frequenz und Wellenlänge. Sie beträgt

$$(6.10)$$

$$v_S = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \quad (6.8)$$

Wir überprüfen die Einheiten:

$$\left[\sqrt{\frac{K}{\rho}} \right] = \left[\sqrt{\frac{\text{m}^4 \text{kg}}{\text{m}^2 \text{kg s}^2}} \right] = \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Die Schallgeschwindigkeit hängt stark vom Material ab. Ein hoher Kompressionsmodul (d.h. niedrige Kompressibilität) erhöht die Schallgeschwindigkeit, da eine Störung sich stark auf ein benachbartes Volumenelement auswirkt. Eine geringe Dichte erhöht ebenfalls die Schallgeschwindigkeit, da die Volumenelemente rascher beschleunigt werden. Dies kann man z.B. beim Vergleich unterschiedlicher Gase sehen: Je leichter das Molekulargewicht, desto größer die Schallgeschwindigkeit.

Eine analoge Gleichung kann man für die Änderungen des Druckes herleiten:

$$p(x, t) = p_0 + \Delta p(x, t),$$

An die Druckänderung ist auch eine Dichteänderung gekoppelt; die beiden sind in guter Näherung proportional zueinander:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} = \alpha = \frac{1}{\rho_0 \kappa} = \frac{K}{\rho_0} = v_S^2.$$

Hier ist

$$\kappa = \frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$$

die (adiabatische) Kompressibilität. Damit gilt für kleine Verschiebungen und Dichteschwankungen

$$p(x, t) = p_0 + \Delta p(x, t) = p_0 + \alpha \cdot \Delta \rho(x, t). \quad (6.9)$$

Die einfachsten Lösungen einer Wellengleichung sind ebene Wellen. In diesem Fall entspricht das

$$\chi(x, t) = \chi_0 \sin(\omega t - kx), \quad v_S = v_P = \frac{\omega}{k}.$$

Hier stellen ω die (Kreis-)Frequenz, k die Wellenzahl und v_P die Phasengeschwindigkeit dar.



Abbildung 6.26: Klingel in einem Vakuumbehälter.

Dass Schall wirklich als Druckwelle in Luft übertragen wird sieht man wenn man die Luft entfernt. In Abb. 6.26 wird die Klingel in einem Vakuumgefäß aufbewahrt. Wird daraus die Luft entfernt, ist die Klingel nicht mehr.

6.2.3 Schallimpedanz und Schallschnelle

Die Geschwindigkeit v , mit der sich die Luftmoleküle infolge der Druckschwankungen hin- und herbewegen, ist gegeben als die Ableitung der Auslenkung χ

$$v(x, t) = \frac{\partial \chi}{\partial t} = \omega \chi_0 \cos(\omega t - kx).$$

Man bezeichnet die Amplitude

$$v_0 = \omega \chi_0$$

dieser Geschwindigkeit als **Schallschnelle**. Dieser Beitrag zur gesamten Geschwindigkeit der

Moleküle ist im Allgemeinen wesentlich kleiner als der Anteil der thermischen Bewegung: an der Hörschwelle liegt die Schallschnelle im Bereich von einigen 10 nm/s, die thermische Geschwindigkeit $v_{th} = \sqrt{3k_B T/m}$ bei ≈ 100 m/s.

Die Druckschwankung der Welle ist, wie die Dichteschwankung, gegeben durch die räumliche Ableitung der Auslenkung,

$$\Delta p(x, t) = p_0 \frac{\partial \chi}{\partial x}.$$

Für eine harmonische Welle $\chi(x, t) = \chi_0 \sin(\omega t - kx)$ ist dies

$$\Delta p(x, t) = -p_0 k \chi_0 \cos(\omega t - kx) \quad (6.11)$$

also einer harmonischen Welle mit Amplitude $\Delta p_0 = p_0 k \chi_0$. Damit hat sie die gleiche raumzeitliche Abhängigkeit wie $v(x, t)$. Für ideale Gase ist $K = p$ und damit $v_S = \sqrt{p/\rho}$ und $p = \rho v_S \omega/k$. Einsetzen in (6.11) ergibt

$$\Delta p_0 = p_0 k \chi_0 = \rho_0 \omega v_S \chi_0 = \rho_0 v_0 v_S. \quad (6.12)$$

Das Verhältnis

$$Z := \frac{\Delta p_0}{v_0} = \rho_0 v_S \quad (6.13)$$

der Amplituden Δp_0 (Schalldruck) und v_0 (Schallschnelle) wird als Wellenwiderstand oder Schallimpedanz bezeichnet.

In Luft und Wasser beträgt die Schallimpedanz

$$\begin{aligned} Z_{\text{Luft}} &= 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 430 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}, \\ Z_{\text{Wasser}} &= 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 1460 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,46 \cdot 10^6 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}. \end{aligned}$$

Die Schallimpedanzen der beiden Medien, welche für das Hören am wichtigsten sind, unterscheiden sich somit um einen Faktor

$$\frac{Z_{\text{Wasser}}}{Z_{\text{Luft}}} \approx 3400.$$

6.2.4 Intensität und Lautstärke

Die Energiedichte einer Schallwelle ist gegeben durch die Summe aus kinetischer und Druckenergie,

$$w = w_{kin} + w_{elast}.$$

Die kinetische Energiedichte ist

$$w_{kin} = \frac{\rho v^2}{2}.$$

Für die Herleitung der elastischen Energie verwendet man die Definition des Kompressionsmoduls

$$dp = -K \frac{dV}{\Delta V}.$$

Hier ist dp die Druckänderung durch die Schallwelle und ΔV das betrachtete Volumen. Damit ist die Änderung der elastischen Energie des Volumens ΔV bei einer Erhöhung des Drucks

$$dw_{elast} = \frac{d\mathcal{E}_p}{\Delta V} = -\frac{p dV}{\Delta V} = \frac{1}{K} p dp.$$

Integration ergibt die elastische Energie pro Volumen

$$w_{elast} = \frac{1}{2} \frac{1}{K} p^2.$$

Für eine Schallwelle wird dies

$$w_{elast} = \frac{1}{2} \frac{1}{K} \rho^2 \chi_0^2 \frac{\omega^4}{k^2} \sin^2(\omega t - kx).$$

Mit

$$\frac{\omega^2}{k^2} = v_p^2 = \frac{K}{\rho}$$

kann dies geschrieben werden als

$$w_{elast} = \frac{1}{2} \rho \chi_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx).$$

Ein Vergleich mit der kinetischen Energiedichte

$$w_{kin} = \frac{1}{2} \rho \chi_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

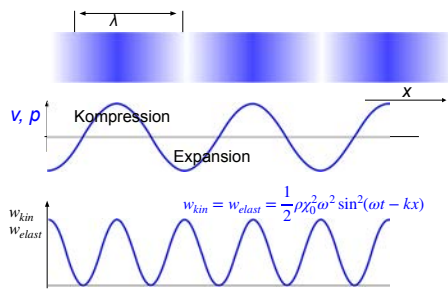


Abbildung 6.27: Räumliche Verteilung der Energiedichte in einer akustischen Welle.

zeigt, dass sie identisch sind,

$$w_{elast} = w_{kin}.$$

Abb. 6.27 zeigt die räumliche Verteilung der Energiedichte in einer akustischen Welle. Die gesamte Energiedichte ist

$$w = w_{kin} + w_{elast} = \rho \chi_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx).$$

Die Energie ist somit sinusförmig entlang der Welle verteilt, wobei die Periode der halben Wellenlänge entspricht, da Expansion und Kompression den gleichen Beitrag zur Energie liefern. Die Energiedichte einer mechanischen Welle ist proportional zum Quadrat der maximalen Geschwindigkeit $\chi_0 \omega$ der Elemente. Gemittelt über eine Periode erhält man

$$\bar{w} = \frac{\rho}{2} \chi_0^2 \omega^2.$$

Daraus ergibt sich die Intensität als Produkt aus Energiedichte und Ausbreitungsgeschwindigkeit,

$$I = v_S \bar{w} = v_S \frac{\rho}{2} \chi_0^2 \omega^2.$$

Mit Hilfe der Gleichungen 6.12 und 6.13 kann dies auch geschrieben werden als

$$I = \frac{\Delta \mathcal{E}}{A \Delta t} = v_S \bar{w} = \frac{1}{2} \frac{\Delta p_0^2}{\rho_0 c} = \frac{1}{2} \frac{\Delta p_0^2}{Z}.$$

Der Schalldruck (die Amplitude Δp_0) und die Frequenz der Schallschwingung entscheiden, ob und wie laut wir einen Ton wahrnehmen. Der

Frequenzbereich des menschlichen Gehörs reicht von etwa 16 Hz bis rund 20 kHz, wobei die Grenzen nicht scharf sind und individuell variieren. Schwingungen mit großem Schalldruck bewirken Hörempfindungen größerer Lautstärke als Schwingungen mit geringem Schalldruck. Von dem leisesten noch wahrnehmbaren 2 kHz-Ton bis zur Schmerzgrenze erstreckt sich der Bereich von 20 μPa bis zu 20 Pa (Effektivwerte).

An der Hörschwelle (20 μPa) beträgt die Intensität

$$I_0 = \frac{1}{2} \frac{(2 \cdot 10^{-5})^2}{430} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \approx 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

An der Schmerzschwelle sind es etwa 12 Größenordnungen mehr, also $I_{max} \approx 1 \text{ W/m}^2$. Aus Gleichung (??) erhält man die Schallschnelle an der Hörgrenze zu

$$v_0 = \frac{\Delta p_0}{\rho_0 c} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \text{ m}}{1,2 \cdot 340 \text{ s}} \approx 5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Bei einer Frequenz von 1 kHz entspricht dies einer Auslenkung von

$$\chi_0 = \frac{v_0}{\omega} \approx 10^{-11} \text{ m},$$

also weniger als einem Atomdurchmesser (siehe 6.2.7).

6.2.5 Das Ohr als Schallwandler

Im menschlichen Ohr werden Schallwellen in Nervenimpulse umgewandelt, welche schließlich im Gehirn eine Wahrnehmung erzeugen und weiter verarbeitet werden (z.B. im Sprachzentrum). Abb. 6.28 gibt einen groben Überblick über den Aufbau des Ohrs.

Zum äußeren Ohr gehört die Ohrmuschel, sowie der etwa 3 cm lange äußere Gehörgang mit dem Trommelfell als Abschluss. Dieses trennt das äußere Ohr vom Mittelohr. Die Schalleitung erfolgt über das Trommelfell und die drei Gehörknöchelchen (Hammer, Amboss und Steigbügel) bis zum **ovalen Fenster**. An diesem ovalen Fenster beginnt das Innenohr. Es ist in Knochen eingebettet und besteht aus der Cochlea (Schnecke) und

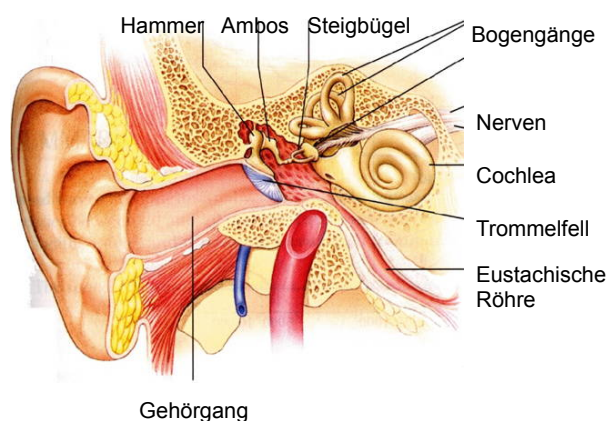


Abbildung 6.28: Aufbau des menschlichen Ohrs.

den Bogengängen, welche das Gleichgewichtsorgan enthalten. Es liegt nahe beim Gehirn und ist durch die Einbettung in Knochen gut von störenden Einflüssen isoliert, wie z.B. Bewegungen von Muskeln.

