

5 Schwingungen

Viele natürlichen Phänomene zeigen eine periodische Zeitabhängigkeit: der Zustand ändert sich, kehrt aber nach einer festen Zeit in den Anfangszustand zurück. Dieser Vorgang kann sich beliebig häufig wiederholen. Dieses Phänomen wird als Schwingung bezeichnet.

5.1 Allgemeines

5.1.1 Beispiele und Definition

Das klassische Beispiel eines schwingenden Systems ist das Pendel.

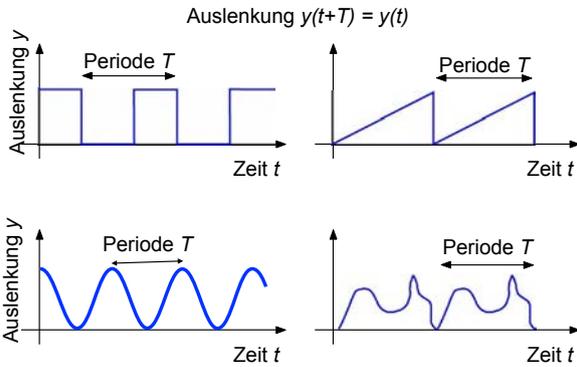


Abbildung 5.1: Periodische Signale.

Allgemein ist eine Schwingung definiert als eine periodische Zustandsänderung, d.h. als eine Zeitabhängigkeit, welche nach einer Periode T in den ursprünglichen Zustand zurückkehrt:

$$y(t + T) = y(t).$$

Abb. 5.1 zeigt einige Beispiele für periodische Bewegungen. Die Größe y , welche diese Zeitabhängigkeit zeigt, kann eine mechanische Größe sein, aber auch eine elektrische, chemische, thermische Meist zeigen verschiedene Größen (z.B. Ort, Geschwindigkeit) die gleiche periodische Zeitabhängigkeit. Schwingungen entstehen

immer dann, wenn einzelne Komponenten (mechanische, elektrische etc.) nicht starr aneinander gekoppelt sind. Wie sich das System während der Periode verhält spielt hierbei zunächst keine Rolle.

5.1.2 Phänomenologie



Abbildung 5.2: Uhren in der Kunst.

Schwingungen spielen in vielen Systemen eine wichtige Rolle; insbesondere bilden sie die Basis von Zeitmessungen (→ Abb. 5.2). Jede Armbanduhr besitzt ein schwingendes Element; in mechanischen Uhren ähnelt es einem Schwingpendel, in elektronischen Uhren wurde dieses durch einen Quarzstab ersetzt. In den Atomuhren, welche den internationalen Zeitstandard definieren sind es Schwingungen der Elektronenhülle von Atomen. Die Sekunde, als Basis der Zeitmessung, wird definiert als 9192631770 Perioden eines Resonanzübergangs im Grundzustand eines ^{133}Cs Atoms.

Elektronische Oszillatoren sind die Basis aller modernen Elektronik, insbesondere aber der digitalen. Abb. 5.3 zeigt typische Signalverläufe, welche durch einen Taktgeber gesteuert werden.

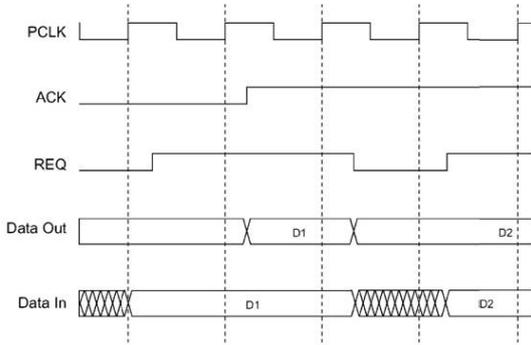


Abbildung 5.3: Periodische Signale in einem elektronischen Gerät.

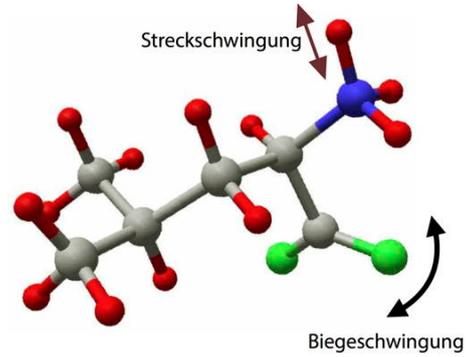


Abbildung 5.5: Beispiele für Normalschwingungen in einem Molekül.

Lasertisch

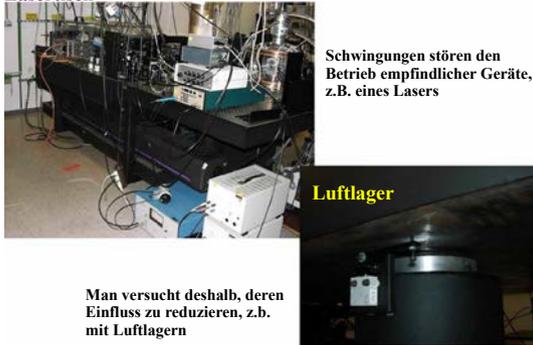


Abbildung 5.4: Unterdrückung von störenden Schwingungen in einem Laserlabor.

Praktisch alle Systeme zeigen Schwingungen in der einen oder anderen Art. Manchmal, wie z.B. in einem Laserlabor (\rightarrow Abb. 5.4), können sie stören und man muss man mit großem Aufwand versuchen, sie zu reduzieren.

5.1.3 Atomare und molekulare Schwingungen

In allen mikroskopischen Systemen spielen Schwingungen eine große Rolle. So sind die Atome in Molekülen durch Kräfte zusammengehalten, die qualitativ wie eine Feder wirken. Unter dem Einfluss dieser Bindungskräfte führen sie Schwingungen um ihre Gleichgewichtslage durch, wie in Abb. 5.5 gezeigt.

Die Schwingungen der Atome können im Experiment gemessen werden. Abb. 5.6 zeigt als Bei-

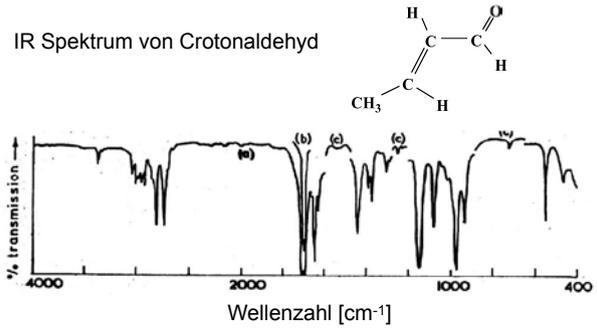


Abbildung 5.6: Infrarot-Spektrum von Crotonaldehyd.

spiel das Infrarot-Spektrum von Crotonaldehyd. Aus den gemessenen Spektren kann man z.B. die Moleküle identifizieren oder die Kräfte zwischen den einzelnen Atomen messen.

Auch in einem Festkörper sind die Atome nicht starr miteinander verbunden, sondern durch Bindungskräfte, welche Schwingungen erlauben, welche mit der Temperatur zunehmen. Eine Reihe von elektrischen, resp. elektromagnetischen Systemen zeigen Schwingungsphänomene. Elektromagnetische Wellen, also auch Licht, stellen schwingende Systeme dar. Abb. 5.7 zeigt schematisch ein entsprechendes Modell: im linken Bild werden die mittleren Positionen der Atome dargestellt, im rechten Bild sind sie über Federn aneinander gekoppelt.

Bei der Erzeugung von Licht gehen die Schwingungen von atomaren Dipolen auf das elektromagnetische Feld über und beim Nachweis, also

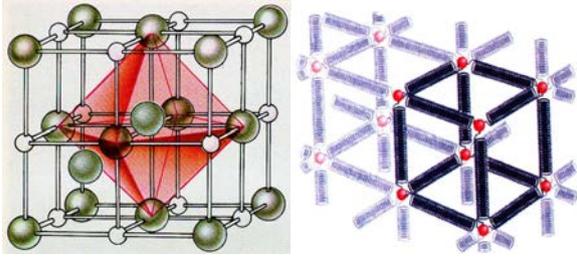


Abbildung 5.7: Struktur (links) und Federmodell der Atome in einem Festkörper.

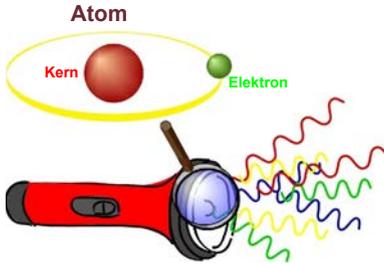


Abbildung 5.8: Erzeugung von Licht über atomare Anregungen.

auch im Auge, überträgt das elektromagnetische Feld diese Schwingungen wieder auf ein materielles System, in diesem Fall die Sinneszellen der Netzhaut. Abb. 5.8 zeigt schematisch, wie atomare Anregungen zur Emission von Licht führen können.

5.1.4 Klassifikation und Übersicht

Man unterscheidet zwischen freien und erzwungenen Schwingungen. Im ersten Fall bewegt sich das System ohne äußeren Einfluss (Abb. 5.9 oben). Eine erzwungene Schwingung (Abb. 5.9 unten) wird durch eine periodische äußere Kraft angeregt.

In vielen Fällen sind Schwingungen nicht vollständig periodisch, sondern gedämpft, wie in Abb. 5.10 gezeigt. Die Dämpfung kommt dadurch zustande, dass das System Energie an seine Umgebung abgibt. Man spricht in diesem Fall von einer gedämpften Schwingung, im Gegensatz zu den ungedämpften Systemen, welche nur als Idealfälle existieren.

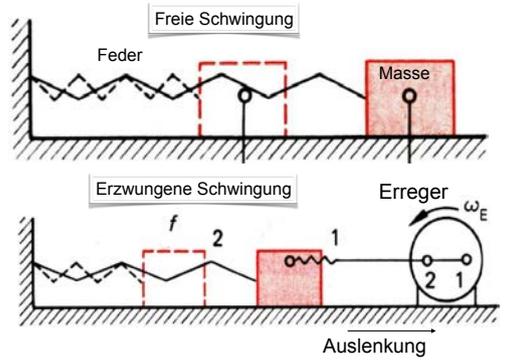


Abbildung 5.9: Freie Schwingung (oben) vs. durch externe Kraft erzwungene Schwingung (unten).

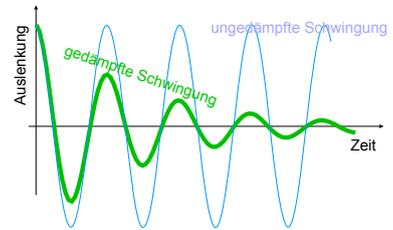


Abbildung 5.10: Gedämpfte Schwingung.

Schwingungen treten somit in sehr unterschiedlichen Situationen auf. Man kann sie trotzdem in sehr analoger und kompakter Weise diskutieren, die mathematische Behandlung dieser großen Zahl unterschiedlicher Phänomene ist weitgehend identisch; sie werden deshalb hier gemeinsam diskutiert. Wie in anderen Gebieten der Physik können wir hier sehr viele Gemeinsamkeiten feststellen. So können wir die Resultate, die uns die Diskussion des schwingenden Pendels liefert, direkt auf viele andere Systeme übertragen. Es ist deshalb nützlich, zunächst einige Eigenschaften zu diskutieren, die allen schwingenden Systemen gemeinsam sind.

5.2 Der Harmonische Oszillator

Das einfachste und wichtigste Modell eines schwingenden Systems ist der harmonische Oszillator. Hier ist die Zeitabhängigkeit des Systems durch eine einzige Periode oder Frequenz gege-

ben.

5.2.1 Harmonische Schwingungen

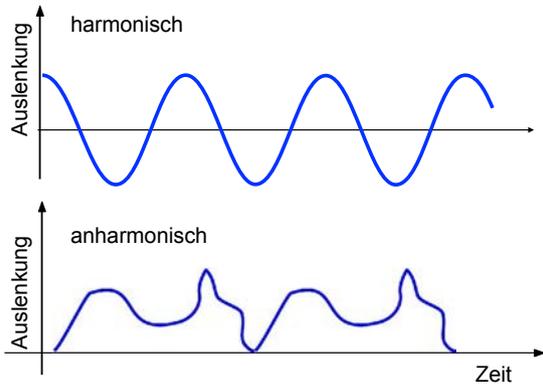


Abbildung 5.11: Harmonische Schwingung im Gegensatz zu einer anharmonischen Schwingung.

Die Zeitabhängigkeit einer allgemeinen Schwingung ist beliebig, abgesehen von der Periodizität. Die mathematische Behandlung solcher Systeme kann etwas schwierig werden. Wir beschränken deshalb hier die detaillierte Diskussion auf Systeme, bei denen die Zeitabhängigkeit durch eine Winkelfunktion (Sinus oder Cosinus) beschrieben werden kann. Eine solche Zeitabhängigkeit (Abb. 5.11 oben) wird als harmonisch bezeichnet, im Gegensatz zu einer anharmonischen (Abb. 5.11 unten).

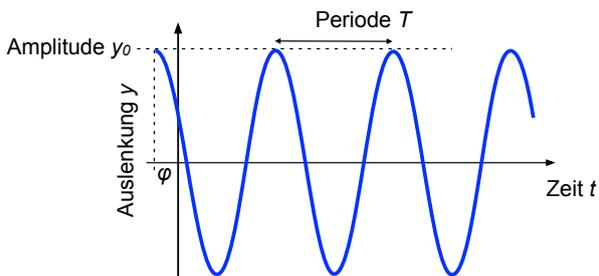


Abbildung 5.12: Relevante Parameter einer harmonischen Schwingung.

Die zeitabhängige Auslenkung $y(t)$ einer harmonischen Schwingung (\rightarrow Abb. 5.12) kann somit allgemein als

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

geschrieben werden. Hier sind $\omega = 2\pi\nu$ die Kreisfrequenz, $\nu = 1/T$ die Frequenz,

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$$

die Periode der Schwingung und φ_0 die Anfangsphase.

Anharmonische Schwingungen können immer als Fourier-Reihe dargestellt werden, z.B.

$$y(t+T) = y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k).$$

Hier stellen A_k die Amplituden und φ_k die Phasen der einzelnen Fourier-Komponenten dar.