Die Hohlräume im Knochen sind mit einer Flüssigkeit gefüllt (Perilymphe); Gehör- und Gleichgewichtsorgan befinden sich darin eingelagert im häutigen Labyrinth. Dieses ist mit einer etwas anderen Flüssigkeit gefüllt, welche als Endolymphe bezeichnet wird. Die Schnecke ist etwa 3 cm lang, hat ungefähr 2,5 Windungen und verjüngt sich zu ihrem Ende hin. Die Schnecke wird in 3 verschiedene Räume unterteilt, welche durch Membranen getrennt sind: die Vorhoftreppe, die am ovalen Fenster beginnt und bis zur Schneckenspitze läuft. Dort schließt sich die Paukentreppe an, die sich am anderen Ende bis zum runden Fenster erstreckt.

Das äußere Ohr dient der Schallverstärkung und der richtungsabhängigen Filterung einlaufender Schallwellen. Im Mittelohr findet eine Impedanzanpassung statt, von Luft zur Perilymphe (\approx Wasser). Das Innenohr nimmt eine Frequenz- und Amplitudenanalyse der Schallwellen vor. Die Hörnerven kodieren die akustische Information, und im Cortex (Hirnrinde) findet die Spracherkennung statt.

6.2.6 Physiologische Lautstärken-Skala

Das menschliche Ohr ist gegenüber demjenigen von Reptilien stark verbessert: während wir Töne mit Frequenzen von bis zu 20 kHz hören können, liegt die Grenze bei Reptilien bei etwa 2 kHz. Seine Empfindlichkeit liegt nahe beim theoretischen Maximum.

Schalldruck / Pa Schallpegel / dB SPL

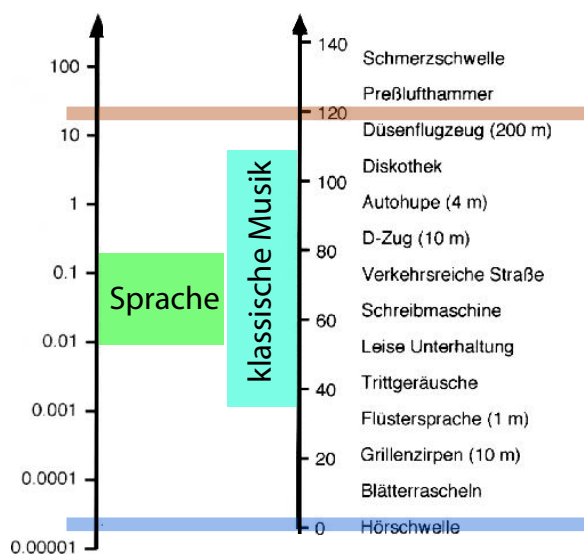


Abbildung 6.29: Schalldruck und Schallpegel für verschiedene Geräusche.

Das Gehör nimmt den Schalldruck in etwa logarithmisch wahr. Deswegen, und weil die akustisch wahrnehmbaren Schalldrücke 6 Zehnerpotenzen umfassen, wird eine **logarithmische Schalldruckskala** verwendet. Abb. 6.29 gibt einen Überblick über typische Lautstärken. Um den Schalldruck dimensionslos zu machen, wird ein **Referenzdruck** benötigt. Die Definition des **Schallpegels** L lautet:

$$L = 20 \cdot \log \left(\frac{\Delta p}{\Delta p_0} \right) \text{ dB} = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_0} \right).$$

Wenn man als Bezugsgröße die Wahrnehmungsgrenze des menschlichen Gehörs nimmt, dann ist $\Delta p_0 / \sqrt{2} = 20 \mu\text{Pa}$ ($I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$). Die so berechneten Schallwerte werden mit **dB SPL** (Sound Pressure Level) bezeichnet.

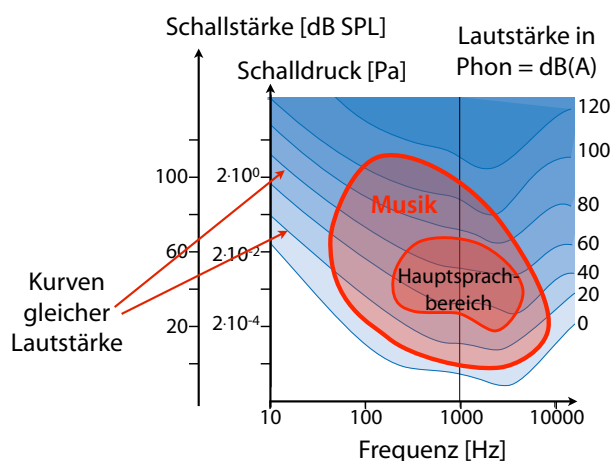


Abbildung 6.30: Kurven gleicher Lautstärke. Bei 1 kHz stimmen dB SPL-Skala und Phon- oder dB(A)-Skala überein.

Diese physikalische Definition ist in der Audiologie und Akustik üblich. Sie berücksichtigt jedoch nicht den physiologischen Lautstärkeindruck, welcher auch von der Frequenz abhängt. Dafür verwendet man ein anderes Maß: das **Phon** oder **dB(A)**. Geräusche mit dem gleichen dB(A) Wert werden subjektiv als gleich laut empfunden. Bei einer Frequenz von 1 kHz stimmt die dB(A)-Skala per definitionem mit der dB SPL-Skala überein. Für andere Frequenzen werden zur Umrechnung Frequenz-Bewertungskurven verwendet, das sind Kurven gleicher Lautstärke, wie in Abb. 6.30 gezeigt.

6.2.7 Empfindlichkeitsgrenze

Die Detektionsschwelle von 0 dB entspricht einer Intensität von $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Das Trommelfell hat eine Fläche von $\approx 0,5 \text{ cm}^2$, so dass die gesamte aufgenommene Leistung bei etwa $P_{\min} = 0,5 \cdot 10^{-16} \text{ W}$ liegt.

Man kann dies vergleichen mit der thermischen Leistung auf Grund der Brown'schen Bewegung. Die thermische Energie pro Freiheitsgrad beträgt

$$k_B T = 1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \text{ J} = 4,2 \cdot 10^{-21} \text{ J}.$$

Bei einer Bandbreite des Ohrs von $\Delta\nu = 20 \text{ kHz}$

ist die thermische Leistung demnach

$$k_B T \Delta\nu = 4,2 \cdot 10^{-21} \text{ J} \cdot 20000 \text{ s}^{-1} \approx 10^{-16} \text{ W}.$$

Die aufgenommene Leistung einer Schallwelle an der Hörgrenze entspricht somit in etwa der thermischen Leistung. Somit arbeitet das menschliche Ohr nahe bei der physikalischen Grenze für die Empfindlichkeit.

Außerdem kann man die entsprechende Auslenkung berechnen, aus der Beziehung zwischen Schallschnelle v_0 und Druckamplitude Δp_0 :

$$v_0 = \omega \chi_0 = \frac{\Delta p_0}{Z} = \frac{\Delta p_0}{\rho_0 c}.$$

Auflösen nach der Auslenkungsamplitude χ_0 gibt

$$\chi_0 = \frac{\Delta p_0}{\omega \rho_0 c}.$$

Für eine Schallwelle an der Hörgrenze, d.h. mit $\Delta p_0 = 20 \mu\text{Pa}$ und einer Frequenz von 1 kHz erhält man

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \frac{2 \cdot 10^{-5}}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 300} \text{ m} \approx \frac{2 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^6} \text{ m} \\ &= 10^{-11} \text{ m} = 10 \text{ pm}. \end{aligned}$$

Die Auslenkung an der Detektionsschwelle ist also weniger als ein Atomdurchmesser.

6.3 Mechanische Wellen

Wellen können sich in jedem mechanischen System ausbreiten, sowohl in einer Dimension (Seilwelle), in zwei Dimensionen (Oberflächen oder Membranen) oder in drei Dimensionen (Gase, siehe z.B. Kap. 6.2), Flüssigkeiten oder Festkörpern.

6.3.1 Seilwellen

Ein Beispiel einer eindimensionalen Welle wurde in Kapitel 6.1.6 behandelt, mit der Federkette. Diesem System sehr ähnlich sind Seilwellen. Ein Seil kann als Grenzfall der Federkette betrachtet

werden, bei dem die Massen direkt aneinander gekoppelt sind. Man erhält damit einen kontinuierlichen Grenzfall, wobei nur noch die Transversalwelle relevant ist, also die seitliche Auslenkung. Die Spannkraft des Seils ist konstant und überall gleich groß.

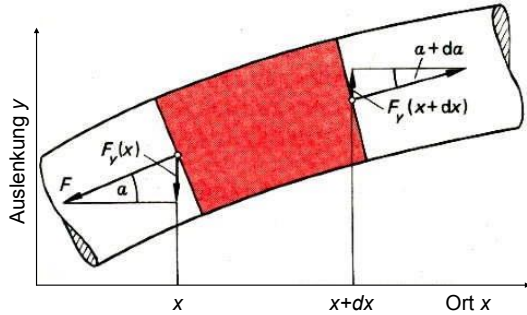


Abbildung 6.31: Kräfte auf ein Seilstück.

Für die Beschreibung von Seilwellen betrachten wir ein Volumenelement zwischen den Positionen x und $x+dx$, wie den in Abb. 6.31 rot markierten Bereich. Hier beschreibt x die Koordinate entlang der Saite, $y(x)$ die Auslenkung. An beiden Endflächen greifen Kräfte an, welche senkrecht auf die Endflächen wirken. Ihre Richtung wird parametrisiert durch den Winkel

$$\alpha(x) = \tan^{-1} \frac{dy}{dx} \approx \frac{dy}{dx}.$$

Die Näherung ist gültig für kleine Auslenkungen, wo

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{dy}{dx}, \quad \cos \alpha \approx 1.$$

Der Betrag der beiden Kräfte ist gegeben durch die Saitenspannung und damit gleich,

$$|F(x)| = |F(x+dx)| = F.$$

Die y -Komponenten der Kräfte an beiden Enden des Volumenelementes addieren sich zu

$$\begin{aligned} dF_y &= F_y(x) + F_y(x+dx) \\ &= F[\sin \alpha(x+dx) - \sin \alpha(x)] \end{aligned}$$

und damit

$$dF_y = F \frac{d \sin \alpha}{dx} dx \approx F \frac{d^2 y}{dx^2} dx.$$

Dies ist die infinitesimale Form von Gleichung (6.6). Diese resultierende Kraft wirkt als Rückstellkraft auf das Massenelement $dm = \rho A dx$, wobei ρ die Dichte und A den Querschnitt der Saite darstellen. Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$dm a = \rho A dx \frac{d^2 y}{dt^2} = F \frac{d^2 y}{dx^2} dx$$

oder

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{F}{\rho A} \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Dies ist die Differentialgleichung, welche die Ausbreitung der Welle auf einer gespannten Saite beschreibt. Die Phasengeschwindigkeit beträgt somit

$$v_p = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}, \tag{6.14}$$

d.h. sie ist proportional zum Verhältnis von Spannung des Seils zur Massendichte ρA pro Längeneinheit. Dicke, schwach gespannte Seile oder Saiten ergeben somit niedrige Frequenzen, leichte, stark gespannte eine hohe Frequenz. Die Abhängigkeit von der Spannung der Saite kann wieder leicht verstanden werden da ohne Spannung keine rücktreibende Kraft existiert. Die Abhängigkeit von der Massendichte (pro Länge) ist die gleiche wie bei allen Arten von Materiewellen, die wir bisher diskutiert hatten.