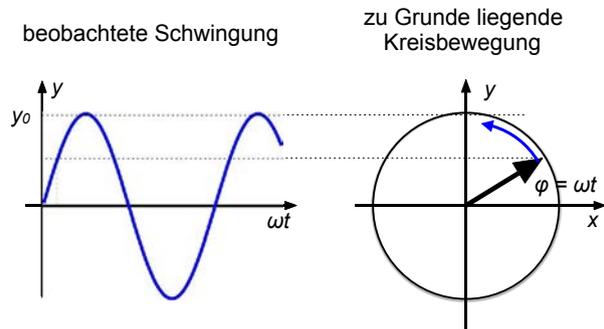


Abbildung 5.13: Eine harmonischen Schwingung (links) entspricht einer Komponente einer Kreisbewegung.

Eine harmonische Oszillation erhält man z.B. wenn man eine Komponente einer Kreisbewegung betrachtet, wie in Abb. 5.13 gezeigt. Die horizontale Position $x(t)$ und die vertikale Position $y(t)$ eines rotierenden Zeigers können z.B. als

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega t) \\ y(t) &= x_0 \sin(\omega t) = x_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Ein Beispiel für eine Kreisbewegung, die wir als Schwingung beobachten, sind Ebbe und Flut. Wie in Abb. 5.14 gezeigt, entstehen sie dadurch, dass die Erde sich dreht während ein doppelter "Berg" von Wasser relativ zum Mond stehen bleibt. Der Tidenhub hat deshalb eine Periodizität von etwa 12 Stunden.

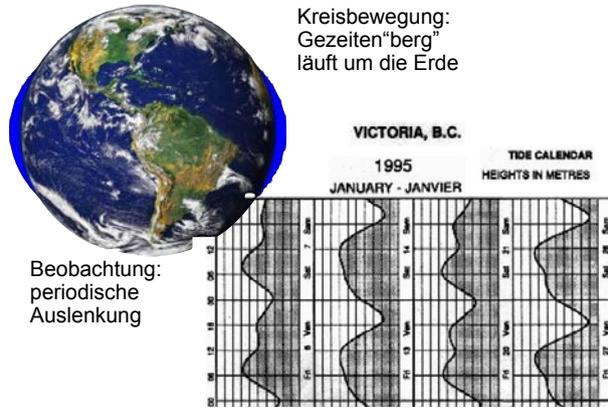


Abbildung 5.14: Gezeiten als Resultat der Erdrotation.

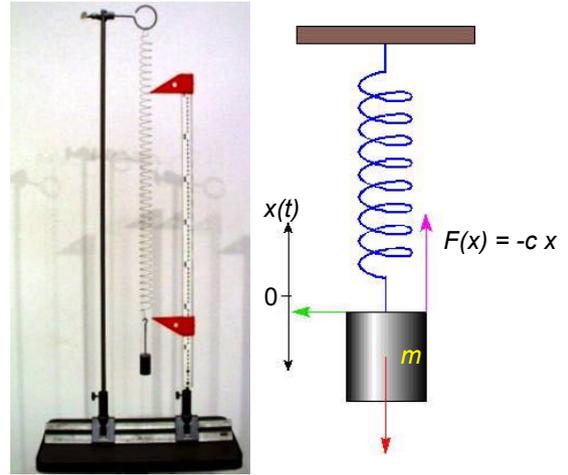


Abbildung 5.16: Federpendel.

5.2.2 Bewegungsgleichung

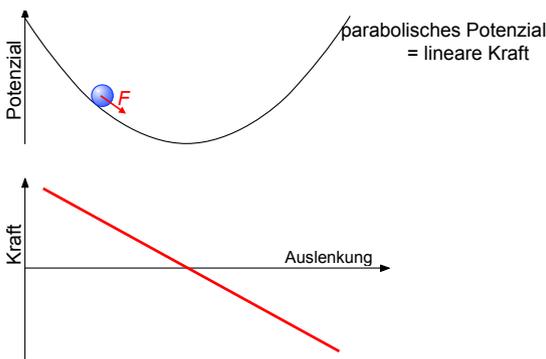


Abbildung 5.15: Potenzial und Kraft als Funktion der Auslenkung.

Die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators ist dadurch charakterisiert, dass auf den Körper eine Kraft wirkt, deren Richtung auf den Gleichgewichtspunkt gerichtet ist, und deren Betrag proportional zur Auslenkung aus dem Gleichgewicht ist, wie in Abb. 5.15 gezeigt.

Um zu verstehen wie eine Schwingung zustande kommt, betrachten wir zunächst ein einfaches Pendel wie das Federpendel in Abb. 5.16. Es besteht aus einer Masse und einer Feder, welche als masselos angenommen wird und für die das Hooke'sche Gesetz gelten soll: $F = -cx$, wobei c die Federkonstante darstellt. Daraus folgt für

die Masse eine Bewegungsgleichung

$$ma = F = -cx = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (5.1)$$

Dies ist eine eindimensionale (eine Variable), lineare (d.h. die Variablen und deren Ableitung kommen nur in der ersten Potenz vor) Differentialgleichung zweiter Ordnung (d.h. maximal zweite Ableitung) mit konstanten Koeffizienten (d.h. kein Koeffizient ist explizit zeitabhängig). Die Kraft ist immer der Auslenkung entgegen gerichtet und proportional zu ihr. Bei maximaler Auslenkung ist auch die Kraft maximal, bei verschwindender Auslenkung verschwindet die Kraft und damit die Beschleunigung.

5.2.3 Freie Schwingung

Wir betrachten zunächst den Fall einer freien Schwingung: das System wird zunächst ausgelenkt ($x(0) \neq 0$) und entwickelt sich dann ohne äußere Kräfte unter dem Einfluss von Gleichung (5.1). Solche Gleichungen können allgemein durch den Ansatz

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (5.2)$$

gelöst werden. Hier stellt ω_0 die Kreisfrequenz, x_0 die Amplitude, und ϕ die Phase der Schwingung dar. Um den Ansatz zu verifizieren und die

se Parameter zu bestimmen, setzen wir den Ansatz in die Differentialgleichung ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} cx &= cx_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \\ &= -m x_0 \frac{d^2}{dt^2} \cos(\omega_0 t + \phi) \\ &= m x_0 \omega_0 \frac{d}{dt} \sin(\omega_0 t + \phi) \\ &= m x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi). \end{aligned}$$

Da die Zeitabhängigkeit auf beiden Seiten die gleiche ist, muss nur noch die Amplitude übereinstimmen. Dies ist der Fall für

$$c = m\omega_0^2.$$

Auflösen nach der Kreisfrequenz ω_0 , resp. Periode T ergibt

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Allgemein ist die Bewegungsgleichung für einen harmonischen Oszillator von der Form

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x,$$

mit ω_0 als Kreisfrequenz.

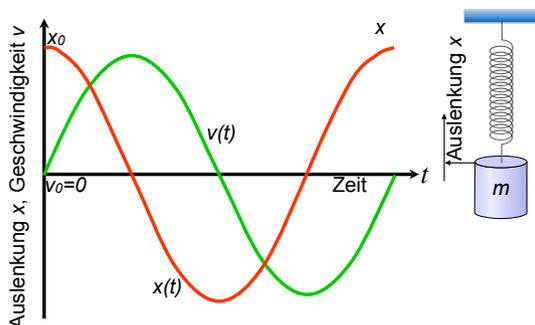


Abbildung 5.17: Lösung der Bewegungsgleichung.

Abb. 5.17 zeigt die Lösung dieser Bewegungsgleichung für den Fall $v(0) = 0$. Für den allgemeinen Fall (5.2) erhält man die Amplitude x_0 und die Phase ϕ aus den Anfangsbedingungen, welche meist durch Ort und Geschwindigkeit gegeben sind:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \cos \phi \\ \dot{x}(0) &= -x_0 \omega_0 \sin \phi. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann aufgelöst werden nach den Parametern x_0 , ϕ :

$$x_0 = \frac{x(0)}{\cos \phi} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{-x(0)}{\dot{x}(0)\omega_0}.$$

Eine Schwingung, die bei $t = 0$ die maximale Auslenkung besitzt, hat Phase $\phi = 0$. Ist die Auslenkung minimal ($x(0) = 0$), und bewegt sich das System in Richtung positive Auslenkung, d.h. ist es nach einer viertel Periode bei der maximalen Auslenkung, so ist die Phase $\phi = -90^\circ = -\pi/2$. Bewegt sich das System in Richtung negative Auslenkung, so ist die Phase (mit dieser Definition) positiv.

Es ist auch interessant, die Phase von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung zu vergleichen: Bewegt sich die Masse mit

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi),$$

so ist die Geschwindigkeit

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t + \phi).$$

Diese hat also die gleiche Frequenz, ihre Phase ist jedoch um 90 Grad verschoben. Die Beschleunigung

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

besitzt ebenfalls die gleiche Periode, ist aber weitere 90 Grad, also gegenüber dem Ort 180 Grad außer Phase.

5.2.4 Energie

Das Federpendel (wie alle harmonischen Oszillatoren) enthält Energie in zwei unterschiedlichen Formen, in diesem Fall sind es kinetische und potenzielle Energie. Die potenzielle Energie ist in der Feder gespeichert:

$$\mathcal{E}_{pot} = \frac{c}{2} x^2 = \frac{c}{2} x_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi).$$

Wie bereits erwähnt stellt sie eine quadratische Funktion der Auslenkung dar. Dies gilt nicht nur

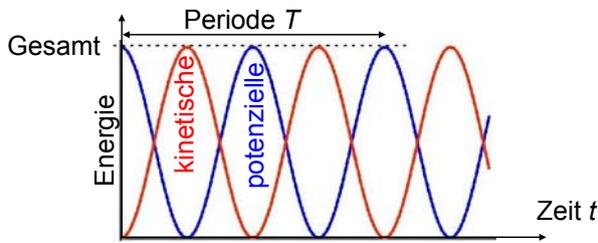


Abbildung 5.18: Kinetische und potenzielle Energie als Funktion der Zeit.

beim Federpendel, sondern bei den meisten Systemen mindestens für einen gewissen Bereich. Die kinetische Energie ist

$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} x_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi).$$

Damit ist die Gesamtenergie

$$\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_{pot} + \mathcal{E}_{kin} = \frac{c}{2} x_0^2,$$

unabhängig von der Zeit, d.h. konstant. Dies ist eine Manifestation der Energieerhaltung. Wie in Abb. 5.18 gezeigt, oszilliert die Energie jedoch zwischen den beiden Beiträgen potenzielle und kinetische Energie.

In der Ruhelage ist die Feder entspannt, die potenzielle Energie verschwindet somit, während die Geschwindigkeit und damit die kinetische Energie maximal ist. Bei der maximalen Auslenkung ist hingegen die Geschwindigkeit Null, die kinetische Energie verschwindet, während die potenzielle Energie maximal wird. Die einzelnen Beiträge zur Energie sind zeitabhängig, während die Gesamtenergie konstant bleibt: die Energie wird somit zwischen einzelnen Reservoirs periodisch ausgetauscht, wobei die Periode des Energieaustausches halb so groß ist wie die Periode der Auslenkung. Dieser Energieaustausch tritt bei allen schwingenden Systemen auf.

5.2.5 Der h.O. als Modellsystem

Der harmonische Oszillator ist einerseits ein attraktives Modellsystem, weil er analytisch leicht lösbar ist. Er spielt aber auch in der Natur eine

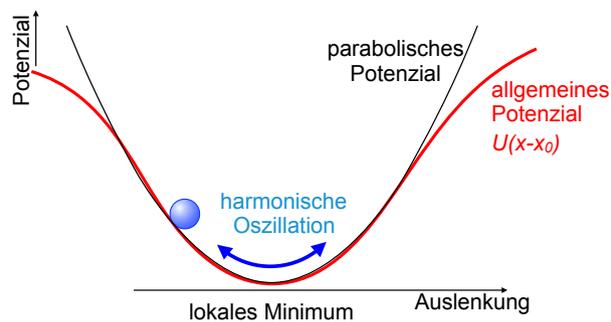


Abbildung 5.19: Reales Potenzial in der Umgebung eines Minimums und parabolische Näherung.

sehr wichtige Rolle. Der Grund dafür liegt darin, dass sich die potenzielle Energie sehr vieler Systeme in der Nähe ihres Gleichgewichts in guter Näherung durch eine Parabel annähern lässt, wie in Abb. 5.19 gezeigt.

Das sieht man rasch, wenn man die Energie in der Nähe eines lokalen Minimums als Taylor-Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned} U(x) &= U(x_0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_0} \cdot (x - x_0) \\ &+ \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0} \cdot (x - x_0)^2 \\ &+ \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3U}{dx^3} \right|_{x_0} \cdot (x - x_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

Der erste Term hat keinen Einfluss auf die Dynamik des Systems und kann auch $=0$ gesetzt werden. Am Gleichgewichtspunkt x_0 verschwindet außerdem die erste Ableitung, $dU/dx|_{x_0} = 0$. Der erste nicht verschwindende Term ist damit der quadratische Term. Mit zunehmender Entfernung spielen Terme höherer Ordnung eine zunehmende Rolle, während in der Nähe nur die Terme niedriger Ordnung berücksichtigt werden müssen. Wenn der quadratische Term nicht verschwindet, so ist in der Nähe des Minimums immer ein Bereich vorhanden, in dem er den größten Beitrag zur Dynamik des Systems liefert. Die Forderung, dass das System sich in einem stabilen Gleichgewicht befindet, bedeutet dann, dass

die Energie ein Minimum besitzt, dass also die zweite Ableitung positiv ist.

Wenn wir die erste Ableitung bilden,

$$-\frac{dU(x)}{dx} = F(x) = -\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0} (x-x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^2)$$

so finden wir durch Vergleich mit dem Hooke'schen Gesetz

$$F(x) = -c(x-x_0) = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0} (x-x_0)$$

und identifizieren die Kraftkonstante

$$c = m\omega_0^2 = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0}.$$

Die Resonanzfrequenz ω_0 ist damit durch die Masse des Oszillators und die zweite Ableitung des Potentials am Gleichgewichtspunkt bestimmt.