6.3.2 Druckwellen in Flüssigkeiten und Festkörpern

Druckwellen findet man nicht nur in Gasen sondern auch in Flüssigkeiten und Festkörpern. Ein formaler Unterschied zwischen kondensierten Materialien und Gasen ist, dass hier die Beziehung zwischen Volumenänderung und Normalspannung über den Elastizitätsmodul E definiert ist:

$$\sigma = -E \frac{d\chi}{dx}.$$

Damit wird die Wellengleichung

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = \frac{E}{\rho} \frac{d^2\chi}{dx^2}.$$

und die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6.15)$$

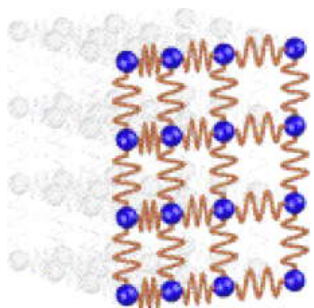


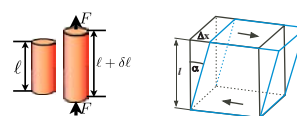
Abbildung 6.32: Federmodell eines Festkörpers.

Festkörper unterscheiden sich von Flüssigkeiten und Gasen im Wesentlichen durch ihr Formgedächtnis. Dies bedeutet, dass hier auch eine Scherspannung existieren kann, also eine rücktreibende Kraft parallel zu einer Ebene. Abb. 6.32 zeigt ein Federmodell eines Festkörpers, welcher die unterschiedlichen rücktreibenden Kräfte plausibel macht: bei einer lateralen Auslenkung eines Volumenelements wirkt eine rücktreibende Kraft und eine Kopplung an das benachbarte Volumenelement. Solche Störungen breiten sich als Transversalwellen aus; ihre Phasengeschwindigkeit ist gegeben durch das Verhältnis von Schubmodul G zu Dichte,

$$v_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Sie unterscheidet sich somit von der Ausbreitungsgeschwindigkeit (6.15) der Longitudinalwellen um den Faktor $\sqrt{E/G}$.

Wie in Abb. 6.33 gezeigt, ist der Elastizitätsmodul E immer größer als das Schermodul G . Dementsprechend haben longitudinale Druckwellen eine höhere Ausbreitungsgeschwindigkeit als transversale Scherwellen.



Material	Elastizitätsmodul		Schubmodul	
	E / GPa	G/GPa		
Eis	9.1	3.9		
Granit	55	30		
Al	71	26		
Stahl	206	80.4		
Diamant	1100	478		

Abbildung 6.33: Elastische Konstanten in unterschiedlichen Materialien.

Die Phasengeschwindigkeit in einem Material ist um so höher je starrer das Material und je geringer die Dichte ist. Am größten sollte die Ausbreitungsgeschwindigkeit somit in steifen, leichten Materialien sein. Umgekehrt können wir die Messung der Schallgeschwindigkeit als eine direkte Messung der Kompressibilität, resp. des Kompressionsmoduls betrachten.

	Dichte [kg/m ³]	v_s [m/s]
Luft	1.2	344
CO ₂	1.98	266
Wasserstoff	0.09	1260
Wasserdampf	0.54	450
Wasser	1000	1400
Eis	920	3200
Stahl	7700	5050
Glas	2500	5300
Diamant	3520	18000

Tabelle 6.1: Schallgeschwindigkeiten in unterschiedlichen Stoffen.

Tabelle 6.1 vergleicht die Dichte und die Schallgeschwindigkeit für unterschiedliche Stoffe. Bei Gasen findet man Schallgeschwindigkeiten im Bereich von etwa 250-450 m/s, außer bei Wasserstoff, der eine sehr geringe Dichte aufweist. In Flüssigkeiten ist die Schallgeschwindigkeit um 1500 m/s. Dies ist bemerkenswert, da sowohl die Dichte, wie auch die Komprimierbarkeit sich um rund drei Größenordnungen unterscheiden. Da

jedoch nur das Verhältnis eingeht, kompensieren sie sich. Bei Festkörpern ist die Dichte etwas höher als in Flüssigkeiten, aber die Steifigkeit sehr viel höher. Darum werden hier die Schallgeschwindigkeiten maximal. Der Extremwert wird erreicht in Diamant, das für einen Festkörper relativ leicht ist, gleichzeitig ist es eines der härtesten Materialien überhaupt.

6.3.3 Seismische Wellen

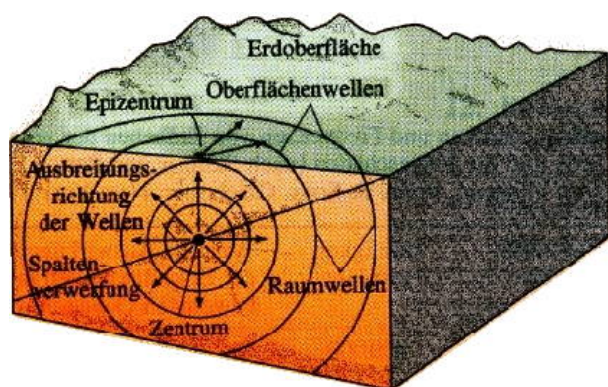


Abbildung 6.34: Ausbreitung von Erdbebenwellen.

Sowohl longitudinale Druck- als auch transversale Scherwellen spielen bei Erdbeben eine Rolle. Die so genannten P- (Primär-) und S- (Sekundär-) Wellen breiten sich im Volumen aus. Wie in Abb. 6.34 gezeigt, findet man außerdem Wellen, die sich nur entlang der Oberfläche ausbreiten.

Auch bei Gestein ist der Elastizitätsmodul größer als der Schermodul und dementsprechend ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Longitudinalwellen größer als die von Scherwellen. Deshalb treffen die Longitudinalwellen jeweils zuerst bei einer Messstation ein. Sie werden deshalb als Primärwellen bezeichnet, während die später eintreffenden Sekundärwellen Scherwellen sind. Abb. 6.35 zeigt die Laufzeiten dieser Wellentypen als Funktion der Entfernung. Die Zerstörungskraft von S-Wellen ist größer als die von P-Wellen. Die P-Wellen können deshalb als (kurzzeitige) Vorwarnung vor den S-Wellen genutzt werden.

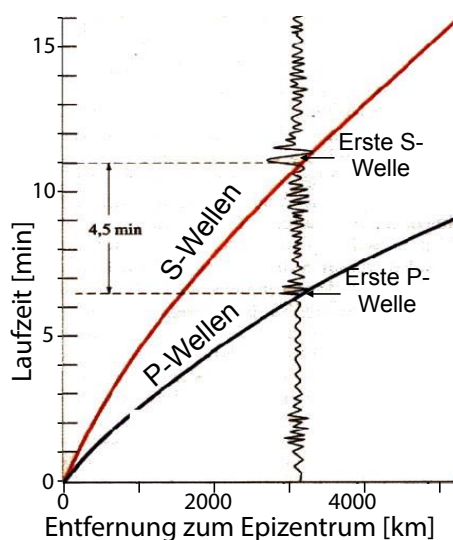


Abbildung 6.35: Laufzeit gegen Distanz von unterschiedlichen Erdbebenwellen.

Neben den P- und S-Wellen gibt es auch Torsionswellen, welche sich an der Oberfläche ausbreiten und als Love-Wellen bezeichnet werden. Rayleigh-Wellen sind ebenfalls Oberflächenwellen, sie gleichen aber Meereswellen.

6.3.4 Wellen in 2D und 3D

Zweidimensionale Systeme wie Oberflächen und Membranen (z.B. Trommeln) zeigen eine Reihe von interessanten Wellenphänomenen. Man findet hier ebene Wellen, wie z.B. die Wellen, welche am Meer auf den Strand treffen, oder Kugelwellen, wenn ein Stein ins Wasser geworfen wird.

Bei Membranen werden die Lösungsfunktionen, also die entstehenden Wellen unter anderem durch die Randbedingungen bestimmt. Stehwellen kann man sichtbar machen, z.B. indem man ein Pulver darauf streut. Wird die Membran zu Schwingungen angeregt, sammelt sich das Pulver in den Knoten der Welle.

Die Knotenlinien können sichtbar gemacht werden, indem man die Membran mit einem Pulver bestreut. Wie in Abb. 6.36 gezeigt, bleibt das Pulver in den Knotenlinien liegen, an allen anderen Punkten wird es durch die Schwingungen



Abbildung 6.36: Beispiel einer Chladni'schen Klangfigur.

aufgeworfen. Die einzelnen Moden können entweder durch die geeignete Frequenz angeregt werden, wenn man eine harmonische Welle verwendet, oder mit Hilfe eines Bogens, indem man an der geeigneten Stelle über den Rand streicht.

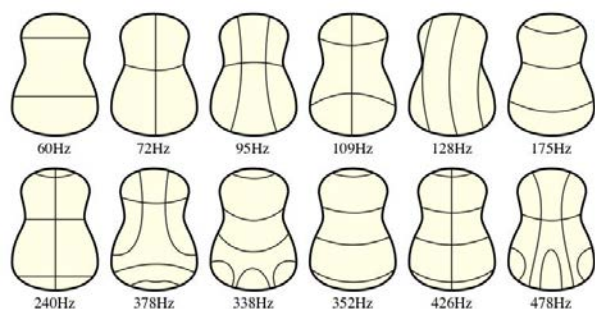


Abbildung 6.37: Knotenlinien auf einem Gitarrenboden.

Vergleichbare Knotenlinien findet man auf allen Arten von schwingenden zweidimensionalen Systemen, wie z.B. den Resonanzkörpern von Musikinstrumenten. Abb. 6.37 zeigt die gerechneten Knotenlinien für einen Gitarrenboden, Abb. 6.38 die gemessenen Knotenlinien für ein Trommelfell. Wie bei der rechteckigen Platte kann man auch bei kreisförmigen Platten die Knotenlinien der Eigenmoden sichtbar machen, indem man sie mit Sand bestreut.

Beispiele wie die in Abb. 6.38 gezeigten Bildern werden in unterschiedlichen Systemen genutzt, um die Lösungen sichtbar zu machen.



Abbildung 6.38: 6 unterschiedliche Moden als Chladni'sche Klangfiguren [aus Spektrum der Wissenschaft].

In 3 Dimensionen lautet die Wellengleichung

$$\Delta A(\vec{r}, t) - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 A(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Die einfachsten Lösungen sind ebene Wellen

$$A(\vec{r}, t) = A_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

mit dem Wellenvektor

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}.$$

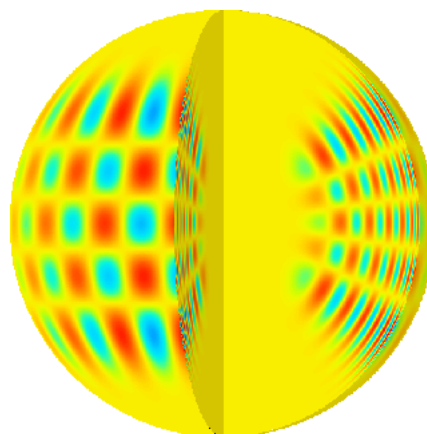


Abbildung 6.39: Akustische Mode in der Sonne.