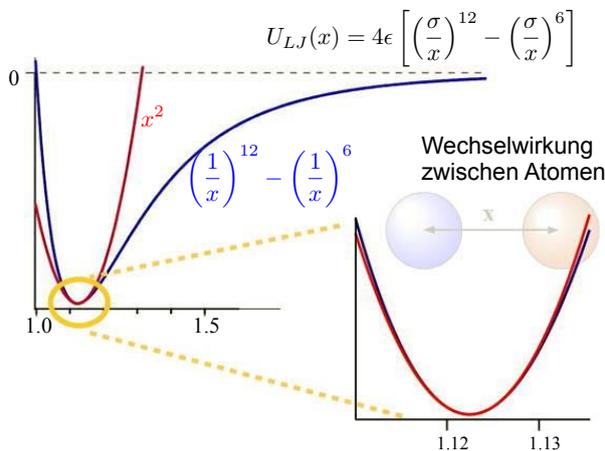


Abbildung 5.20: Lennard-Jones Potenzial mit harmonischer Näherung.

Ein Beispiel eines solchen Potentials ist das Lennard-Jones Potenzial, welches in Abb. 5.20 dargestellt ist. Es ist als

$$U_{LJ}(x) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^6 \right]$$

definiert ist. Die Konstanten ϵ und σ bestimmen Position und Tiefe des Minimums. Dieses Potenzial beschreibt die Wechselwirkung zwischen Atomen oder Molekülen, die durch die Van

der Waals Wechselwirkung aneinander gebunden sind. Für kurze Abstände überwiegt die Abstoßung, während für große Abstände die Wechselwirkung mit $1/x^6$ abfällt. Dazwischen gibt es ein Minimum der potenziellen Energie; die Position dieses Minimums bestimmt z.B. den Abstand zwischen Molekülen in einem Kristall und damit dessen Dichte. Obwohl das Potenzial sicher nicht die Form einer Parabel besitzt, kann man es doch in der Nähe des Minimums durch eine Parabel annähern. Je näher man sich beim Minimum befindet, desto besser ist die Approximation.

5.2.6 Anharmonizität

Dies zeigt, dass die meisten Systeme in der Nähe des Gleichgewichts wie ein harmonischer Oszillator verhalten. Für größere Auslenkungen werden natürlich die Terme höherer Ordnung wichtiger und die Kräfte werden nichtlinear, resp. der Oszillator anharmonisch. Zu den wichtigsten damit im Zusammenhang stehenden Abweichungen gehört, dass für große Auslenkungen die Frequenz von der Auslenkung abhängt.

Diese Abweichung kann man z.B. an diesem Kreispendel zeigen. Für kleine Auslenkungen ist die (halbe) Schwingungsperiode konstant, für größere Auslenkungen wird sie größer. Theoretisch sollte die Schwingungsperiode mit der Anfangs-Auslenkung β_0 wie folgt zunehmen:

$$T(\beta_0) = T(0) \frac{2K(\sin \beta_0)}{\pi},$$

wobei

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

ein vollständiges elliptisches Integral darstellt.

Abb. 5.21 zeigt die Periodendauer eines Kreispendels als Funktion der anfänglichen Auslenkung. Sie steigt mit zunehmender Auslenkung stark an. Als Extremfall kann man sich vorstellen, dass das Pendel senkrecht nach oben gerichtet ist, so dass es in dieser Position bleibt seine Schwingungsperiode wird dann unendlich.

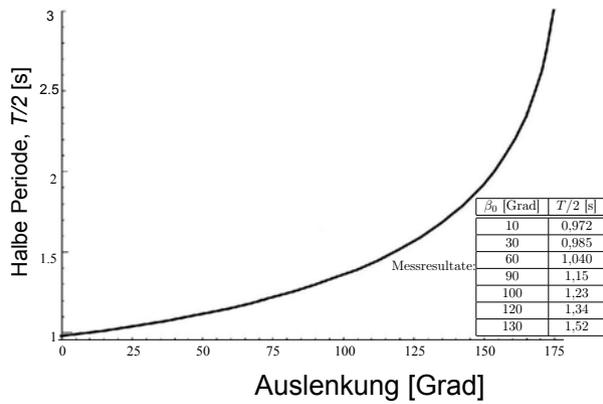


Abbildung 5.21: Periodendauer des anharmonischen Oszillators als Funktion der Auslenkung.

β_0 [Grad]	$T/2$ [s]
10	0,972
30	0,985
60	1,040
90	1,15
100	1,23
120	1,34
130	1,52

Tabelle 5.1: Gemessene Periodendauer eines Kreispendels als Funktion der Auslenkung.

5.2.7 Komplexe Amplitude

Auf den engen Zusammenhang zwischen harmonischen Oszillatoren und Kreisbewegung wurde bereits in der Einleitung hingewiesen.

Abb. 5.22 zeigt die Kreisbewegung eines Zeigers in der xy -Ebene und die Zeitabhängigkeit der beiden Komponenten. Die reelle Variable x wird dabei mit dem Realteil der komplexen Variablen identifiziert:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \omega t \\ y(t) &= x_0 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Dabei ist es nicht notwendig, die beiden Koordinaten getrennt zu behandeln; man kann sie über

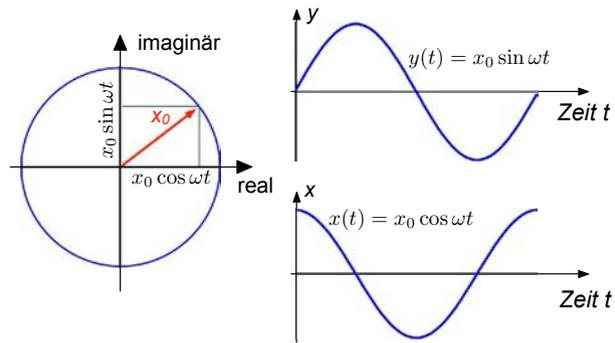


Abbildung 5.22: Kreisbewegung und Zeitabhängigkeit der beiden Quadratur-Komponenten.

die Euler'sche Beziehung zu einer komplexen Variablen kombinieren:

$$z = x_0 e^{i\omega t}.$$

Dafür wird die 2-dimensionale Ebene der Kreisbewegung wird mit der komplexen Ebene identifiziert. Gemäß der Euler'schen Formel ist

$$x_0 e^{i(\omega t + \phi_0)} = x_0 [\cos(\omega t + \phi_0) + i \sin(\omega t + \phi_0)].$$

Damit lässt sich mathematisch einfacher umgehen. So ist die Ableitung

$$\frac{d}{dt} e^{i(\omega t + \phi_0)} = i\omega e^{i(\omega t + \phi_0)}$$

wieder die Funktion selber, lediglich mit einem komplexen skalaren Faktor multipliziert. Diese Schreibweise kann nicht nur für Kreisbewegungen verwendet werden, sondern mit beliebigen harmonischen Oszillationen. Für eindimensionale Bewegungen identifiziert man die physikalische Auslenkung x mit dem Realteil der komplexen Funktion,

$$x(t) = \Re\{x_0 e^{i(\omega t + \phi_0)}\}.$$

5.3 Schwingende Systeme

Schwingungen erhält man immer dann, wenn die Kraft der Auslenkung entgegen gerichtet ist. Ist sie außerdem proportional zur Kraft, so erhält man eine harmonische Schwingung.

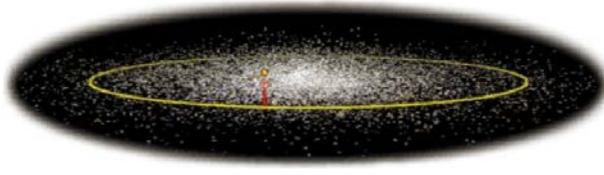


Abbildung 5.23: Orbit unseres Sonnensystems in der Milchstraße, Oszillation durch die Ebene.

Schwingungen treten auf sehr unterschiedlichen Zeit- und Größenskalen auf, wie z.B. die Bewegung unseres Sonnensystems in der Galaxis, welche in Abb. 5.23 dargestellt ist. Sie führt mit den übrigen Sternen eine Rotationsbewegung um das Zentrum durch und oszilliert durch die Ebene.

Im Folgenden werden einige einfache Beispiele aufgeführt, welche auch analytisch lösbar sind.

5.3.1 Das mathematische Pendel

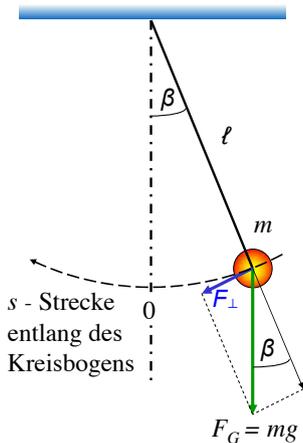


Abbildung 5.24: Mathematisches Pendel.

Das in Abb. 5.24 gezeigte System besteht aus einer punktförmigen Masse, die an einer masselosen, unelastischen Schnur der Länge ℓ aufgehängt ist. Die Masse sei um einen Winkel β aus der Vertikalen ausgelenkt. Dieser Winkel ist die relevante Variable für die Beschreibung der Schwingung. Da die Masse an einer gespannten Schnur hängt, kann sie sich nur senkrecht dazu bewegen, in einer Dimension entlang dem Kreisseg-

ment. Wir erhalten eine Bewegungsgleichung, indem wir das Newton'sche Gesetz mit der Schwerkraft kombinieren:

$$F_{\perp} = -mg \sin \beta = ma_{\perp} = m\ell\ddot{\beta}.$$

Das Symbol \perp deutet darauf hin, dass hier nur die Komponente senkrecht zur Schnur relevant ist.

Für kleine Auslenkungen kann man den Sinus durch den Winkel annähern und erhält eine Bewegungsgleichung für einen harmonischen Oszillator

$$\ddot{\beta} = -\frac{g}{\ell}\beta.$$

Durch Vergleich mit der allgemeinen Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2x$$

findet man, dass dieser Oszillator mit der Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

schwingt, welche nicht von der Masse des Pendels abhängt. Die Periode ist demnach

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (5.3)$$

Ein Fadenpendel mit einer Länge von $\ell=1$ m müsste demnach eine Schwingungsdauer von

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9,81}}\text{s} \approx 2,0\text{s}$$

haben – in guter Übereinstimmung mit dem Experiment. Wird die Länge des Fadens auf 0.25 m verkürzt, so halbiert sich die Periode auf 1 s.

Dieser einfache Zusammenhang, und die Tatsache, dass nur die Länge des Pendels für seine Schwingungsdauer verantwortlich ist, gehörten zu den größten Erfolgen der frühen physikalischen Forschung. Der Legende nach hat Galilei 1581 die Schwingungsperiode von hängenden Leuchtern gemessen und festgestellt, dass sie

unabhängig war von der Amplitude. Dies wird durch den Ausdruck (5.3) bestätigt, gilt aber nur für kleine Auslenkungen. Verwendet man die Näherung $\sin \beta \approx \beta$ nicht, findet man eine Periode, die man als Reihenentwicklung in β schreiben kann. Bei einer Auslenkung von 30° ist der Fehler etwa 2%; bei 10° beträgt der Fehler etwa 1%.

5.3.2 Torsionsschwinger

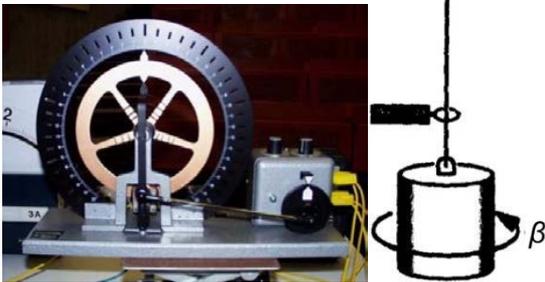


Abbildung 5.25: Torsionsschwinger: Pohl'sches Rad mit Spiralfeder und Trommel an Draht aufgehängt.

Ein Torsionsschwinger oder Drehpendel kann sich um eine Achse drehen, wobei eine Rückstellkraft wirkt, die proportional zur Auslenkung β ist. Diese erzeugt ein Drehmoment

$$M = I\ddot{\beta} = -c\beta.$$

I ist das Trägheitsmoment für diese Achse und c die Winkelrichtgröße (Federkonstante). Somit erhält man eine Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{I}}.$$

Diese Beziehung kann man u. a. verwenden, um Trägheitsmomente zu messen:

$$I = \frac{c}{\omega_0^2}.$$

Die Winkelrichtgröße c wird zunächst mit Hilfe eines Körpers mit bekanntem Massenträgheitsmoment bestimmt, danach wird der unbekannte Körper eingesetzt und dessen Trägheitsmoment bestimmt.

5.3.3 Das physikalische Pendel

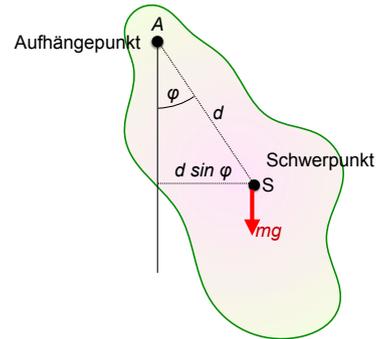


Abbildung 5.26: Physikalisches Pendel.

Ein physikalisches Pendel ist ein starrer Körper, der um einen Punkt A drehbar gelagert ist. Abb. 5.26 zeigt ein Beispiel. Wie beim Drehpendel ist das Produkt aus Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ und Trägheitsmoment I gegeben durch die Rückstellkraft. Diese ist hier gegeben durch das Drehmoment als Produkt aus Schwerkraft $F_G = mg$ und Auslenkung des Schwerpunktes, $d \sin \varphi$:

$$M = I\ddot{\varphi} = -mgd \sin \varphi.$$

Wir können wiederum die Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ für kleine Auslenkungen machen. Damit wird die Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}.$$

Dies entspricht der Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels mit der Pendellänge

$$\ell_{red} = \frac{I}{md}.$$

Wir betrachten das Beispiel von Abb. 5.27, ein Rad mit Radius R , welches sich um einen Aufhängepunkt am Rand dreht. Der Abstand vom

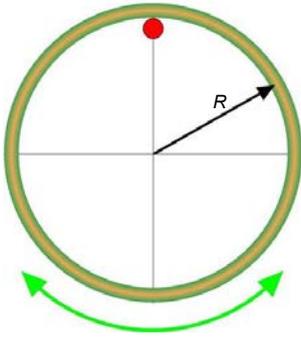


Abbildung 5.27: Reifenpendel.

Drehpunkt beträgt somit $d = R$. Gemäß dem Steiner'schen Satz beträgt das Trägheitsmoment

$$I_A = I_0 + mR^2 = 2mR^2.$$

Somit ist die Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2R}} = 4,34 \text{ s}^{-1}$$

wenn $R = 26 \text{ cm}$. Dies entspricht einer Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}} \approx 1,47 \text{ s},$$

in vernünftiger Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert ($T = 1.38 \text{ s}$), den man für einen Radius von 26 cm erhält.

Löst man die Arretierung, so dass das Rad sich nicht um den Aufhängepunkt drehen muss, so erhält man näherungsweise ein mathematische Pendel, bei dem die Schwingungsperiode

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 1,02 \text{ s}$$

beträgt.

5.3.4 Flüssigkeitspendel im U-Rohr

Wir betrachten eine Flüssigkeitssäule in einem U-Rohr. Sind beide Enden auf gleicher Höhe so ist das System im Gleichgewicht. Ist die Säule um die Distanz y verschoben (\rightarrow Abb. 5.28), so

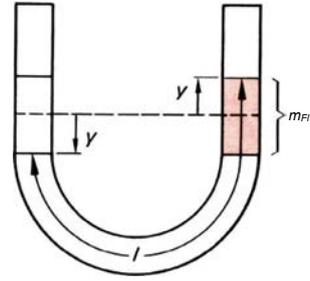


Abbildung 5.28: Flüssigkeitspendel im U-Rohr.

entsteht eine rücktreibende Gewichtskraft, welche durch die rote Fläche bestimmt wird.

Die Bewegungsgleichung enthält die Gesamtmasse m der Flüssigkeit

$$m = \ell A \rho,$$

wobei ℓ die Länge der Flüssigkeitssäule darstellt, A die Querschnittsfläche und ρ die Dichte. Die resultierende Gewichtskraft ist proportional zur Massendifferenz zwischen den beiden Armen,

$$F_G = -\Delta m g = -2y A \rho g.$$

Damit ist die Bewegungsgleichung

$$F = ma = \ell A \rho \ddot{y} = -2y A \rho g$$

oder

$$\ddot{y} = -\frac{2g}{\ell} y.$$

Somit beträgt hier die Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{\ell}},$$

unabhängig vom Querschnitt der Flüssigkeit oder ihrer Dichte. Sie entspricht einem mathematischen Pendel mit der Länge $\ell_{\text{math}} = \ell/2$.

Ein interessantes Beispiel eines solchen Flüssigkeitspendels befindet sich an der kanadischen Ostküste: der nördliche Teil der Bay of Fundy zwischen New Brunswick (Neu Braunschweig) und Nova Scotia (Neu Schottland) bildet ein Flüssigkeitspendel. Wie in Abb. 5.29 gezeigt, wird es von Mond zu Schwingungen angeregt und man findet Gezeitenunterschiede bis zu 16 m . Allerdings ist das System viel zu klein für eine Periode von 12 Stunden , die Anregung ist somit nicht resonant.

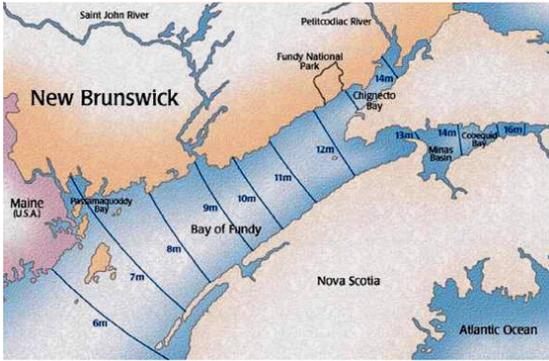


Abbildung 5.29: Gezeitenhöhen in der Bay of Fundy (Kanada).

5.3.5 Elektromagnetische Schwingkreise

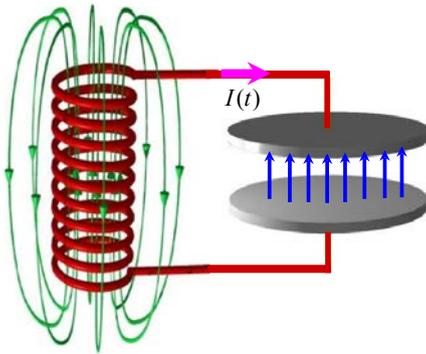


Abbildung 5.30: LC-Schwingkreis.

Das einfachste elektronische System, das Schwingungen ausführen kann, besteht aus einem Kondensator C und einer Spule L , wie in Abb. 5.30 gezeigt. Eine Bewegungsgleichung für die Schwingung erhält man aus der Maschenregel: Die Spannung über der Spule muss entgegengesetzt gleich der Spannung über dem Kondensator sein:

$$U_L + U_C = 0 = L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}.$$

Mit $I = dQ/dt$ erhält man

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{LC}.$$

Die Kreisfrequenz beträgt somit

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

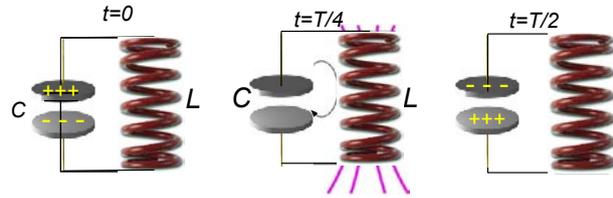


Abbildung 5.31: Zustand des LC-Schwingkreises zu unterschiedlichen Zeiten während einer Schwingung.

Wir können die Oszillation verfolgen indem wir z.B. bei einem geladenen Kondensator anfangen, wobei der Strom verschwinden soll. Die Ladung auf dem Kondensator entwickelt sich somit wie

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega t.$$

Die Spannung über dem Kondensator führt zu einem Stromfluss durch die Spule, wobei deren Induktivität den Anstieg des Stromes beschränkt. Nach einer Viertelperiode ist der Kondensator vollständig entladen und der Strom durch die Spule auf ein Maximum angestiegen, wie in Abb. 5.31 gezeigt. Der Strom lädt jetzt den Kondensator umgekehrt auf. Dadurch entsteht eine Spannung, welche dem Stromfluss entgegenwirkt. Nach einer weiteren Viertelperiode ist der Stromfluss auf Null abgesunken, während der Kondensator umgekehrt geladen ist.

In diesem System erhält man einen Austausch von Energie zwischen der elektrostatischen Energie \mathcal{E}_C im Kondensator und der magnetischen Energie \mathcal{E}_L in der Spule, wie in Abb. 5.32 gezeigt. Bei $t = 0, T/2, T, \dots$ ist die Energie im Kondensator gespeichert, als elektrische Energie \mathcal{E}_C , bei $t = T/4, 3T/4, \dots$ in der magnetischen Energie \mathcal{E}_L der Spule. Die Gesamtenergie $\mathcal{E} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ ist konstant.

5.3.6 Zusammenfassung

Abb. 5.33 fasst die behandelten schwingenden Systeme zusammen. Die Bewegungsgleichung hat immer die Form

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x.$$

Die Unterscheidung ist jeweils die Variable x und die Form von ω_0^2 .

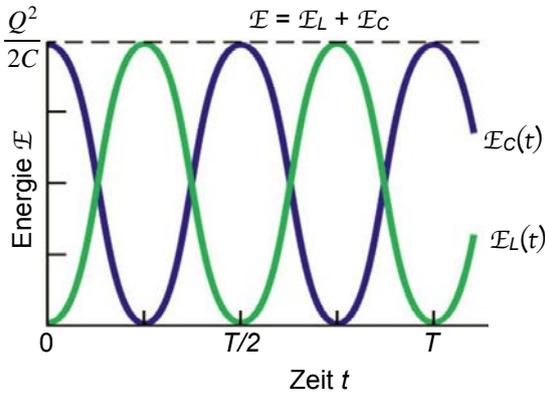


Abbildung 5.32: Zeitabhängigkeit der elektrischen \mathcal{E}_C und magnetischen Energie \mathcal{E}_L in einem LC Schwingkreis. Die gestrichelte Gerade zeigt die Gesamtenergie $\mathcal{E} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$.

5.4 Gedämpfte Schwingung

5.4.1 Dämpfung und Reibung

Wie bei jeder Bewegung gibt es bei Schwingungen auch dissipative Effekte, d.h. es wird Schwingungsenergie in Wärmeenergie umgewandelt, so dass die Schwingungsamplitude abnimmt. Dies geschieht z.B. über Reibung oder Luftwiderstand.

Bei einem Federpendel kann, wie in Abb. 5.34 gezeigt, eine Dämpfung eingestellt werden, wenn man eine Pendelmass aus einem Kupferblech verwendet, welches sich zwischen zwei Elektromagneten bewegt. Wird ein Magnetfeld angelegt, so werden im Kupferblech Wirbelströme induziert, welche wie bei einer Wirbelstrombremse die Bewegung abbremsen. Die Auslenkung wird auf dem Oszilloskop sichtbar gemacht indem man das Licht misst, welche am Kupferblech vorbei auf eine Photozelle gelangt.

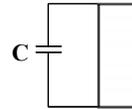
Bei einem Drehpendel (=Torsionsschwinger) wie dem Pohl'schen Rad kann ebenfalls über eine Wirbelstrombremse eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung eingestellt werden.

Die Reibungskraft (oder der Luftwiderstand) ist

Schwingungssystem	Kraftansatz Differentialgleichung	ω_0
Federpendel 	$F = ma$ $-cy = m\ddot{y}$ $\ddot{y} + \frac{c}{m}y = 0$	$\sqrt{\frac{c}{m}}$
mathematisches Pendel 	$F = ma$ $-mg\beta = ml\ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{g}{l}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{g}{l}}$
Torsionspendel 	$M = J_A a$ $-c^*\beta = J_A\ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{c^*}{J_A}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{c^*}{J_A}}$

Schwingungssystem	Kraftansatz Differentialgleichung	ω_0
physikalisches Pendel 	$M = J_A a$ $-mgr\beta = J_A\ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{mgr}{J_A}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{mgr}{J_A}}$
Flüssigkeitspendel 	$F = ma$ $-2Agy = m_{ges}\ddot{y}$ $\ddot{y} + \frac{2A\rho g}{m_{ges}}y = 0$ $\ddot{y} + \frac{2g}{l}y = 0$	$\sqrt{\frac{2A\rho g}{m_{ges}}}$ $\sqrt{\frac{2g}{l}}$

elektron. Schwingkreis



$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{LC} \quad \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Abbildung 5.33: Übersicht über verschiedene schwingende Systeme.

immer der Geschwindigkeit entgegen gerichtet, wie in Abb. 5.35 gezeigt. Der Betrag kann unabhängig von der Geschwindigkeit sein (bei Roll- oder Gleitreibung), proportional zur Geschwindigkeit (viskose Reibung, Wirbelströme) oder näherungsweise proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit (Luftwiderstand in turbulenter Strömung).

5.4.2 Geschwindigkeitsproportionale Reibung

Hier soll nur der wichtige und mathematisch einfache Fall der geschwindigkeitsproportionalen Reibung behandelt werden. In diesem Fall muss die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszil-

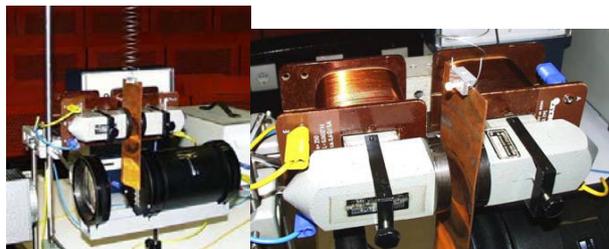


Abbildung 5.34: Gedämpftes Federpendel: Kupferblech als Wirbelstrombremse.

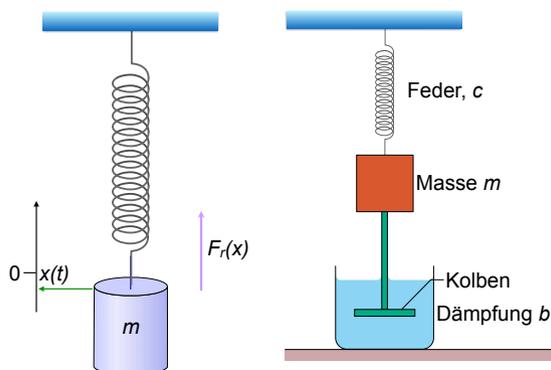


Abbildung 5.35: Federpendel: links ohne, rechts mit Reibung.

lators durch einen Reibungsterm ergänzt werden, der proportional zur Geschwindigkeit ist

$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x}.$$

Die standardisierte Form dieser Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \beta = \frac{b}{2m}, \omega_0^2 = \frac{c}{m}. \quad (5.4)$$

Die Größe β wird als Abklingkoeffizient bezeichnet.

Eine solche lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist immer lösbar mit dem Ansatz

$$x(t) = A e^{\lambda t}$$

in komplexer Schreibweise. Damit werden die Ableitungen

$$\dot{x}(t) = \lambda A e^{\lambda t} \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 A e^{\lambda t}.$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung (5.4) ergibt

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Damit reduziert sich die Lösung der Differenzialgleichung (5.4) auf das Auffinden von Nullstellen der algebraischen Gleichung

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm i\omega_s$$

mit

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (5.5)$$

Die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\beta t} (A_1 e^{i\omega_s t} + A_2 e^{-i\omega_s t}).$$

Physikalisch sinnvolle Lösungen müssen reell sein; dies ist dann der Fall, wenn die beiden Konstanten konjugiert komplex sind, $A_1 = A_2^*$. In diesem Fall kann der Ausdruck in der Klammer auf die Form $A \cos(\omega_s t + \phi)$ gebracht werden, sofern ω_s reell ist. In diesem Fall bleiben zwei reelle Parameter für die Amplituden, welche durch die beiden Anfangsbedingungen (z.B. Ort und Geschwindigkeit) bestimmt sind.

Die Art der Lösung wird durch die Wurzel ω_s bestimmt; man kann drei Bereiche unterscheiden, in denen ω_s reell, null oder imaginär ist, d.h.

$$\omega_0 > \beta, \omega_0 = \beta, \omega_0 < \beta.$$

Die drei Bereiche werden als schwache, kritische und überkritische Dämpfung bezeichnet und werden im folgenden einzeln behandelt.

5.4.3 Schwache Dämpfung, $\omega_0 > \beta$

Im Bereich der schwachen Dämpfung ist die Eigenfrequenz größer als die Dämpfungskonstante; das System verhält sich dann in erster Näherung wie ein ungedämpfter Oszillator mit abfallender Amplitude.