Abb. 6.39 zeigt als Beispiel eine akustische Mode in der Sonne. Solche Schwingungen können in der Astronomie gemessen werden. Aus den gemessenen Schwingungsfrequenzen kann man Informationen über das Innere der Sonne erhalten.

6.3.5 Oberflächenwellen von Flüssigkeiten

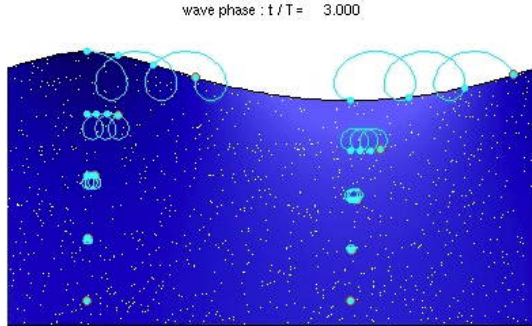


Abbildung 6.40: Wasserwelle im Querschnitt.

Die Wellen auf der Oberfläche von Seen und Meeren (→6.40) sind vielleicht das bekannteste Wellen-Phänomen. Die Auslenkung der Oberfläche aus der Ruhelage erhöht die potenzielle Energie. Dem wirkt die Schwerkraft entgegen. Diese Art der Wellen wird deshalb als Schwerewellen bezeichnet, im Gegensatz zu den Kapillarwellen, bei denen die rücktreibende Kraft durch die Oberflächenspannung zustande kommt.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit (sowohl Phasen- wie auch Gruppengeschwindigkeit) sind von der Wassertiefe abhängig. Die Phasengeschwindigkeit beträgt

$$v_P = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L}},$$

mit g als Schwerebeschleunigung, L als Wellenlänge und d als Wassertiefe. Dieser Ausdruck kann für große Wassertiefen, $d \gg L$ genähert werden als

$$v_{P,t} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}.$$

Für geringe Tiefen ($d < L/20$) spricht man von Flachwasserwellen. Hier gilt näherungsweise

$$v_{P,f} = \sqrt{gd}.$$

Dazu gehören z.B. Tsunamis, welche Wellenlängen von 100-500 km aufweisen. Für große Wassertiefen kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit

deshalb sehr hoch sein. So wurden bei Tsunamis Ausbreitungsgeschwindigkeiten von bis zu 1000 km/h gemessen.

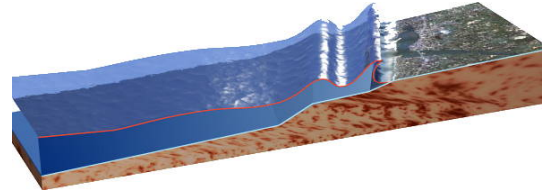


Abbildung 6.41: Tsunami.

Ein extremes Beispiel von effizientem Energie-transport durch eine Transversalwelle sind Tsunamis. Auf offenem Meer wird die Energie, welche meist aus einem Erdbeben stammt, durch eine Oberflächenwelle mit langen Wellenlängen übertragen. Wenn diese Welle auf Land trifft, ändern sich jedoch die Randbedingungen, wie in Abb. 6.41 dargestellt. Dadurch wird die Oberflächenwelle umgewandelt und es kommt auch zu Massetransport von Wasser ins Inland.

6.3.6 Übersicht Phasengeschwindigkeiten

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer harmonischen Welle wird bestimmt durch die Wellengleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = v_p^2 \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Die Phasengeschwindigkeit beträgt für Druckwellen in Gasen und Flüssigkeiten

$$v_p = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

mit K : Kompressionsmodul; ρ : Dichte.

Longitudinalwellen in Festkörpern

$$v_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

mit E : Elastizitätsmodul.

Torsionswellen in dünnen Rundstäben

$$v_p = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

mit G : Schubmodul.

Seilwellen

$$v_p = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

mit F Zugkraft, ρ Dichte und A Querschnitt des Seils.

6.4 Ausbreitungseffekte

In Kapitel [6.1.2](#) wurden die wichtigsten Grundlagen zur Ausbreitung von Wellen im freien Raum zusammengefasst. Hier werden zwei weitere Aspekte diskutiert: was geschieht wenn die Eigenschaften des Mediums sich ändern, in dem sich die Welle ausbreitet und was geschieht wenn die Quelle oder der Empfänger der Welle sich gegenüber dem Medium bewegen.

6.4.1 Reflexion und Transmission

Ändert sich ein Parameter des Mediums, wie z.B. Schallgeschwindigkeit oder Schallimpedanz, so führt dies zu Reflexionen: Ein Teil der Welle ändert ihre Richtung. Der einfachste Fall ist der einer vollständigen Reflexion einer eindimensionalen Welle, z.B. wenn eine Seilwelle an einem Fixpunkt reflektiert wird. Das gleiche gilt für andere Arten von Wellen, wie z.B. Schallwellen.

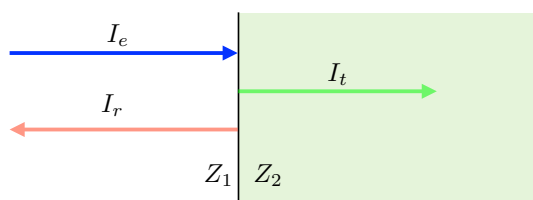


Abbildung 6.42: Reflexion einer Welle an einer Grenzfläche.

Abb. [6.42](#) zeigt einen etwas allgemeineren Fall: Eine Schallwelle bewegt sich im Gebiet 1 mit Dichte ρ_1 , Schallgeschwindigkeit c_1 und Schallimpedanz $Z_1 = \rho_1 c_1$ und trifft auf eine Grenzfläche zum Gebiet 2 (ρ_2, c_2) mit Wellenimpedanz $Z_2 = \rho_2 c_2$. Für jede Art von Wellen findet man in einem solchen Fall, dass ein Teil der Welle reflektiert wird.

Für den einfachsten Fall nimmt man an, dass das System sich linear verhält, dass also eine Proportionalität zwischen einfallender, reflektierter und transmittierter Welle besteht. Außerdem nehmen wir an, dass die Welle senkrecht auf die Grenzfläche einfällt. Dann kann man und die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten aus der Energieerhaltung berechnen: Die auf die Grenzfläche einfallende Energie wird entweder transmittiert oder reflektiert. Somit gilt für die Intensitäten I der drei beteiligten Wellen das Erhaltungsgesetz

$$I_e = I_r + I_t.$$

Im Fall einer Schallwelle ist die Intensität $I = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 \chi^2 c = \frac{1}{2} Z \omega^2 \chi^2$. Die Frequenz ist für alle Wellen die gleiche. Damit wird die Energieerhaltungsgleichung zu

$$Z_1 \chi_{e0}^2 = Z_1 \chi_{r0}^2 + Z_2 \chi_{t0}^2.$$

Hier stellen χ_{e0} , χ_{r0} und χ_{t0} die Amplituden der drei Wellen dar. Außerdem muss für die Auslenkung der Wellen die Stetigkeitsbedingung

$$\chi_e(0) + \chi_r(0) = \chi_t(0)$$

an der Grenzfläche erfüllt sein: die Auslenkung an der Grenzfläche ist unabhängig davon ob sie für das Medium 1 oder 2 berechnet wird. Damit erhält man ein quadratisches Gleichungssystem mit zwei Gleichungen für die beiden Amplituden χ_{r0} und χ_{t0} . Lösen des Gleichungssystems ergibt die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten:

$$\frac{\chi_{r0}}{\chi_{e0}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad \frac{\chi_{t0}}{\chi_{e0}} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

Die physikalische Ursache für die Reflexion ist somit, dass mit nur einer Welle nicht Energieerhaltung und Stetigkeit gleichzeitig erfüllt sein können.

6.4.2 Grenzfälle : keine Transmission

Wir betrachten die beiden Grenzfälle $Z_2 = 0$ und $Z_2 = \infty$. In beiden Fällen ist $|\chi_r| = \chi_e$; die Welle wird also vollständig reflektiert und kann nicht in das Medium 2 eindringen.

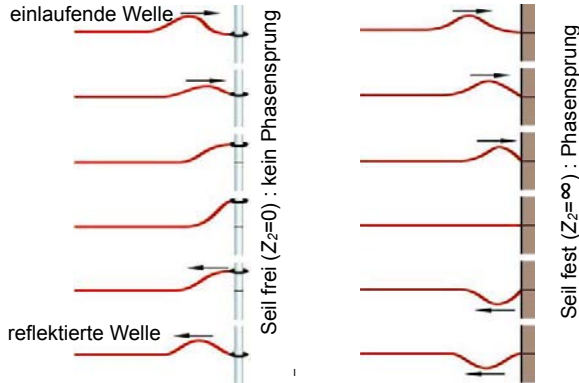


Abbildung 6.43: Reflexion einer Seilwelle bei losem oder fixem Ende.

Abb. 6.43 vergleicht die beiden Fälle für eine Seilwelle. $Z = 0$ bedeutet hier, dass das Seilende frei beweglich ist, $Z = \infty$ dass es fixiert ist. Beide Male wird die Welle vollständig reflektiert. Im ersten Fall ($Z_2 = 0$) hat die reflektierte Welle das gleiche Vorzeichen wie die einlaufende Welle $\chi_r = \chi_e$, im zweiten Fall ist das Vorzeichen invertiert, $\chi_r = -\chi_e$.

Für die Intensitäten $I \propto \chi^2$ erhält man

$$\frac{I_t}{I_e} = 4 \frac{Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (6.16)$$

und

$$\frac{I_r}{I_e} = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}.$$

Möchte man Reflexionen vermeiden, so muss offenbar $Z_1 = Z_2$ sein, d.h. die Impedanzen der beiden Medien müssen gleich sein.

Eine interessante Konsequenz davon ergibt sich für das menschliche Ohr. Die Schallwelle, welche das Ohr erreicht, bewegt sich im Medium Luft. Dessen Schallimpedanz liegt bei $414 \text{ kg m}^{-2}\text{s}$. Um wahrgenommen zu werden, muss sie

das Innenohr erreichen, welches von einer wässrigen Flüssigkeit gefüllt ist. Deren Schallimpedanz liegt bei $Z_2 \approx 1,4 \cdot 10^6 \text{ kg m}^{-2}\text{s}$. Gemäß Gleichung 6.16 würden somit nur etwa 0,1 % des Schalls das Innenohr erreichen und wir wären praktisch taub. Ein effizienter Hörsinn wird erst durch die Impedanzwandlung im Mittelohr erreicht.

6.4.3 Stehwellen

Die vorwärts- und die rückwärts laufenden Wellen überlagern sich und erzeugen dadurch Interferenz. Die Amplitude der Gesamtwelle ist

$$\begin{aligned} A &= A_0[\cos(kx - \omega t) + \cos(-kx - \omega t)] \\ &= 2A_0[\cos(kx) \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

Dabei handelt es sich um eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω , dessen Amplitude vom Ort x abhängt. Man bezeichnet dies als "stehende Welle".

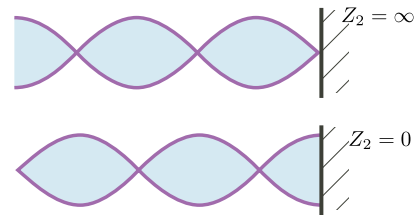


Abbildung 6.44: Reflexion erzeugt Stehwellen.