Die Lösung kann in diesem Bereich geschrieben werden als

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_s t + \phi),$$

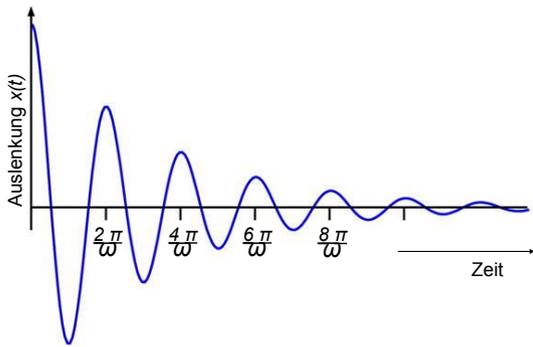


Abbildung 5.36: Gedämpfte Schwingung.

wobei die Amplitude x_0 und die Phase ϕ wiederum aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Wie in Abb. 5.36 gezeigt, fällt die Amplitude somit exponentiell ab, und die Schwingungsfrequenz ist niedriger als im ungedämpften Fall, $\omega_s < \omega_0$.

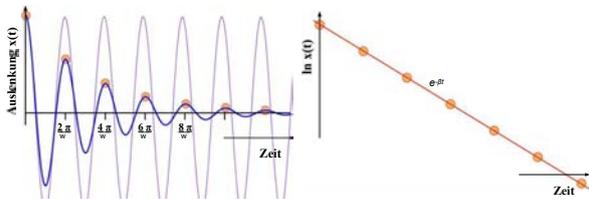


Abbildung 5.37: Abnahme der Amplitude einer gedämpften Schwingung (links) und semilogarithmische Darstellung als Funktion der Zeit (rechts).

Aus gemessenen Daten können die Parameter ω_s und β bestimmt werden. ω_s erhält man aus der Periode T ; der Abklingkoeffizient β kann durch Vergleich der Amplitude zu verschiedenen Zeiten ermittelt werden, wie in Abb. 5.37 gezeigt. Vergleicht man die Auslenkungen bei zwei Zeiten, welche sich um eine Periode unterscheiden, fällt der oszillatorische Teil heraus und man erhält

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = e^{-\beta T},$$

d.h.

$$\beta = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+T)} \right).$$

In der Praxis trägt man z.B. die Amplitude als Funktion der Zeit logarithmisch auf und bestimmt die Zerfallszeit aus einem linearen Fit, wie in Abb. 5.37 gezeigt.

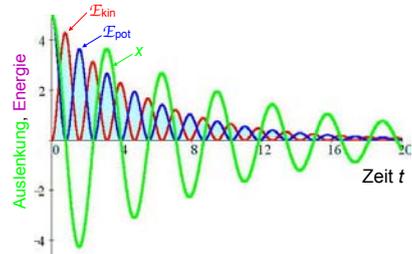


Abbildung 5.38: Abnahme der Amplitude einer gedämpften Schwingung (grün) und der gespeicherten kinetischen und potenziellen Energie.

Die Energie ist proportional zum Quadrat der Amplitude $x_0 e^{-\beta t}$, sie fällt somit mit der doppelten Rate ab:

$$\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_{tot}(0) e^{-2\beta t}.$$

Abb. 5.38 vergleicht die Oszillation und Dämpfung der Amplitude mit dem entsprechenden Verlauf der Energie.

5.4.4 Gedämpfte elektromagnetische Schwingungen

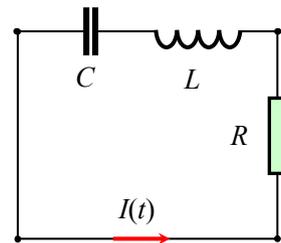


Abbildung 5.39: RLC-Schwingkreis.

Als ein Beispiel für gedämpfte Schwingungen betrachten wir den LRC Schwingkreis (\rightarrow Abb. 5.39). Er kann abgeleitet werden aus dem LC Kreis. Durch Zufügen eines Ohm'schen Widerstandes (der in jedem Schwingkreis existiert) er-

hält man eine modifizierte Maschenregel:

$$\begin{aligned} U_L + U_C + U_R &= 0 = L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI \\ &= L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}. \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit der allgemeinen Bewegungsgleichung (5.4) erhält man die Resonanzfrequenz des ungedämpften Systems:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Für den Abklingkoeffizienten erhält man

$$\beta = \frac{R}{2L}.$$

Der LRC Schwingkreis verhält sich ähnlich wie der LC Schwingkreis, ist aber gedämpft.

resp. den Gütefaktor

$$Q = \frac{1}{2D} = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

einzuführen, das Verhältnis von Dämpfungskonstante und Resonanzfrequenz, respektive seinen halben Kehrwert. Im Bereich der schwachen Dämpfung kann der Dämpfungsgrad den Wertebereich von $0 < D < 1$ annehmen, der Gütefaktor ist > 0.5 .

In natürlichen Systemen kommen sehr unterschiedliche Werte vor. Atomare Systeme z.B. können eine extrem geringe Dämpfung aufweisen. Übergänge, die für Atomuhren benutzt werden, haben Gütefaktoren von mehr als 10^{10} . Heute ist es auch möglich, makroskopische Systeme herzustellen, deren Gütefaktor von einer ähnlichen Größenordnung ist.

5.4.5 Überkritische Dämpfung (Kriechfall)

Wir betrachten jetzt den Fall, dass die Dämpfung größer ist als die Resonanzfrequenz,

$$\beta > \omega_0, \quad D > 1, \quad Q < 0,5.$$

Damit wird der Radikand $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$ in (5.5) und die Wurzel imaginär. Die allgemeine Lösung lautet in diesem Bereich

$$x(t) = e^{-\beta t} (c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}), \quad \omega = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2},$$

wobei $c_{1,2}$ Integrationskonstanten darstellen, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Das System nähert sich biexponentiell seinem Gleichgewicht.

In diesem Fall tritt keine Schwingung mehr auf, wie in Abb. 5.41 gezeigt. Es kann maximal einen Nulldurchgang aufweisen wenn die beiden Amplituden entgegengesetztes Vorzeichen aufweisen.

Das in Abb. 5.40 gezeigte Experiment ermöglicht es, durch Änderung eines Widerstandes zwischen den unterschiedlichen Bereichen zu wechseln.

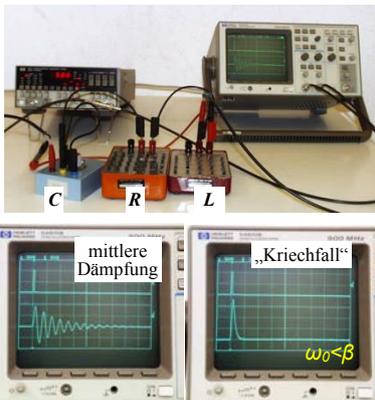


Abbildung 5.40: Unterschiedlich starke Dämpfung in einem RLC-Schwingkreis.

Man kann die unterschiedlichen Bereiche starker und schwacher Dämpfung im RLC System leicht durch Verändern eines Widerstandes einstellen. In Abb. 5.40 ist links ein schwach gedämpftes Signal gezeigt, welches durch einen elektrischen Puls angestoßen wird und danach etwa 50 Schwingungen durchführt. Die Situation im rechten Bild entspricht dem Fall $\omega_0 < \beta$.

Es ist nützlich, den Dämpfungsgrad

$$D = \frac{\beta}{\omega_0},$$

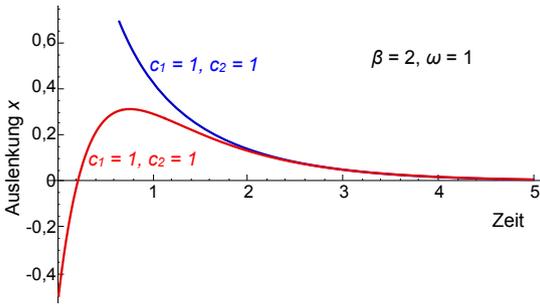


Abbildung 5.41: Zeitabhängigkeit im Bereich der überkritischen Dämpfung für 2 unterschiedliche Anfangsbedingungen.

5.4.6 Der aperiodische Grenzfall:

$$\omega_0 = \beta$$

Dies wird auch als der Fall der kritischen Dämpfung bezeichnet. Die Wurzel verschwindet und die beiden Eigenwerte sind entartet. In diesem Fall kann die Lösung der Differentialgleichung als

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\beta t}$$

geschrieben werden. Diese Situation führt dazu, dass der Gleichgewichtswert am schnellsten (näherungsweise) erreicht wird. Dies ist nützlich (und wird deshalb angestrebt) in Messgeräten, wo man den (Gleichgewichts) Messwert möglichst rasch erreichen möchte.

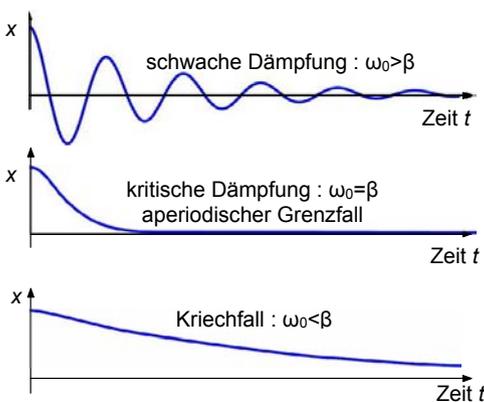


Abbildung 5.42: Zusammenfassung der drei Bereiche der Dämpfung.

Abb. 5.42 fasst die drei relevanten Fälle zusammen:

- Schwache Dämpfung ($\beta < \omega_0$)
- Der aperiodische Grenzfall oder kritische Dämpfung ($\beta = \omega_0$)
- Stärke Dämpfung oder Kriechfall ($\beta > \omega_0$)

5.5 Erzwungene Schwingung

Bis hierher wurden Systeme betrachtet, auf die keine äußere Kraft wirkt. Bei erzwungenen Schwingungen wird von außen eine periodische Kraft angelegt, welche dem System Energie zuführt.

5.5.1 Bewegungsgleichung

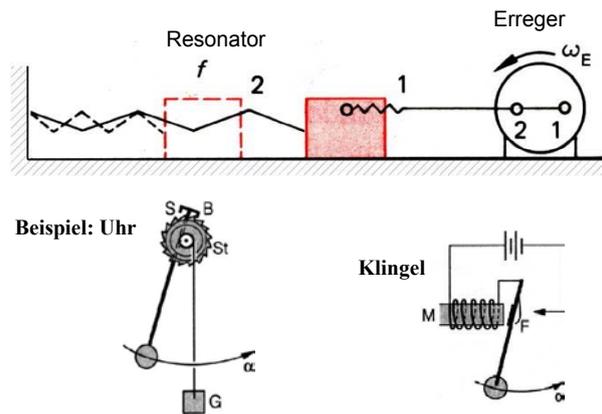


Abbildung 5.43: Schwingendes System mit äußerem Antrieb.

Abb. 5.43 zeigt typische Beispiele, wie eine Uhr oder eine Klingel. Im Uhrwerk stammt die Energie von einem Gewicht oder eine Feder. In einer Klingel wird eine elektromagnetische Kraft verwendet, welche durch die mechanische Bewegung ein und ausgeschaltet wird.

Abb. 5.44 zeigt als Beispiel ein Drehpendel, das über einen Exzenter angeregt wird.

Abb. 5.45 zeigt als weiteres Beispiel einen getriebenen LRC-Schwingkreis. Nach der Maschenregel muss die Spannung über dem Kreis verschwinden, also

$$U_E + U_C + U_L + U_R = 0,$$

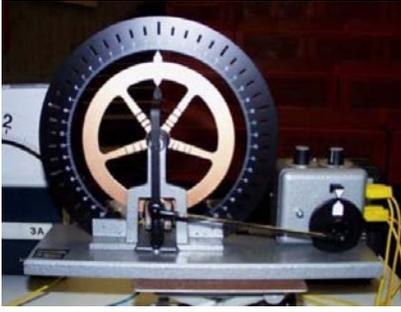


Abbildung 5.44: Pohl'sches Rad: Torsionschwinger mit äußerem Antrieb.

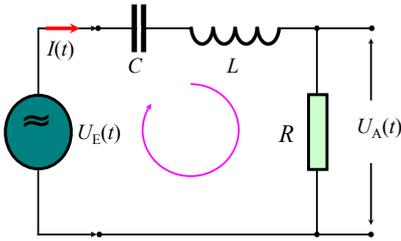


Abbildung 5.45: Getriebener LRC-Schwingkreis.

wobei die Messung der Spannung jeweils dem Uhrzeigersinn folgt. Dies kann als Bewegungsgleichung geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{Q(t)}{C} - L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) &= -U_E(t) \\ \frac{Q(t)}{C} - L \frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} &= -U_E(t). \end{aligned}$$

Alle oben gezeigten Beispiele können durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben werden:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{K(t)}{m}, \quad (5.6)$$

wobei $K(t)$ die äußere Kraft beschreibt, welche hier als periodisch angenommen wird.

5.5.2 Energiebillanz

Die äußere Kraft leistet am System Arbeit, so dass die Energie des Systems zu-, aber auch abnehmen kann. Dies hängt davon ab, ob die Kraft

in Richtung der Geschwindigkeit oder in entgegengesetzter Richtung wirkt. Die ins System hinein fließende Leistung P ist das Produkt aus Kraft $F = K(t)$ und Geschwindigkeit $v = \dot{x}$, $P = Fv$. Man erhält sie aus Gleichung (5.6) durch Multiplikation mit $m\dot{x}$:

$$P = K(t)\dot{x} = m\ddot{x}\dot{x} + 2\beta m\dot{x}^2 + \omega_0^2 m x \dot{x}. \quad (5.7)$$

Mit der Substitution $\omega_0^2 m = c$ und umschreiben des ersten und dritten Terms erhält man

$$P = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{c}{2} x^2 \right) + 2\beta m \dot{x}^2.$$

Die beiden Terme in der Klammer stellen gerade die kinetische und potenzielle Energie des schwingenden Systems dar. Die extern geleistete Arbeit fließt somit zum einen in die Änderung der mechanischen (kinetischen plus potenziellen) Energie, der Rest kompensiert die Reibungsverluste, die dem System Energie entziehen.

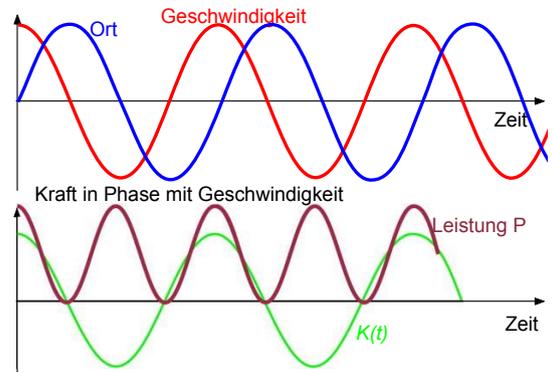


Abbildung 5.46: Oben: relative Phase von Ort und Geschwindigkeit. Unten: Ist die Kraft in Phase mit der Geschwindigkeit, so ist die zugeführte Leistung immer positiv.

Die zugeführte Leistung ist positiv wenn $K(t)$ und \dot{x} das gleiche Vorzeichen haben, d.h. wenn Kraft und Geschwindigkeit in Phase sind. Dieser Fall ist in Abb. 5.46 dargestellt.

Ist die Kraft hingegen mit dem Ort in Phase, also gegenüber der Geschwindigkeit 90 Grad außer Phase, so wird dem System abwechselnd Energie zugeführt und wieder entzogen. Über eine

Schwingung gemittelt verschwindet die zugeführte Energie.

Getriebene Schwingungen findet man nur bei gedämpften Systemen (d.h. $\beta > 0$ in Gl. (5.7)). Im stationären Zustand eines getriebenen Systems (\rightarrow Kap. 5.5.4) besteht ein Gleichgewicht zwischen der Energie, welche in einer Periode ins System hinein fließt und der Energie, welche in einer Periode durch Reibung in Wärme umgewandelt wird.

5.5.3 Lösungsweg

Die Bewegungsgleichung (5.6) ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die allgemeine Lösung eines solchen Systems wird durch zwei linear unabhängige Funktionen aufgespannt, welche zusammen zwei freie Parameter enthalten, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden. Der einfachste Weg zur allgemeinen Lösung folgt dem Rezept:

allgemeine Lösung der inhomogenen DGL
 = allgemeine Lösung der homogenen DGL
 + beliebige Lösung der inhomogenen DGL.

Die homogene Differentialgleichung entspricht dem freien harmonischen Oszillator, der in Kapitel 5.4 behandelt wurde. Die entsprechende Lösung bleibt

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\beta t} (A_1 e^{i\omega_s t} + A_2 e^{-i\omega_s t}) \\ &= e^{-\beta t} A \cos(\omega_s t + \phi) \\ \omega_s &= \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \end{aligned}$$

Jetzt benötigen wir zusätzlich eine (beliebige) Lösung der inhomogenen Gleichung.

5.5.4 Stationäre Lösung

Eine relativ einfache Lösung, die auch häufig von speziellem Interesse ist, ist die stationäre Lösung, d.h. der Zustand, der sich einstellt wenn die Anfangsbedingungen nicht mehr relevant sind (\rightarrow

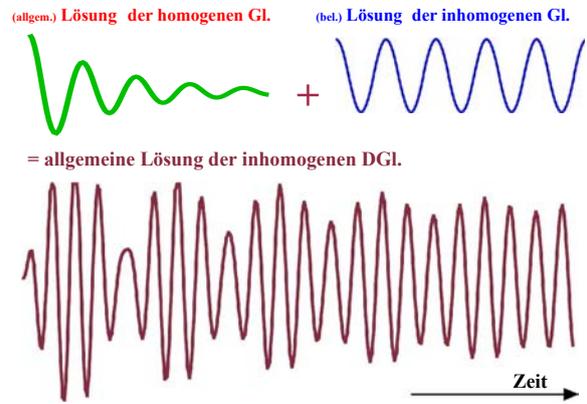


Abbildung 5.47: Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer beliebigen Lösung der inhomogenen Gleichung.

Abb. 5.47). Wir betrachten dafür nur eine spezielle Form der äußeren Kraft, nämlich eine harmonische Anregung. In komplexer Schreibweise lautet sie

$$K(t) = K_0 e^{i\omega t},$$

wobei die physikalische Kraft dem Realteil entspricht,

$$K_p(t) = K_0 \cos(\omega t).$$

Die Lösung erhält man aus dem Ansatz, dass das System der äußeren Kraft mit dessen Frequenz folgt, d.h.

$$x(t) = a(\omega) e^{i\omega t} = A(\omega) e^{i(\omega t + \phi)},$$

mit $a(\omega) = A(\omega) e^{i\phi(\omega)}$ als Amplitude in komplexer Schreibweise, und $A(\omega)$, $\phi(\omega)$ reelle Amplitude und Phase. Diese Parameter sind Funktionen der Anregungsfrequenz ω .

Für diesen Ansatz sind die Ableitungen

$$\dot{x}(t) = i\omega a(\omega) e^{i\omega t} = i\omega x(t), \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t).$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt

$$(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2)a(\omega) = \frac{K_0}{m}.$$

Auflösen nach a ergibt

$$a(\omega) = A(\omega)e^{i\phi(\omega)} = \frac{K_0}{m} \frac{1}{-\omega^2 + 2i\omega\beta + \omega_0^2}.$$

Dies ist bereits die Lösung in komplexer Schreibweise. Offenbar ist die Antwort des Systems proportional zur äußeren Anregung. Diese Proportionalität wird geschrieben als

$$a(\omega) = \frac{K_0}{m} Y(i\omega),$$

wobei

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2\beta s + \omega_0^2}$$

die komplexe Transferfunktion des Systems darstellt. Sie stellt das Verhältnis zwischen einer harmonischen äußeren Kraft und der Antwort des Systems dar. Diese einfache Beziehung gilt nur weil das System linear ist.

Die physikalische Auslenkung entspricht dem Realteil der komplexen Funktion

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \Re\{a(\omega)e^{i\omega t}\} \\ &= \Re\{a(\omega)\} \cos(\omega t) - \Im\{a(\omega)\} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Somit beschreibt der Realteil von $a(\omega)$ die In-Phase Komponente der Auslenkung, der Imaginärteil den Außer-Phase Teil.

Wir können Real und Imaginärteil erhalten, indem wir mit dem konjugiert-komplexen des Nenners erweitern:

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{K_0}{m} \frac{1}{-\omega^2 + 2i\omega\beta + \omega_0^2} \cdot \frac{-\omega^2 - 2i\omega\beta + \omega_0^2}{-\omega^2 - 2i\omega\beta + \omega_0^2} \\ &= \frac{K_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\beta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} \end{aligned}$$

Somit sind

$$\begin{aligned} \Re\{a(\omega)\} &= \frac{K_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} \\ -\Im\{a(\omega)\} &= \frac{K_0}{m} \frac{2\omega\beta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}. \end{aligned}$$

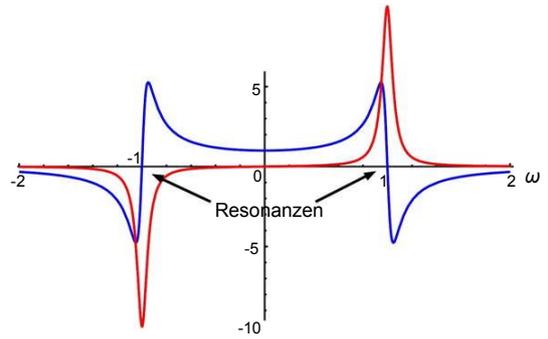


Abbildung 5.48: Realteil (blau) und Imaginärteil (rot) der Amplitude $a(\omega)$ als Funktion der Frequenz.

Offenbar ist dies im Wesentlichen eine Funktion der Frequenz ω , d.h. der Frequenz mit der die äußere Kraft oszilliert.

Mit

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)$$

findet man zwei Maxima bei $\omega = \pm\omega_0$, wie in Abb. 5.48 gezeigt.

Ein interessanter Grenzfall ist derjenige für kleine Frequenzen: Wenn die Frequenz der äußeren Anregung gegen Null geht, $\omega \rightarrow 0$, verschwindet offenbar der Imaginärteil gegen 0, $\Im\{a(0)\} = 0$ und der Realteil zu

$$\Re\{a(0)\} = \frac{K_0}{m} \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2)^2} = \frac{K_0}{m\omega_0^2} = \frac{K_0}{c}.$$

Die stationäre Auslenkung ist somit gerade durch die Federkonstante c gegeben, in Übereinstimmung mit dem Hooke'schen Gesetz und unserer Erwartung für den Fall einer zeitunabhängigen äußeren Kraft.

5.5.5 Resonante Anregung

In vielen Fällen interessiert man sich in erster Linie für das Verhalten in der Nähe der Resonanzen. Sind diese gut isoliert, d.h. ist die Dämpfung nicht zu groß, so kann man sie getrennt diskutieren. Mathematisch erreicht man das, indem man

$\omega \approx \omega_0$ setzt. Dadurch vereinfacht sich der Ausdruck im Nenner zu:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 &= (\omega_0 + \omega)^2(\omega_0 - \omega)^2 \\ &\approx 4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2. \end{aligned}$$

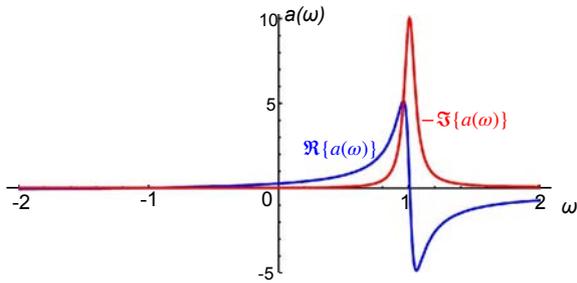


Abbildung 5.49: Resonanz bei positiven Frequenzen.

Wie Abb. 5.49 zeigt, betrachtet man dann nur noch den Beitrag der Resonanz bei positiven Frequenzen. Positive und negative Frequenzen können z.B. Rotationen in unterschiedliche Richtungen beschreiben. In der Figur sind Realteil und Imaginärteil der komplexen Amplitude als Funktion der Frequenz ω dargestellt für $K_0 = m$, $\omega_0 = 1$, $\beta = 0.05$. Wesentlich ist, dass es sich um ein resonantes Verhalten handelt: Der Realteil, also der in-Phase Teil wächst zunächst mit zunehmender Frequenz, bis er bei $\omega_0 - \beta$ ein Maximum erreicht. Mit weiter zunehmender Frequenz nimmt er wieder ab und geht auf der Resonanzfrequenz ω_0 durch 0. Hier erreicht jedoch der Imaginärteil sein Maximum. Die Breite der Resonanzlinie ist gegeben durch die Dämpfungskonstante β .

Bei resonanter Anregung, also für $\omega = \omega_0$ werden die Amplituden

$$\begin{aligned} \Re\{a(0)\} &= 0. \\ -\Im\{a(\omega)\} &= \frac{K_0}{m} \frac{2\omega_0\beta}{4\omega_0^2\beta^2} = \frac{K_0}{m} \frac{1}{2\omega_0\beta} \\ &= \frac{K_0}{c} \frac{\omega_0}{2\beta}. \end{aligned}$$

Der Realteil verschwindet also bei der Resonanzfrequenz, während der Imaginärteil sein Maximum erreicht. Das Maximum ist proportional

zum Verhältnis der äußeren Kraft zur Kraftkonstante des Systems, und zum Verhältnis der Resonanzfrequenz zur Dämpfung. Dieses Verhältnis wird auch als Gütefaktor des Systems bezeichnet und ergibt die Verstärkung der äußeren Anregung gegenüber dem statischen Fall ($\omega = 0$). Bei mechanischen Systemen ist es typischerweise in der Größenordnung von einigen 10 bis einigen 100. In atomaren Systemen kann diese Kreisgüte jedoch bis auf mehr als 10^{15} anwachsen. Entsprechend ist die Resonanzüberhöhung dort extrem groß.

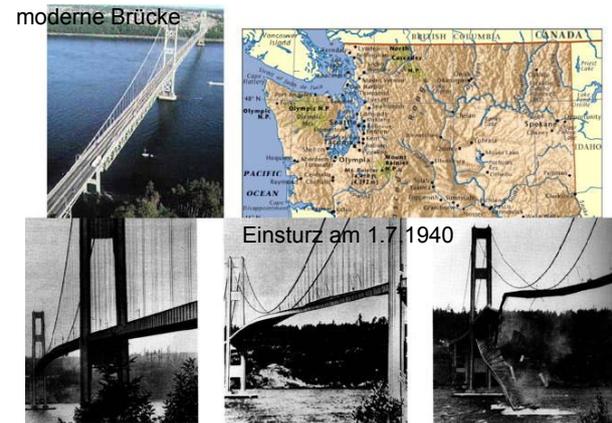


Abbildung 5.50: Zerstörung der Tacoma Narrows Bridge durch resonante Anregung.

Die Amplitude einer Schwingung kann sehr groß werden und zur Zerstörung des Objektes führen. Ein berühmter Fall ist die Zerstörung der Tacoma Narrows Brücke bei Seattle, im Sommer 1940, wie in Abb. 5.50 gezeigt.

5.5.6 Absolutbetrag und Phase

Man kann die Auslenkung auch in Absolutbetrag und Phase aufteilen:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{\Re\{a(\omega)\}^2 + \Im\{a(\omega)\}^2} \\ &= \frac{K_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \end{aligned}$$

und

$$\tan \phi = -\frac{\Im\{a(\omega)\}}{\Re\{a(\omega)\}} = -\frac{2\beta\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

Offenbar erreicht der Absolutbetrag sein Maximum für $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

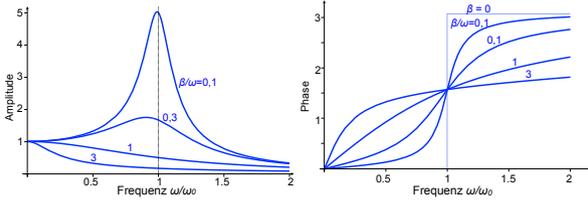


Abbildung 5.51: Absolutbetrag und Phase der Resonanz für unterschiedlich starke Dämpfung.

Abb. 5.51 zeigt Amplitude und Phase für die gleichen Parameter wie oben. Die Amplitude erhält offenbar eine starke Überhöhung in der Nähe der Resonanzfrequenz $\omega = \omega_0$. Für kleinere Frequenzen ist die Phase 0, d.h. das System schwingt in Phase mit der äußeren Anregung. Auf der Resonanz beträgt die Phase $\pi/2$, und für größere Frequenzen hinkt das System um 180 Grad hinter der Anregung her.