Abb. 6.44 zeigt für das Beispiel einer vollständig reflektierten Seilwelle, wie sich eine stehende Welle bildet. Findet die Reflexion an einem Punkt hoher Wellenimpedanz statt, so liegen die Knoten der Stehwelle im Abstand $n\lambda/2$ von diesem Punkt, mit ganzzahligem n . Bei einem Übergang zu $Z_2 = 0$ sind die Knoten um $\lambda/4$ verschoben.

In einem Saiteninstrument werden die Töne durch das Anregen von stehenden Wellen erzeugt. Da die Saiten an beiden Enden fest sind, muss die Wellenlänge einem Bruchteil der doppelten Länge entsprechen.

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad n \text{ ganzz.}$$

mit L als Länge der Saite. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit v (Phasengeschwindigkeit) hängt nach Gl. (6.14) von der Saitenspannung und der Massendichte ρ ab:

$$v = \sqrt{\frac{F}{A\rho}}.$$

Hier ist F die Kraft, mit der die Saite gespannt ist und A die Querschnittsfläche der Saite. Die resultierende Schwingungsfrequenz ist

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{F}{A\rho}}.$$

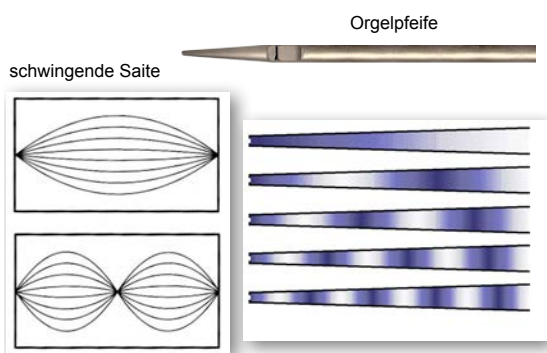


Abbildung 6.45: Stehwellen in einem Saiteninstrument und einer Orgelpfeife.

Stehwellen spielen eine wichtige Rolle in allen Musikinstrumenten. Abb. 6.45 zeigt links als Beispiel Wellen auf einer Saite und rechts in einer Orgelpfeife.

6.4.4 Abstandsabhängigkeit

Wellen enthalten Energie. Bei laufenden Wellen wird diese Energie transportiert. Wie im Falle von akustischen Wellen diskutiert (Kap. 6.2.4) ist die Energiedichte proportional zum Quadrat der Amplitude.

Die Amplitude einer Welle schwächt sich bei der Ausbreitung ab. Dazu tragen verschiedene Mechanismen bei, wie z.B. Absorption und Streuung. Streuung entspricht der (teilweisen) Reflexion an Strukturen mit unterschiedlichen Schallimpedanzen oder Schallgeschwindigkeiten, die nicht

so regulär geformt sind wie die oben diskutierte Grenzfläche. Neben diesen Verlustmechanismen führt auch die geometrische Ausbreitung zu einer Abschwächung.

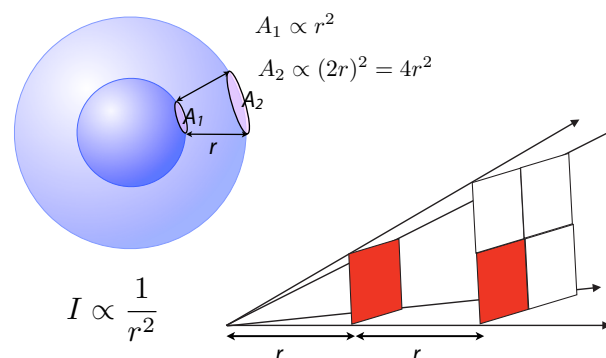


Abbildung 6.46: Fläche einer Kugelwelle als Funktion des Abstandes.

Bei ebenen Wellen ist die Amplitude und damit die Energiedichte überall im Raum gleich. In Kugelwellen fällt die Energiedichte quadratisch mit dem Abstand von der Quelle ab. Dies kann als Folge der Energieerhaltung verstanden werden: Eine Welle, die sich kugelförmig von einer Quelle ausbreitet, deckt eine Fläche A ab, welche proportional zum Quadrat des Abstandes r von der Quelle zunimmt, $A \propto r^2$ (\rightarrow Abb. 6.46). Unter der Annahme, dass die Welle nicht absorbiert wird, wird die vorhandene Energiedichte also über eine Fläche verteilt, welche $\propto r^2$ zunimmt. Dementsprechend muss die Intensität um diesen Faktor abnehmen,

$$I \propto \frac{1}{r^2},$$

da sonst die Energie nicht erhalten wäre.

6.4.5 Der Dopplereffekt

Bewegen sich Quelle oder Beobachter relativ zum Medium, so unterscheiden sich die ausgestrahlten und die gemessenen Frequenzen. Diesen Effekt bezeichnet man als Dopplerverschiebung¹

¹Christian Andreas Doppler (1803 - 1853)

Der Effekt kann bei einem vorbeifahrenden Zug (vor allem einem pfeifenden) beobachtet werden. Man kann ihn aber auch mit einem bewegten Lautsprecher hörbar machen. Mit Radarwellen wird er zur Geschwindigkeitsmessungen verwendet. Schöne Animationen dazu findet man im Internet².

Für die Herleitung betrachten wir zunächst die Periode, die ein ruhender Beobachter misst, wenn eine Welle der Wellenlänge λ und Phasengeschwindigkeit v_P bei ihm eintrifft

$$T = \frac{\lambda}{v_P}.$$

Hier und im Folgenden wird jeweils ein Koordinatensystem verwendet, bei dem das Medium, in dem sich die Schallwelle ausbreitet, in Ruhe ist. Für einen Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit v_B auf die Quelle zu bewegt, beträgt die Geschwindigkeit der Welle für ihn scheinbar $v_P + v_B$. Damit wird die Periode verkürzt auf

$$T_B = \frac{\lambda}{v_P + v_B}$$

und die Frequenz wird

$$\nu_B = \frac{1}{T_B} = \frac{v_P + v_B}{\lambda}.$$

v_B stellt hier die Geschwindigkeitskomponente des Beobachters in Richtung auf die Quelle dar; tangentielle Komponenten zählen nicht. Die Wellenlänge wird bestimmt durch die Frequenz, mit der die Wellen erzeugt werden, und die Phasengeschwindigkeit v_P :

$$\lambda = v_P T_Q = \frac{v_P}{\nu_Q}.$$

Damit ist

$$\nu_B = \frac{1}{T_B} = \nu_Q \frac{v_P + v_B}{v_P}.$$

Offenbar ist die Frequenz, die der Beobachter misst, gegenüber der ausgestrahlten Frequenz

²z.B. unter https://www.walterfendt.de/html5/phde/dopplereffect_de.htm

höher, um das Verhältnis der Geschwindigkeit des Beobachters gegenüber der Schallgeschwindigkeit:

$$\nu_B = \nu_Q \left(1 \pm \frac{v_B}{v_P} \right).$$

Das + Zeichen bezieht sich auf den Fall dass der Beobachter sich in Richtung auf die Quelle zu bewegt, das - Zeichen auf den entgegengesetzten Fall.

6.4.6 Bewegte Quelle

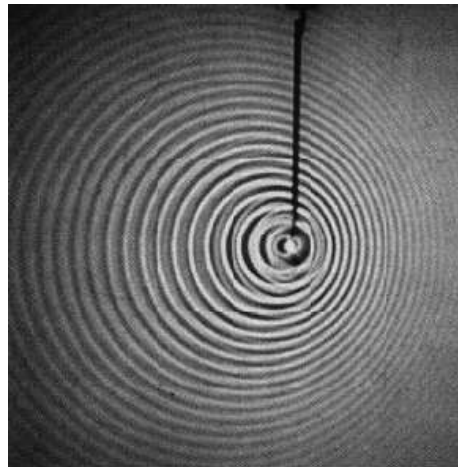


Abbildung 6.47: Wellenfronten bei bewegter Quelle.

Bewegt sich statt dem Beobachter die Quelle, wie im Beispiel von Abb. 6.47, so wird in Bewegungsrichtung der Abstand zwischen den Wellenflächen kleiner, auf der anderen Seite größer. Die einzelnen Kreiswellen markieren wie weit sich die Welle in den letzten n Perioden T_Q ausgebreitet haben. Wir nehmen an, dass ein ruhender Beobachter sich in Bewegungsrichtung (rechts im Bild) befindet. Die Wellenlänge, die er sieht, verringert sich um $v_Q T_Q$:

$$\lambda = \lambda_0 - v_Q T_Q.$$

Mit $\lambda_0 = v_P T_Q = v_P / \nu_Q$ wird die vom Beobach-

ter gemessene Frequenz

$$\begin{aligned}\nu_B &= \frac{v_P}{\lambda} = \frac{v_P}{\lambda_0 - v_Q T_Q} \\ &= \frac{v_P}{v_P/\nu_Q - v_Q/\nu_Q} \stackrel{\nu_Q}{=} \frac{\nu_Q}{1 - \frac{v_Q}{v_P}} \\ &= \nu_Q \frac{v_P}{v_P - v_Q}.\end{aligned}$$

Für den Fall dass die Quelle sich vom Beobachter entfernt, muss das - Zeichen durch ein + ersetzt werden. Offenbar unterscheiden sich somit die beiden Fälle, in denen sich der Beobachter, resp. die Quelle bewegen. Der Unterschied ist allerdings gering so lange die Geschwindigkeit klein ist im Vergleich zur Phasengeschwindigkeit im betreffenden Medium. Bewegen sich beide, so kann man die beiden Ausdrücke kombinieren:

$$\nu_B = \nu_Q \frac{1 + \frac{v_B}{v_P}}{1 - \frac{v_Q}{v_P}} = \nu_Q \frac{v_P + v_B}{v_P - v_Q}.$$

6.4.7 Überschallgeschwindigkeit

Die Wellenlänge der ausgestrahlten Welle

$$\lambda = \lambda_0 - v_Q T_Q = v_P T_Q - v_Q T_Q = (v_P - v_Q) T_Q$$

kann offenbar auch Null werden, wenn die Geschwindigkeit der Quelle gleich der Phasengeschwindigkeit der Welle wird, oder negativ, für $v_Q > v_P$.

Dies entspricht dem Fall dass die Quelle sich mit der emittierten Welle mitbewegt, wie in Abb. 6.48 links. Für den Fall einer Schallwelle entspricht dies einer Bewegung der Quelle mit Schallgeschwindigkeit.

Bewegt sich die Quelle schneller als mit Schallgeschwindigkeit, $v_Q > v_P$, so bilden die Wellen einen Kegel, der als Mach'scher Kegel bezeichnet wird. Abb. 6.49 zeigt einen solchen Kegel für ein Flugzeug. Wie in Abb. 6.48 gezeigt, kann dessen Öffnungswinkel berechnet werden, indem man berücksichtigt, dass alle Kugelwellen den Kegel berühren. Befindet sich die Quelle zu $t = 0$

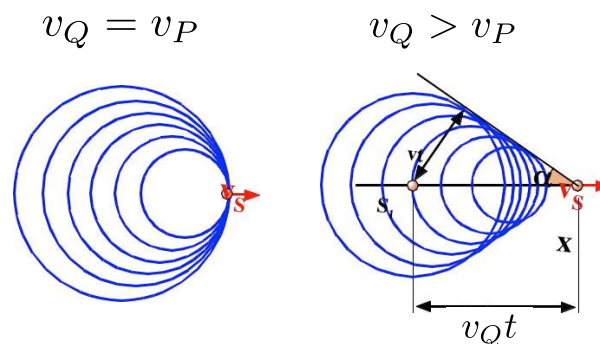


Abbildung 6.48: Wellenfronten bei bewegter Quelle für $v_Q = v_P$ (links) und $v_Q > v_P$ (rechts).

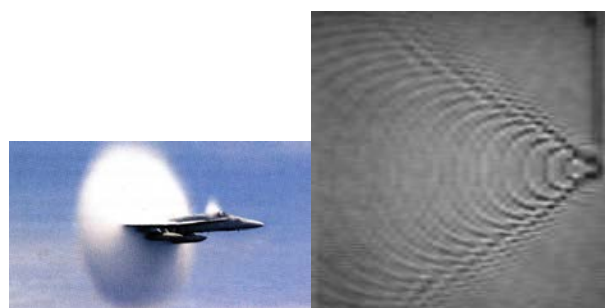


Abbildung 6.49: Wellenfronten einer Quelle, deren Geschwindigkeit höher ist als die Phasengeschwindigkeit.

bei A und zur Zeit t bei B, hat sie die Strecke $AQ = t v_Q$ zurückgelegt, während die Schallwelle die Strecke $AB = v_P t$ zurückgelegt hat. Somit ist der halbe Öffnungswinkel α gegeben als

$$\sin \alpha = \frac{v_P t}{v_Q t} = \frac{v_P}{v_Q} = \frac{1}{Ma}.$$

Die Zahl $Ma = v_Q/v_P$, das Verhältnis der Geschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit, wird als Mach'sche Zahl bezeichnet.

Bei Flugzeugen wird der Mach'sche Kegel als Überschallknall hörbar, z.T. aber auch sichtbar. Im Beispiel von Abb. 6.49 kann man den Mach'schen Kegel sehen, da die Druckänderung zu einer Kondensation von Wasserdampf führt.

6.5 Elektromagnetische Wellen

6.5.1 Das elektromagnetische Spektrum

Elektromagnetische Wellen sind Wellen, bei denen elektrische und magnetische Felder sich in Zeit und Raum ausbreiten. Heute kennt man sehr unterschiedliche elektromagnetische Wellen. Ihre Frequenzen reichen von wenigen Hertz bis zu 10^{23} Hertz. Ein wichtiger, wenn auch schmaler Bereich ist das sichtbare Spektrum, welches zwischen 10^{14} und 10^{15} Hertz liegt. V

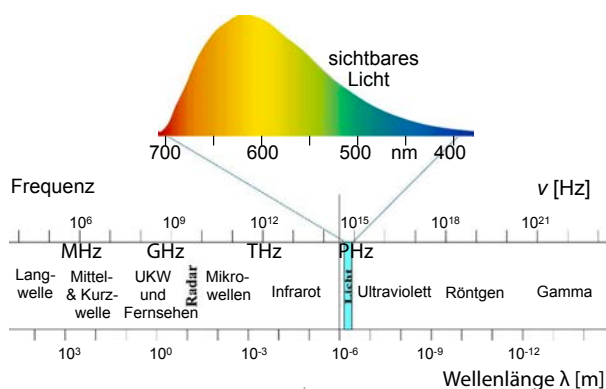


Abbildung 6.50: Spektrum der elektromagnetischen Wellen.

Die elektromagnetische Skala kann nach Wellenlängen, Frequenzen oder Energien gegliedert werden. Abb. 6.50 zeigt dies für einen Bereich von den Röntgenstrahlen bis zu den Radiowellen. Im langwelligen Bereich beginnt die Skala mit Radiowellen, deren Wellenlängen praktisch beliebig lang werden können. Hier fand aufgrund der technischen Entwicklung eine Inflation der Nomenklatur statt: Man unterteilte zunächst in vlf, lf, mf, hf. Als höhere Frequenzen erreicht wurden, mussten neue Namen gefunden werden: vhf, uhf, shf, ehf.

Im Bereich von ca. 1 GHz, resp. 30 cm Wellenlänge beginnt man üblicherweise von Mikrowellen zu sprechen. Im Bereich von einigen THz, resp. bei Wellenlängen von etwa 1 mm spricht man von Millimeterwellen oder THz-Wellen, für noch kürzere Wellenlängen von Fern-Infrarot. Ab

einer Wellenlänge von ca. $10 - 0.75 \mu\text{m}$ spricht man von Infrarot und der Bereich von 750 nm bis 400 nm entspricht sichtbarem Licht. Daran schließt das der Bereich des Ultravioletten (UV) und des Vakuum-UV an, und schließlich Röntgen und Gamma-Strahlen. Obwohl es sich auch dabei um elektromagnetische Wellen handelt, deren Ausbreitung durch die Maxwell Gleichungen beschrieben wird, können die Phänomene, die in diesem Bereich auftreten, nicht mehr vollständig durch die klassische Physik erklärt werden. Hier wird der Teilchencharakter des elektromagnetischen Feldes wichtig.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen elektromagnetischen Wellen und den bisher diskutierten mechanischen Wellen ist, dass elektromagnetische Wellen sich nicht nur in einem Medium ausbreiten, sondern auch im Vakuum. Da solche Wellen vorher nicht bekannt waren, hatte man im 19. Jh. große Mühe diese Möglichkeit zu akzeptieren. Man postulierte deshalb die Existenz eines Mediums, in dem sich diese neuartige Sorte von Wellen ausbreiten konnte und bezeichnete es als Äther. Da alle experimentellen Versuche, ihn nachzuweisen, fehlschlugen, akzeptierte man aber schließlich die Vorstellung von Wellen ohne Medium. Die wichtigste Konsequenz des fehlenden Mediums ist, dass die Lichtgeschwindigkeit nicht vom Koordinatensystem abhängt: Beobachter, welche sich in unterschiedlichen Inertialsystemen befinden, messen die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit für elektromagnetische Wellen. Eine weitere Konsequenz ist, dass bei elektromagnetischen Wellen eine Bewegung von Quelle oder Beobachter eine andere Art von Dopplereffekt erzeugt als bei mechanischen Wellen.

6.5.2 Elektromagnetische Wellengleichung

Die in Kapitel 4.11 diskutierten Maxwell Gleichungen beschreiben unter anderem die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen. Wir zeigen zunächst, wie man aus den Maxwell Gleichungen eine Wellengleichung erhalten kann. Da-

für rechnen wir die Rotation der zweiten Gleichung (4.22):

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= -\mu_r \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}).\end{aligned}$$

wobei wir die Materialgleichung für das Magnetfeld verwendet haben:

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}.$$

Hier wurde auch angenommen, dass das Medium isotrop sei, dass also alle Richtungen gleichwertig seien. Dies ist insbesondere in Festkörpern meist nicht der Fall. Die Proportionalitätskonstanten ϵ_r , μ_r werden dann zu Tensoren. Im Folgenden soll auch $\mu_r = 1$ sein, das Medium also nicht magnetisch sein.

Auf der rechten Seite setzen wir die erste Maxwell Gleichung (4.21) (mit $\vec{j} = 0$) ein und erhalten

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = -\mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Offensichtlich spielt hier der Verschiebestrom eine entscheidende Rolle.

Die Vektoranalysis ergibt für die linke Seite

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}.$$

Gemäß der dritten Maxwell Gleichung (4.23) verschwindet die Divergenz des E -Feldes, wenn wir Ladungen ausschließen, und wir erhalten

$$\begin{aligned}\Delta \vec{E} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E} \\ &= \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

oder

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon_r} \Delta \vec{E} \quad (6.17)$$

mit der Phasengeschwindigkeit $c/\sqrt{\epsilon_r}$. Hier stellt

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum dar, also für $\epsilon_r = \mu_r = 1$. Dies ist offenbar eine dreidimensionale Wellengleichung und die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum c ist eine universelle Naturkonstante, welche durch die beiden Feldkonstanten ϵ_0 und μ_0 gegeben ist. Der Rest dieses Kapitels basiert hauptsächlich auf dieser Wellengleichung.

Eine analoge Wellengleichung kann man natürlich auch für das magnetische Feld herleiten. Meist ist es aber einfacher, die Gleichung für das elektrische Feld zu lösen und anschließend die magnetischen Komponenten aus den Maxwell Gleichungen zu bestimmen (\rightarrow Kap. 6.5.4).

Offenbar sind die drei Komponenten des elektrischen Feldes in dieser Gleichung unabhängig voneinander. Im allgemeinen Fall erwarten wir somit drei voneinander unabhängige Lösungen, z.B. eine longitudinale und zwei transversale Wellen, wie im Fall von Gitterschwingungen.

6.5.3 Ebene Wellen

Die Lösungen dieser Gleichung hängen wie immer von den Randbedingungen ab. Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall einer harmonischen ebenen Welle. Für die Ausbreitungsrichtung verwenden wir ohne Verlust an Allgemeinheit die z -Richtung. Damit wird der Ansatz

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)} \right\}, \quad (6.18)$$

wobei E_x , E_y , E_z die komplexen Amplituden darstellen.

Einsetzen in die Wellengleichung (6.17) ergibt für die linke Seite

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) e^{i(\omega t - kz)} \\ &= \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \frac{c^2}{\epsilon_r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{i(\omega t - kz)}.\end{aligned}$$

Somit wird die Wellengleichung zu

$$-k^2 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -\frac{\epsilon_r}{c^2} \omega^2 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

Offenbar muss also die Dispersionsrelation lauten

$$k^2 = \omega^2 \frac{\epsilon_r}{c^2} = \omega^2 \frac{n^2}{c^2},$$

d.h. der Ansatz beschreibt eine gültige Lösung falls $\omega = kc/n$, d.h. falls die Ausbreitungsgeschwindigkeit gerade gleich c/n ist. $c = 299793$ km/s ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum oder Vakuum-Lichtgeschwindigkeit. Interessant ist, dass die elektrostatischen Größen ϵ_0 und μ_0 die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle bestimmen. $n = \sqrt{\epsilon_r}$ wird als Brechungsindex bezeichnet; er beschreibt die Reduktion der Ausbreitungsgeschwindigkeit durch das Medium. Diese Materialeigenschaften sind jedoch frequenzabhängig, d.h. sie unterscheiden sich von den Werten, die man in der Elektrostatik findet.

6.5.4 Magnetfeld

Der obige Ansatz genügt also der vorhin hergeleiteten Wellengleichung. Wir müssen aber noch überprüfen, ob er auch die Maxwell Gleichungen erfüllt. Insbesondere haben wir bisher nur das elektrische Feld berücksichtigt. Wir setzen es ein in die Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}.$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn das magnetische und elektrische Feld die gleiche raumzeitliche Abhängigkeit besitzen, d.h.

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)},$$

Die Ableitungen $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial y$ verschwinden wieder, so dass sich die Rotation vereinfacht zu

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Maxwell Gleichung ergibt

$$-ik \begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{pmatrix} = -i\omega \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}.$$

Offenbar muss die longitudinale Komponente des Magnetfeldes verschwinden, $B_z = 0$.

Aus der Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

folgt analog, dass die longitudinale Komponente des elektrischen Feldes verschwindet,

$$E_z = H_z = D_z = B_z = 0,$$

d.h. die Komponenten der Felder in Ausbreitungsrichtung verschwinden. Offenbar sind elektromagnetischen Wellen in einem isotropen Medium reine Transversalwellen.

Man kann diese Beziehung auch direkt aus der Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

für ein Medium ohne Ladungen herleiten: Gemäß Ansatz (6.18) ist die einzige Ableitung, die nicht verschwindet, diejenige nach z und somit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = -ik_z E_z = 0.$$

Diese Gleichung kann offenbar nur dann erfüllt sein, wenn E_z identisch verschwindet. Dies gilt allerdings nur für den Fall von isotropen dielektrischen Medien; anisotrope Eigenschaften können zu longitudinalen Komponenten führen; ebenso enthalten elektromagnetische Wellen in elektrisch leitenden Medien longitudinale Komponenten.