Das Verhalten kann im Experiment schön gezeigt werden, z.B. wenn ein Pendel mit einem Motor mit variabler Frequenz angetrieben wird. Bei kleinen Geschwindigkeiten schwingt das Pendel in Phase mit der äußeren Kraft; die Amplitude bleibt klein. Wenn wir die Geschwindigkeit des Motors, d.h. die Drehzahl, resp. Frequenz, erhöhen, gelangen wir in die Nähe der Resonanzfrequenz, wo die Auslenkung des Pendels sehr groß wird.

Bei geringer Dämpfung fällt das Maximum der Amplitude mit der Phasenverschiebung um $\pi/2$ zusammen und die Resonanzlinie sehr schmal. Dies folgt direkt aus der Energiebilanz von Kapitel 5.5.2: hier sind Geschwindigkeit und Kraft in Phase, so daß am meisten Leistung in das System hinein fließt. Mit zunehmender Dämpfung wird das Maximum niedriger und breiter, ebenso der Phasenwechsel. Die Resonanzfrequenz, also die Frequenz, bei der die Amplitude maximal wird, sinkt mit zunehmender Dämpfung.

5.5.7 Einschwingvorgang

Nachdem wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (der freie gedämpfte harmonische Oszillator) und eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (die stationäre Lösung) diskutiert haben, können wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung als Summe der beiden diskutieren. Der freie gedämpfte Oszillator führt eine Schwingung mit der Resonanzfrequenz durch, welche exponentiell gedämpft ist. Die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist die stationäre Lösung, d.h. eine Schwingung mit konstanter Amplitude und der Frequenz der äußeren Störung.

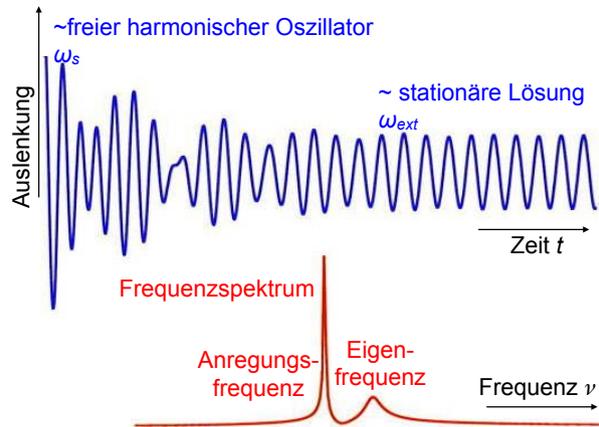


Abbildung 5.52: Einschwingverhalten eines gedämpften harmonischen Oszillators.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung entspricht somit einer Superposition dieser beiden Lösungen. Für lange Zeiten sollte das System sich dem stationären Zustand nähern. Für kurze Zeiten wird sich das System ähnlich wie der freie Oszillator bewegen, wie in Abb. 5.52 gezeigt. In diesem Bereich erwartet man eine Überlagerung der freien Schwingung mit der getriebenen, und damit eine Schwebung.

Dieses Verhalten kann gut beobachtet werden, wenn wir bei der getriebenen Schwingung die Dämpfung gering halten. Der Einschwingvorgang, der bei der Frequenz des freien Oszillators liegt, überlagert sich der Schwingung, mit der

das System der externen Anregung folgt. Berechnet man die Fouriertransformierte des in Abb. 5.52 gezeigten Signals, so findet man zwei Frequenzen: die Eigenfrequenz des Systems, mit der es während des Einschwingvorgangs schwingt, sowie die Frequenz der äußeren Anregung, der es im stationären Zustand folgt.

5.6 Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden

5.6.1 Das Doppelpendel

Wir betrachten nun nicht mehr einzelne, unabhängige harmonische Oszillatoren, sondern mehrere, die aneinander gekoppelt sind.



Abbildung 5.53: Zwei gekoppelte Pendel.

Abb. 5.53 zeigt zwei über eine Feder aneinander gekoppelte Pendel. Stößt man eines davon an, so beginnt zunächst nur dieses zu schwingen, doch auf einer etwas längeren Zeitskala wird seine Energie auf das andere übertragen. Die Schwingung des ersten Pendels wird dabei gedämpft bis es ganz still steht, diejenige des zweiten Pendels baut sich auf, bis der Vorgang sich umkehrt. Offenbar wird hier Energie von einem Pendel auf das andere übertragen.

Ein ähnliches System besteht aus zwei über Federn gekoppelten Massen, wie in Abb. 5.54 gezeigt. Um eine Bewegungsgleichung für dieses System zu erhalten gehen wir aus vom freien, ungedämpften harmonischen Oszillator. Im Vergleich

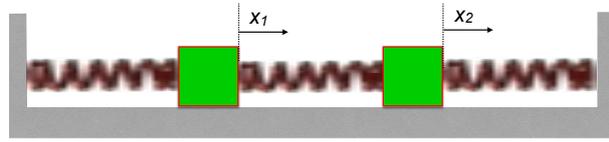


Abbildung 5.54: 2 gekoppelte Massenpunkt.

dazu erhalten wir in diesem Fall eine zusätzliche rückstellende Kraft für jeden der beiden einzelnen Pendel, welche proportional zur Differenz der beiden Auslenkungen ist:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\omega_0^2 x_1 + \kappa(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_2 + \kappa(x_1 - x_2).\end{aligned}$$

Offenbar ergibt sich ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen.

Im Allgemeinen kann man Systeme von gekoppelten linearen Differentialgleichungen lösen, indem man die Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt. In diesem Fall handelt es sich um ein speziell einfaches System: Die Eigenfunktionen ergeben sich aus der Summe und der Differenz dieser beiden Gleichungen :

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2 &= \ddot{\xi}_1 = -\omega_0^2(\phi_1 + \phi_2) = -\omega_0^2 \xi_1. \\ \ddot{\phi}_1 - \ddot{\phi}_2 &= \ddot{\xi}_2 = -\omega_0^2(\phi_1 - \phi_2) + 2\kappa(\phi_2 - \phi_1) \\ &= -(\omega_0^2 + 2\kappa)\xi_2.\end{aligned}$$

Somit haben wir zwei voneinander unabhängige Differentialgleichungen für die Variablen $\xi_1 = \phi_1 + \phi_2$ und $\xi_2 = \phi_1 - \phi_2$ gefunden, welche jeweils einem harmonischen Oszillator entsprechen. Somit sind die Lösungen für diese beiden Variablen

$$\phi_1 + \phi_2 = \xi_1 = A e^{i(\omega_0 t + \phi_1)},$$

wobei Amplitude A und Phase ϕ_1 durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind.

Die zweite Mode ist die antisymmetrische, bei der die beiden Pendel in entgegengesetzte Richtung schwingen. Für sie findet man

$$\phi_1 - \phi_2 = \xi_2 = B e^{i(\omega_2 t + \phi_2)}$$

mit

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \sqrt{\omega_0^2 + 2\kappa} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2\kappa}{\omega_0^2}} \\ &\approx \omega_0 \left(1 + \frac{\kappa}{\omega_0^2} \right). \end{aligned}$$

Die Näherung gilt für schwache Kopplung, $\kappa \ll \omega_0^2$. Die zweite Frequenz liegt somit immer höher als die Frequenz für die symmetrische Mode. Die Erhöhung wird durch das Verhältnis aus Kopplungsstärke und Modenfrequenz bestimmt.

5.6.2 Eigenschwingungen

Die beiden Lösungen entsprechen offenbar Zuständen des Systems, in denen es mit einer einzelnen Frequenz schwingt. Man bezeichnet diese speziellen Schwingungstypen als Normalmoden oder Normalschwingungen des Systems. Es ist möglich, Normalmoden gezielt anzuregen, indem man die Anfangsbedingungen geeignet wählt. Eine daran anschließende freie Oszillation des Systems kann dann durch diese Normalschwingung allein beschrieben werden.

Wir betrachten zunächst den Fall

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= \phi_2(0) = \phi_0 \\ \dot{\phi}_1(0) &= \dot{\phi}_2(0) = 0, \end{aligned}$$

d.h. den Fall, dass beide Pendel zur gleichen Seite ausgelenkt werden und aus der Ruhe losgelassen werden. Eingesetzt in die obigen Lösungen für ξ_1 und ξ_2 finden wir

$$\phi_1 + \phi_2 = \xi_1 = 2\phi_0 e^{i\omega_0 t}, \quad \phi_1 - \phi_2 = \xi_2 = 0$$

oder

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_0 e^{i\omega_0 t},$$

d.h. beide Pendel schwingen mit der gleichen Frequenz, gleicher Amplitude und gleicher Phase, wie in Abb. 5.55 gezeigt. Die Kopplungsfeder ist

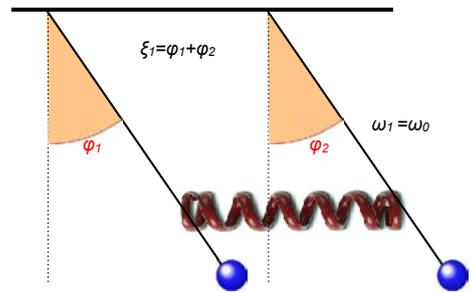


Abbildung 5.55: Eine der Eigenmoden des Systems.

in diesem Fall entspannt und hat deshalb keinen Einfluss auf das System.

Als nächstes betrachten wir den Fall, dass die beiden Pendel in entgegengesetzte Richtung ausgelenkt und aus der Ruhe losgelassen werden,

$$\phi_1(0) = -\phi_2(0) = \phi_0; \quad \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0.$$

Aus dieser Anfangsbedingung erhalten wir

$$\phi_1 - \phi_2 = \xi_2 = 2\phi_0 e^{i\omega_2 t}, \quad \phi_1 + \phi_2 = 0$$

oder

$$\phi_1 = -\phi_2 = \phi_0 e^{i\omega_2 t}.$$

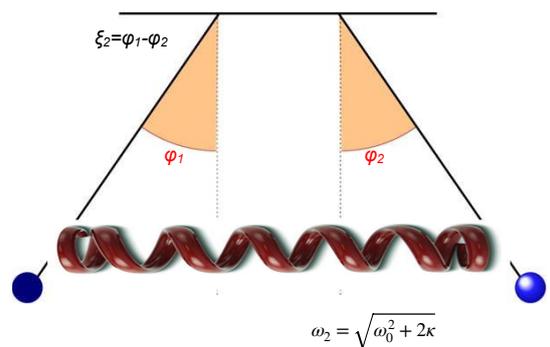


Abbildung 5.56: Antisymmetrische Eigenmoden des Systems.

Somit bewegen sich in diesem Fall beide Pendel mit gleicher Frequenz und Amplitude, diesmal aber in Gegenphase, wie in Abb. 5.56 gezeigt. Dadurch ist die Feder in diesem Fall maximal gespannt, so dass die rücktreibende Kraft auf beide Pendel um den entsprechenden Wert größer wird.

5.6.3 Schwebungen

Als dritten Fall betrachten wir die Situation, dass einer der beiden Pendel ausgelenkt wird, während der andere in der Gleichgewichtslage ist, und beide zunächst in Ruhe, d.h.

$$\phi_1(0) = \phi_0, \quad \phi_2(0) = 0, \quad \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0.$$

In den Variablen ξ_1 und ξ_2 muss die zeitliche Entwicklung somit

$$\phi_1 + \phi_2 = \xi_1 = \phi_0 e^{i\omega_0 t}$$

$$\phi_1 - \phi_2 = \xi_2 = \phi_0 e^{i\omega_2 t}$$

sein. Die Auslenkung der beiden Pendel wird damit

$$\phi_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} = \frac{\phi_0}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_2 t})$$

$$\phi_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2} = \frac{\phi_0}{2} (e^{i\omega_0 t} - e^{i\omega_2 t}).$$

In reeller Schreibweise entspricht dies für

$$\phi_1 = \frac{\phi_0}{2} (\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_2 t)).$$

Mit Hilfe des Additionstheorems

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

und

$$\omega_2 \approx \omega_0 \left(1 + \frac{\kappa}{2\omega_0^2} \right)$$

können wir dies umformen zu

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_0 \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \\ &= \phi_0 \cos \left(\omega_0 \left(1 + \frac{\kappa}{2\omega_0^2} \right) t \right) \cos \left(\frac{\kappa}{2\omega_0} t \right). \end{aligned}$$

Für das zweite Pendel erhalten wir entsprechend

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \frac{\phi_0}{2} [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] \\ &= \phi_0 \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \\ &= \phi_0 \sin \left(\omega_0 \left(1 + \frac{\kappa}{2\omega_0^2} \right) t \right) \sin \left(\frac{\kappa}{2\omega_0} t \right). \end{aligned}$$

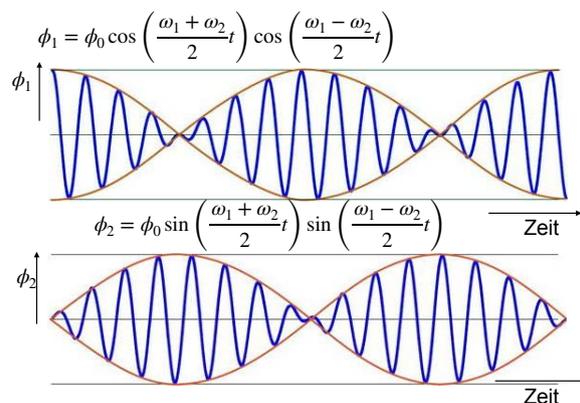


Abbildung 5.57: Amplituden der beiden Pendel als Funktion der Zeit.

Abb. 5.57 zeigt die beiden Amplituden als Funktion der Zeit. Offenbar schwingen beide Pendel jetzt mit der mittleren Frequenz $(\omega_0 + \omega_2)/2$, wobei die Amplitude noch mit der halben Differenzfrequenz $\kappa/2\omega_0^2$ moduliert ist. Man bezeichnet diese Erscheinung als Schwebung.

5.6.4 Gekoppelte elektronische Schwingkreise

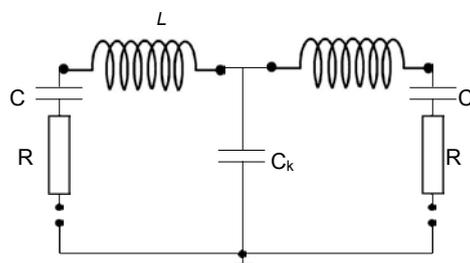


Abbildung 5.58: Gekoppelte elektrische Schwingkreise.