Abb. 6.51 zeigt ein Beispiel für eine elektromagnetische Welle, bei der das elektrische Feld entlang der x -Achse polarisiert ist (d.h. $E_y = E_z = 0$) und die sich in z -Richtung ausbreitet. Das magnetische Feld ist immer senkrecht dazu, also parallel zur y -Achse. Allgemein gilt

$$B_x = -\frac{k}{\omega} E_y \quad B_y = \frac{k}{\omega} E_x.$$

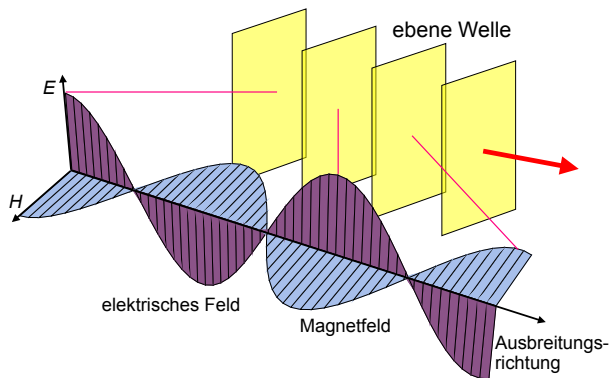


Abbildung 6.51: Ebene elektromagnetische Welle.

Die elektrischen und magnetischen Komponenten der Welle stehen in einem festen Verhältnis. Im Vakuum gilt

$$\frac{|E|}{|H|} = \frac{\mu_0 \omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = z_0 = 377 \Omega.$$

Die Größe z_0 wird als die Wellenimpedanz des Vakuums bezeichnet. Dieses Verhältnis kann man natürlich auch als

$$\frac{|E|}{|B|} = \frac{\omega}{k} = c$$

ausdrücken. Die Ausbreitungsrichtung ergibt sich aus dem Kreuzprodukt der beiden Felder:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

Dieser Vektor wird als Poynting-Vektor bezeichnet (\rightarrow Kap. 6.5.8). Er bezeichnet die Leistungsdichte und ist in Ausbreitungsrichtung orientiert.

6.5.5 Transversalwellen: Polarisation

Bei transversalen Wellen kann allgemein die Auslenkung entlang unterschiedlichen Richtungen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung orientiert sein. Schwingt das elektrische Feld in einer bestimmten Ebene, so spricht man von einer linear polarisierten Welle. Diese Ebene kann einerseits durch die Quelle des elektromagnetischen Feldes definiert werden (siehe Hertz'scher

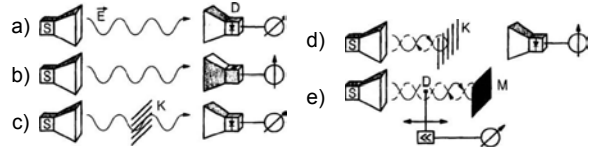
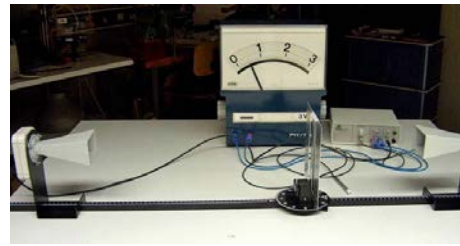


Abbildung 6.52: Übertragung von linear polarisierten Mikrowellen.

Dipol, Kap. 6.5.6), andererseits indem man mit Hilfe von Filtern einen Teil der Welle eliminiert.

Abb. 6.52 zeigt ein Experiment, das eine Mikrowellenquelle verwendet, welche polarisierte Mikrowellen erzeugt. Der Empfänger ist ebenfalls nur auf Wellen mit einer bestimmten Polarisationsrichtung empfindlich. Das detektierte Signal wird maximal, wenn Sender und Empfänger parallel orientiert sind. Sind sie gegeneinander um einen Winkel α gedreht, so reduziert sich das Signal um $\cos^2 \alpha$.

Ein Metallgitter kann verwendet werden, um nur eine bestimmte Polarisationsrichtung durchzulassen: ist die Welle parallel zu den Stäben polarisiert, so wird sie daran reflektiert, die senkrechte Komponente wird transmittiert (siehe Teil d), e) in Abb. 6.52).

6.5.6 Hertz'scher Dipol

Elektromagnetische Wellen werden allgemein durch schwingende elektrische Ladungen erzeugt. Ein einfaches Modell für schwingende Ladungen ist der in Kapitel 5.3.5 behandelte LC-Schwingkreis. Solche Schwingungen bilden die Quellen der Wellen. Umgekehrt können elektromagnetische Wellen nachgewiesen werden, indem man ihren Effekt auf bewegliche Ladungen untersucht. So ist jeder Schwingkreis mit der Frequenz $\omega = 1/\sqrt{LC}$ die Quelle einer elektromagnetischen

schen Welle: Sowohl das elektrische, wie auch das magnetische Feld sind zeitabhängig.

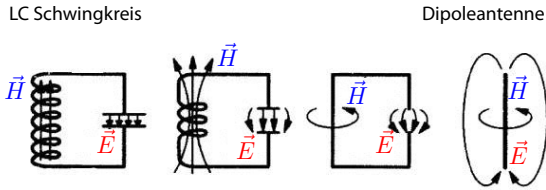


Abbildung 6.53: LC-Schwingkreis wird zu Dipol deformiert.

Bei den üblicherweise verwendeten Spulen und Kondensatoren in LC-Schwingkreisen sind die Felder stark im Inneren lokalisiert. Durch eine andere Anordnung kann man die Felder aber auch nach außen richten und dadurch eine Abstrahlung begünstigen. Abb. 6.53 zeigt als Beispiel den Übergang von einem kompakten LC-Schwingkreis zu einer Dipolantenne.

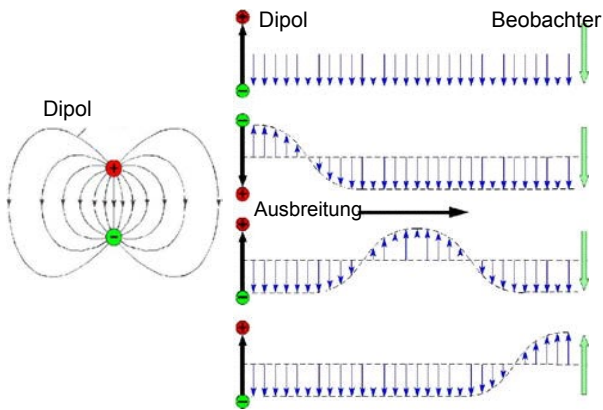


Abbildung 6.54: Dipol als Quelle einer Welle.

Die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit führt zu einer wellenförmigen Ausbreitung, wobei die Frequenz an jedem Ort durch die Parameter des Schwingkreises gegeben ist. Abb. 6.54 zeigt eine grafische Darstellung.

Je höher die Frequenz wird, desto kleiner werden Spulen und Kondensatoren und damit werden die Strukturen offener und ein Abstrahlverhalten stärker ausgeprägt. Ein nützlicher Extremfall ist der eines linearen schwingenden Dipols. Er wird als Hertz'scher Dipol bezeichnet.

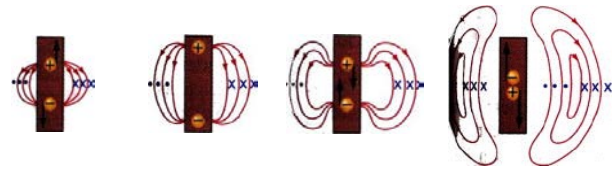


Abbildung 6.55: Abstrahlung durch oszillierenden Dipol.

Man kann sich die Entstehung von elektromagnetischen Wellen verstehen, indem man die Feldlinien eines schwingenden Dipols über eine Periode beobachtet. Wenn die beiden Ladungen getrennt werden, entstehen elektrische Feldlinien zwischen den beiden. Da die Verschiebung der Ladungen einem Strom entspricht, muss auch ein Magnetfeld entstehen, welches kreisförmig um die Dipol-Achse liegt. In Abb. 6.55 liegen sie senkrecht zur Bildebene und sind als Punkte und Kreuze markiert (aus der Ebene heraus, resp. in die Ebene hinein).

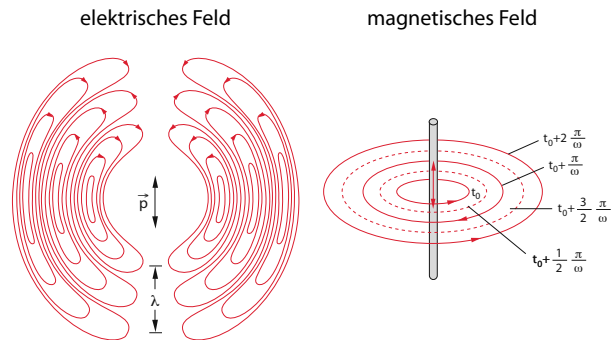


Abbildung 6.56: Feldlinien des Hertz'schen Dipols.

In Abb. 6.56 sind die elektrischen Feldlinien in einer Ebene dargestellt, welche den Dipol enthält, die magnetischen in der Ebene senkrecht zum Dipol. Bei maximaler Amplitude des Dipols sind auch die Feldlinien auf den maximalen Umfang angewachsen. Wenn die Ladungen sich wieder nähern, werden die Feldlinien eingeschnürt und wenn die beiden Ladungen am Ursprung sind, verschwinden die Feldlinien direkt am Dipol, während sie sich in der Ebene senkrecht zum Dipol davon entfernt haben. Somit hat sich eine erste Halbwelle vom Dipol abgelöst.

6.5.7 Eigenschaften des Hertz'schen Dipols

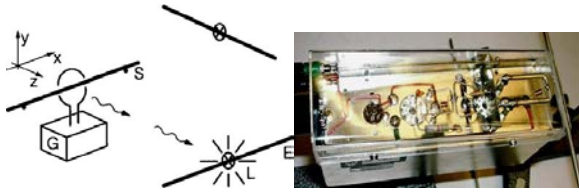


Abbildung 6.57: Prinzip und Aufbau des Hertz'schen Dipol-Experiments.

Abb. 6.57 zeigt ein Experiment, bei dem eine elektromagnetische Welle erzeugt wird. Ein Generator G erzeugt eine elektrische Wechselspannung. Die Wechselspannung wird an eine Stabantenne eingekoppelt und von dieser abgestrahlt. Eine Empfangsantenne E fängt diese Strahlung auf. Die übertragene Energie kann z.B. für die Erzeugung von Licht in einer Glühlampe verwendet werden.

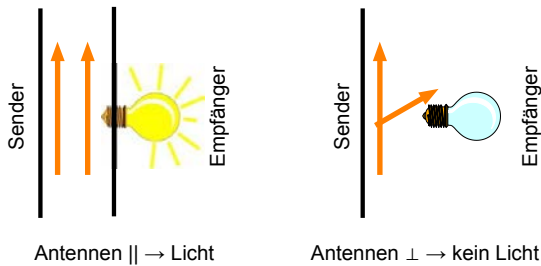


Abbildung 6.58: Übertragungseffizienz für unterschiedliche relative Orientierungen der Antennen.