Wie mechanische Schwingkreise können auch elektronische Schwingkreise gekoppelt werden. Wir betrachten als Beispiel das in Abb. 5.58 gezeigte System von zwei kapazitiv (d.h. über einen Kondensator) gekoppelten Schwingkreisen. Die beiden Schwingkreise sind unabhängig voneinander sofern der Kopplungskondensator C_k sehr groß wird: in diesem Fall wirkt er als Kurzschluss und der Punkt zwischen den beiden Spulen ist auf dem Potenzial der Masse. Jeder der beiden

Schwingkreise entspricht dann einem unabhängigen harmonischen Oszillator. Ist der Widerstand R klein, so beträgt die Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Unter Berücksichtigung des Kopplungskondensators können wir die eine Eigenmode des Systems finden, wenn wir den Fall betrachten wo das System symmetrisch schwingt, d.h. über den entsprechenden Komponenten auf beiden Seiten liegt jeweils die gleiche Spannung an. Aus Symmetriegründen hat der Kopplungskondensator dann keine Wirkung. Das gesamte System besitzt dann die Eigenfrequenz

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2L\frac{1}{2}C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0.$$

Sind die beiden Kreise im Gegentakt, fließt der Strom also durch den Kondensator C_k , so wird die gesamte Kapazität des Schwingkreises

$$C_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{2C} + \frac{1}{C_k}} = \frac{2CC_k}{2C + C_k}.$$

Damit wird die Resonanzfrequenz

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}LC_{tot}}} = \frac{1}{\sqrt{L\frac{CC_k}{2C+C_k}}}.$$

Wird der Kopplungskondensator sehr groß, erhalten wir daraus wieder die Frequenz ω_0 . Für sehr kleine Kopplungskondensatoren dominiert er und die zweite Resonanzfrequenz wächst auf

$$\omega_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC_k/2}}.$$

Offenbar kann diese Frequenz sehr hoch werden.

Man kann die beiden Resonanzfrequenzen im Experiment beobachten indem man eine variable Wechselspannung anlegt und die Spannung über einer der beiden Spulen abgreift. Abb. 5.59 zeigt das Resultat als Oszilloskop-Bild. Für große Werte des Kopplungskondensators werden die beiden Resonanzfrequenzen praktisch identisch.

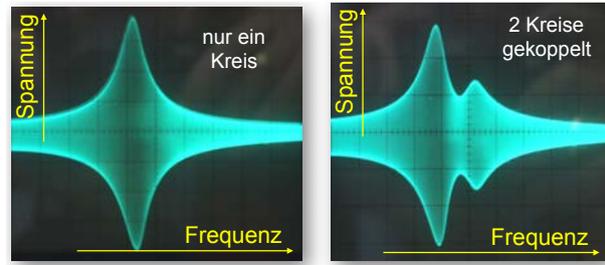


Abbildung 5.59: Gemessene Anregungsamplitude als Funktion der Frequenz.

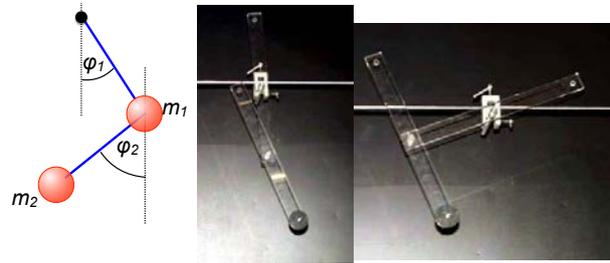


Abbildung 5.60: Chaotisches Doppelpendel.

Für kleine Werte nimmt die zweite Resonanzfrequenz stark zu.

Die hier besprochenen Beispiele beschränken sich auf die einfachsten Systeme, in denen die Kopplung relativ schwach ist und keine starke Änderung des Verhaltens bewirkt. Es gibt jedoch auch viele interessante Systeme, bei denen dies nicht der Fall ist. Abb. 5.60 zeigt als Beispiel zwei stark gekoppelte Systeme. In diesem Fall wird das Verhalten sehr stark gestört: man findet ein chaotisches Verhalten, d.h. das die Bewegung kann nur noch über kurze Zeitintervalle berechnet werden, da sich schon sehr kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen durch die zeitliche Entwicklung exponentiell größer werden.

5.6.5 Transversalschwingungen

In Systemen mit mehreren Freiheitsgraden kann die Auslenkung nicht nur entlang der Achse erfolgen, wie in Abb. 5.54, sondern auch senkrecht dazu, wie in Abb. 5.61 gezeigt. Man spricht im bisher diskutierten Fall von Longitudinalschwingungen, im Fall von Abb. 5.54 von Transversal-

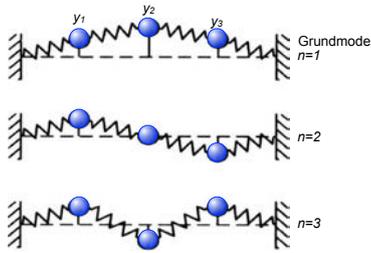


Abbildung 5.61: Unterschiedliche Moden einer Transversalschwingung.

schwingungen. Genauer dazu wird im Kapitel [6](#) (Wellen) diskutiert. In den meisten Fällen existieren zwei voneinander unabhängige transversale Schwingungsmoden.

Eine zweidimensionale Schwingung kann man z.B. auf dem Luftkissentisch realisieren. In vielen Fällen ist es jedoch möglich, die beiden Dimensionen zu trennen und die Bewegungsgleichungen getrennt zu diskutieren. Wenn wir bei solchen Schwingungen zum kontinuierlichen Grenzfall übergeht, erhält man die Schwingungen einer Saite. Diese werden ebenfalls im Kapitel [6](#) "Wellen" genauer diskutiert werden. Qualitativ soll jedoch das Ergebnis hier vorweggenommen werden: Es gibt unendliche viele Eigenschwingungen, welche die Form

$$y_n = \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \cos(\omega_n t)$$

besitzen. Hier stellt n eine laufende Zahl dar, welche die Eigenschwingungen ordnet, x die Koordinate entlang der Saite, L ihre Länge, und ω_n die Eigenfrequenz der Schwingung. Jede Eigenmode entspricht einer harmonischen Auslenkung der Saite, und die Auslenkung zeigt eine harmonische Zeitabhängigkeit.

Da die Saite am Rand eingespannt ist verschwindet dort die Auslenkung immer, ebenso an den dazwischen liegenden Knoten, also den Nulldurchgängen der Auslenkung. [Abb. 5.62](#) zeigt zwei dieser Eigenmoden. Die n -te Eigenmode besitzt $n - 1$ Knoten¹. Die Frequenzen sind Vielfa-

¹Die genaue Zahl hängt (i) von den Randbedingungen ab und (ii) davon, ob man die Ränder selbst mit rechnet. Auf jeden Fall hat die n -te Mode einen Knoten mehr als die $n - 1$ te Mode.

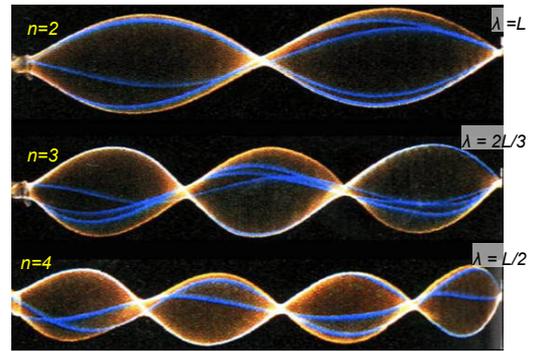


Abbildung 5.62: Unterschiedliche Eigenmoden einer eingespannten Saite.

che der Grundfrequenz, d.h.

$$\omega_n = n\omega_1,$$

und die Grundfrequenz ω_n ist indirekt proportional zur Länge der Saite. Je länger eine Saite desto niedriger somit die Frequenz. Dies ist ein Grund dafür, dass tiefe Töne von großen Musikinstrumenten erzeugt werden.

5.6.6 Schwingungen von mehrdimensionalen Systemen

Ähnliche Schwingungen treten auch in mehrdimensionalen Systemen auf. Ein klassisches Beispiel sind die Schwingungen einer Membran. Unter einer Membran versteht man ein zweidimensionales schwingungsfähiges System. Dazu gehören z.B. Trommeln, wo eine elastische Membran am Rand eingespannt ist.

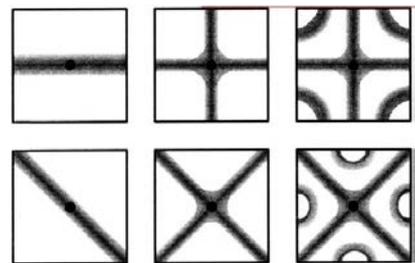


Abbildung 5.63: Knotenlinien von unterschiedlichen Membranschwingungen.

[Abb. 5.63](#) zeigt das Resultat eines Experiments, bei dem die "Membran" eine Platte aus Metall

oder Glas ist, welche im Zentrum eingespannt ist. Mit Hilfe eines Geigenbogens werden Schwingungen angeregt. Diese können sichtbar gemacht werden, indem Sand auf die Oberfläche gestreut wird. Die Schwingung entspricht einer periodischen Auslenkung, bei der Teile der Membran sich nach oben verbiegen, andere nach unten. Nach einer halben Periode ist die Auslenkung umgekehrt. Es existieren jedoch Linien auf der Membran, welche nie ausgelenkt werden. Diese werden als Knotenlinien bezeichnet. Entlang der Knotenlinien sammelt sich der Sand und macht diese so sichtbar. Je größer die Anzahl der Knotenlinien, desto höher die Frequenz der entsprechenden Moden.

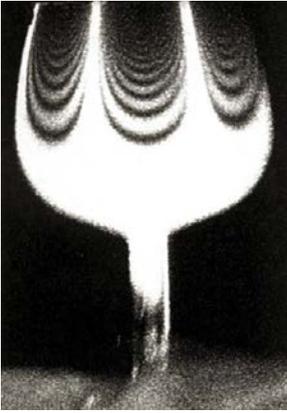


Abbildung 5.64: Schwingung eines Weinglases.

Moden existieren in jedem schwingungsfähigen System. In Abb. 5.64 sind die Moden in einem Weinglas dargestellt, welche z.B. durch akustische Wellen angeregt werden können.

5.6.7 Akustische Schwingungen, Musikinstrument

Dreidimensionale Schwingungen in kontinuierlichen Medien sind z.B. akustische Schwingungen in Musikinstrumenten. Ein Beispiel für ein einfaches Musikinstrument ist eine Flasche, in der man durch blasen die Luftsäule zu Schwingungen anregt.

Akustische Schwingungen sind hörbar wenn sie sich in einem Frequenzbereich von ca. 20 Hz bis

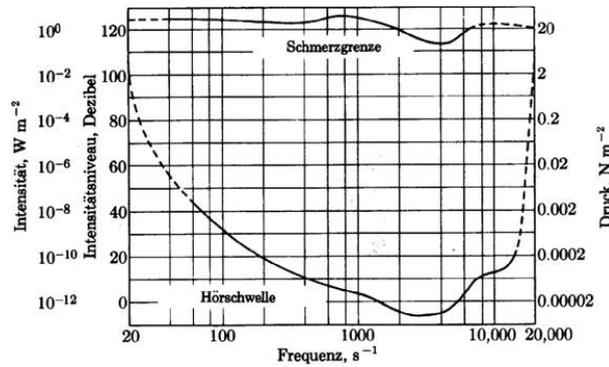


Abbildung 5.65: Hörschwelle und Schmerzgrenze des menschlichen Ohrs als Funktion der Frequenz.

15 kHz befinden. Abb. 5.65 zeigt für diesen Bereich die Empfindlichkeit des menschlichen Ohrs.

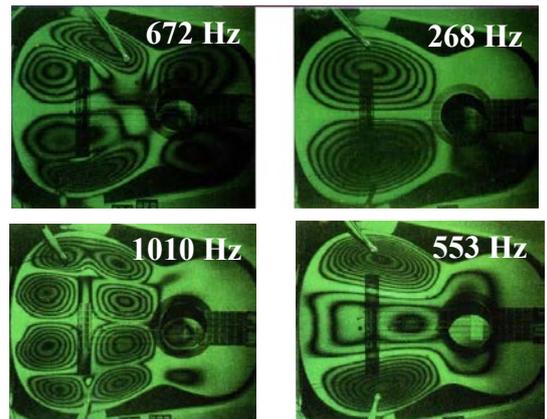


Abbildung 5.66: Schwingungsmoden einer Gitarre.

Schwingungen können in Musikinstrumenten ähnlich wie in den gezeigten Membranen angeregt werden. Jedes Musikinstrument hat entsprechend eine Reihe von Eigenschwingungen. Zwar können z.B. bei einer Geige alle Töne erzeugt werden, doch werden nicht alle gleich gut wiedergegeben. Die Kombination der Eigenmoden ist für den Klang eines Instrumentes verantwortlich. Abb. 5.66 zeigt als Beispiel einige Schwingungsmoden einer Gitarre. Wie eine Geige oder Gitarre gebaut werden muss, um einen gewünschten Klang zu erhalten, war lange Zeit ein kaum nachvollziehbares Geheimnis der Instrumentenbauer.

Nicht nur die Form des Instrumentes ist wichtig, da sie die Lage der Moden bestimmt, auch das Material, welches z.B. die Dämpfung und damit die Breite der Resonanzen mitbestimmt.

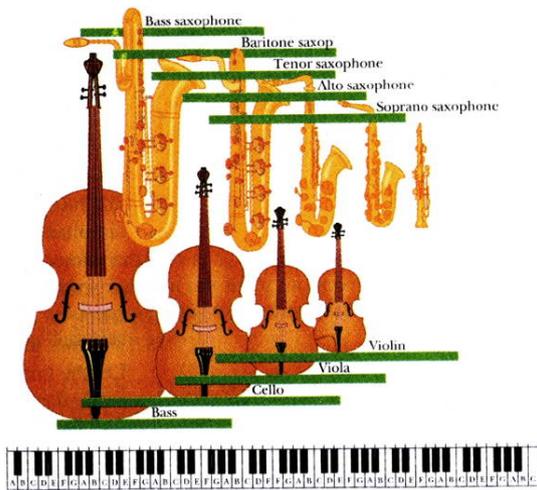


Abbildung 5.67: Tonhöhe von Instrumenten unterschiedlicher Größe.

Allgemein gilt, dass größere Instrumente tiefere Töne ergeben, wie in Abb. 5.67 gezeigt. Dieser Zusammenhang wird ebenfalls im Kapitel 6 Wellen noch diskutiert.