Die Effizienz des Nachweises hängt von der Orientierung der Antennen ab, wie in Abb. 6.58 gezeigt: Stehen die beiden Antennen parallel, findet eine effiziente Übertragung statt. Für senkrechte Ausrichtung der Antennen hört das Lämpchen auf zu leuchten, wie in Abb. 6.58 rechts gezeigt. Offenbar ist die ausgesendete Strahlung linear polarisiert. Dies zeigt auch, dass es sich um eine Transversalwelle handeln muss.

Die Welle wird auch nicht isotrop abgestrahlt, sondern bevorzugt senkrecht zur Achse des Dipols. Bringt man die Empfangsantenne in die

Verlängerung der Sendeantenne, so kann man keine Strahlung messen. Offenbar wird in der Richtung der Antenne keine Leistung abgestrahlt. Trägt man die Intensität der abgestrahlten Welle als Funktion der Richtung auf, so findet man ein charakteristisches Verhalten in Form einer Doppelkeule. Wie in Abb. 6.59 gezeigt, sind die Maxima senkrecht zur Antenne orientiert.

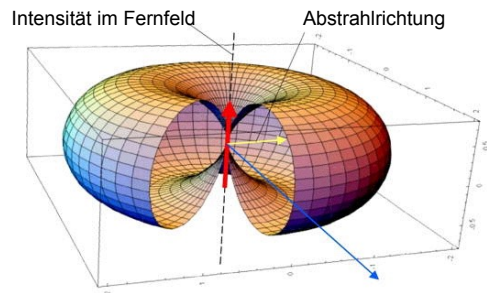


Abbildung 6.59: Intensität der abgestrahlten Leistung im Fernfeld als Funktion der Richtung.

Eine genauere Messung ergibt, dass die abgestrahlte Intensität I die Form

$$I \propto \frac{p_0^2 \nu^4 \sin^2 \theta}{r^2}$$

beträgt. Hier stellt $p_0 = qd_0$ die Amplitude des oszillierenden Dipols aus Ladung q und Abstand d_0 dar, θ den Winkel zwischen der Richtung der Sendeantenne und dem Ort an dem die Leistung gemessen wird, ν die Frequenz und r den Abstand von der Antenne. Abbildung 6.59 zeigt eine grafische Darstellung der Richtungsabhängigkeit. Die Abnahme der Intensität mit dem Quadrat des Abstandes stellt lediglich die Erhaltung der Energie dar: das Integral über eine Kugeloberfläche im Abstand r bleibt konstant. Die Abhängigkeit von der vierten Potenz der Frequenz zeigt, dass Abstrahlung bei höheren Frequenzen wesentlich einfacher zu erreichen ist als bei niedrigen.

6.5.8 Energiedichte und Intensität

Aus der Elektrostatik ist bekannt, dass elektromagnetische Felder Energie enthalten:

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}).$$

Im Unterschied zur Elektrostatik ist diese Energie im Falle von elektromagnetischen Wellen beweglich, d.h. sie fließt durch das System. Wenn sie mit Ladungen in Wechselwirkung treten, so leisten sie Arbeit an diesen. Umgekehrt fließt bei der Erzeugung von elektromagnetischen Wellen Energie aus der mechanischen Bewegung von Ladungen in das elektromagnetische Feld. Dieser Transport und Austausch von Energie muss die gesamte Energie des Systems konstant lassen. Die Energieerhaltung für elektromagnetische Felder ist der Inhalt des Theorems von Poynting, der diese Betrachtungen im Jahr 1884 als erster durchführte.

Aus der Beziehung zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke

$$\frac{|E|}{|H|} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}}$$

sehen wir, dass die elektrische und magnetische Energiedichte einer ebenen Welle gleich sind,

$$w_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H^2 = w_H.$$

Die gesamte Energiedichte ist somit

$$\begin{aligned} w &= w_E + w_H = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H^2 \\ &= \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r} E H = \frac{n}{c} E H. \end{aligned}$$

Der Energiefluss ist die Energiedichte multipliziert mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, also

$$S = \frac{c}{n} w = E H.$$

Wie man aus der Lösung der Wellengleichung sieht, ist der Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

in Ausbreitungsrichtung orientiert und hat den Betrag des Energieflusses. Er wird als Poyntingvektor bezeichnet und beschreibt den (ort- und zeitabhängigen) Energiefluss. Der Poyntingvektor besitzt offenbar die Einheiten

$$[S] = [E][H] = \frac{\text{V A}}{\text{m m}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2},$$

also Leistung pro Fläche.

Die Intensität ist definiert als der Mittelwert des Energieflusses über eine Periode,

$$I = \frac{1}{2} E_0 H_0.$$

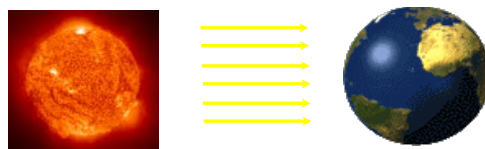


Abbildung 6.60: Sonnenenergie wird auf die Erde übertragen.

Sonnenlicht überträgt große Energiemengen von der Sonne zur Erde. Die einfallende Intensität hängt vom Ort ab, von Einfallswinkel, Wetter, Tages- und Jahreszeit. Mittelt man die einfallende Intensität ohne den Einfluss der Atmosphäre, bezogen auf senkrechten Einfall, über längere Zeit, so erhält man die sogenannte Solarkonstante. Ihr Wert beträgt

$$E_0 = 1367 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Am Boden kommen bei klarem Wetter ca. 75 % der eingestrahlteten Sonnenenergie an, da ein Teil von der Atmosphäre reflektiert und absorbiert wird. Demzufolge beträgt die am Boden ankommende Sonnenenergie bei klarem Wetter ca. 1 kW/m².

6.5.9 Impulsdichte und Impulsübertrag

In ähnlicher Weise wie die transportierte Energie kann man auch den Impuls des Feldes berechnen.

Die Existenz eines Impulses für die elektromagnetische Welle kann man sich leicht plausibel machen, wenn man die Bewegung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld der Welle betrachtet.

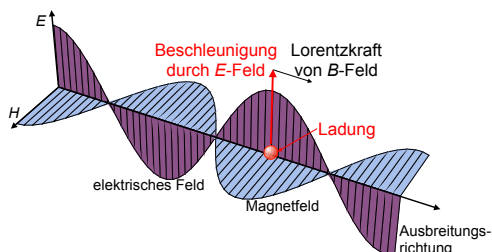


Abbildung 6.61: Impulsübertrag von einer elektromagnetischen Welle auf eine Ladung q .

Abb. 6.61 zeigt eine Welle, die sich in z -Richtung ausbreitet, deren elektrisches Feld in x -Richtung und das magnetische in y -Richtung liegt. Die elektrische Feldkomponente erzeugt zunächst eine Coulomb-Kraft auf die Ladung, welche diese in x -Richtung beschleunigt. Damit führt sie eine Bewegung senkrecht zum B -Feld durch, welche eine Lorentzkraft bewirkt. Damit erhält das Teilchen eine Beschleunigung in z -Richtung, also einen Impulsübertrag in Ausbreitungsrichtung, welcher aus der Welle stammen muss. Damit ist auch klar, dass die Impulsdichte proportional zum Produkt aus E und B sein muss. Die Impulsdichte der Welle beträgt im Vakuum

$$\vec{p}_{Feld} = \vec{D} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{c^2} \vec{S}.$$

Damit übt eine Welle einen Strahlungsdruck aus, welcher proportional zu ihrer Intensität ist. Wird eine Welle vollständig absorbiert, so beträgt der Impulsübertrag pro Zeit- und Flächeneinheit

$$\vec{P}_S = \frac{1}{2} c \vec{p}_{Feld} = \frac{1}{2} \frac{c}{c^2} \vec{S} = \frac{I \vec{k}}{c}.$$

Der Strahlungsdruck ist somit proportional zur Intensität einer Welle.

Der Impulsübertrag durch Licht wird unter anderem in Laserpinzetten verwendet: hier werden

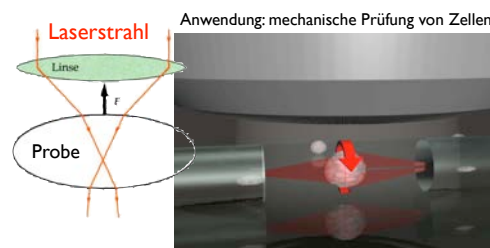


Abbildung 6.62: Links: Prinzip einer Laserpinzette. Rechts: Anwendung zur Untersuchung der mechanischen Eigenschaften von Zellen.

kleine Partikel (von Atomen bis zu Zellen) mit Hilfe von fokussierten Laserstrahlen festgehalten. Außerdem gibt es eine Reihe von Vorschlägen, wie der Impuls von Licht zum Antrieb von Raumschiffen verwendet werden könnte - einerseits durch Sonnensegel, welche das Licht der Sonne nutzen, oder durch den Rückstoß der beim Abstrahlen von Licht entsteht.

6.5.10 Dopplereffekt

Der Dopplereffekt tritt auch bei elektromagnetischen Wellen auf. Allerdings gilt dafür die Behandlung aus Kapitel 6.4.5 nicht, da Licht für die Ausbreitung kein Medium benötigt. Dies wurde von Michelson und Morley 1887 in einem berühmten Experiment gezeigt: sie wollten die Geschwindigkeit der Erde gegenüber dem Äther messen, der als Medium für die Lichtausbreitung betrachtet wurde. Sie fanden aber, dass die Relativgeschwindigkeit Null war, unabhängig davon, in welche Richtung die Erde sich bewegte. Dies konnte nur dadurch erklärt werden konnte, dass für die Lichtausbreitung kein Medium notwendig war. Beim Licht findet man deshalb einen anderen Dopplereffekt:

$$\nu_B = \nu_Q \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

Hier stellt c die Lichtgeschwindigkeit, also die Phasengeschwindigkeit von Licht im Vakuum dar und v die Relativgeschwindigkeit, mit der sich Beobachter und Quelle nähern. Entfernen

sie sich, müssen die beiden Vorzeichen getauscht werden.

Der Dopplereffekt für elektromagnetische Strahlung wird z.B. bei Radar-Geschwindigkeitsmessungen verwendet. Er zeigt sich auch in der Spektroskopie, wo Bewegung von Atomen oder Molekülen als Verschiebungen von Resonanzlinien beobachtet werden können. Er wird beim Wetterradar verwendet, um Windgeschwindigkeiten zu messen.

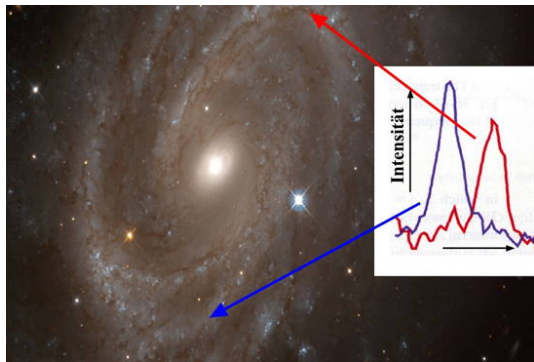


Abbildung 6.63: Dopplereffekt in der Astronomie.

Die größten Effekte findet man in der Astronomie, wo man aus der Dopplerverschiebung bestimmen kann, wie schnell sich weit entfernte Sterne bewegen. Abb. 6.63 zeigt ein Beispiel. Wichtige Anwendungen sind die Rotation von Galaxien und die Relativbewegungen von Sternen. Letztere wird verwendet, um Exoplaneten zu finden. Aus der Relativbewegung von fernen Galaxien bestimmt man die Geschwindigkeit der Expansion des Kosmos.