

2 Mechanik

2.1 Kinematik

2.1.1 Grundbegriffe

Die Mechanik ist der “klassischste” Teil der Physik, sie umfasst diejenigen Aspekte die schon am längsten untersucht wurden.



Abbildung 2.1: Galileo Galilei (1564-1642)

Zu den wichtigsten Begründern gehört Galileo Galilei (→ Abb. 2.1), der wichtige Beiträge zur experimentellen Untersuchung von Naturgesetzen (Mechanik, Astronomie) lieferte und vor allem sehr geschickt war, deren Bedeutung und seine Beiträge dazu öffentlichkeitswirksam zu verbreiten. Zu den wichtigsten Beispielen gehören seine Fallversuche, mit denen er zeigte, dass die Fallgeschwindigkeit für alle Körper gleich ist.

Für die Verbreitung seiner Ideen verwendete er vor allem seine “Dialoge” (→ Abb. 2.2), in denen fiktive Personen seine theoretischen Konzepte mit älteren Vorstellungen verglichen.

Die eigentliche Formalisierung der Mechanik ist vor allem Isaac Newton (→ Abb. 2.3) zu verdanken, welcher mit Hilfe weniger Grundprinzipien (“Newtons Gesetzen”) den größten Teil des damaligen physikalischen und astronomischen Wissens herleiten konnte. Sein Hauptwerk sind die “Philosophiae na-



Abbildung 2.2: Titelseiten von Galileos Dialog über die Weltsysteme.

turalis principia mathematica”, also die mathematischen Grundlagen der Naturwissenschaft.

Die Mechanik kann aufgeteilt werden in die Gebiete

Statik: Zusammensetzung und Gleichgewicht von Kräften.

Kinematik: Die Kinematik beschreibt Bewegungsprozesse quantitativ. Dabei wird die Ursache der Bewegung nicht untersucht.

Dynamik: Effekt von Kräften auf die Bewegungsprozesse.

Außerdem unterscheidet man Teilgebiete danach, welche Objekte beschrieben werden. Im Folgenden werden die meisten Konzepte mit Hilfe eines stark idealisierten Modells diskutiert, dem Massenpunkt. Weitere Klassen von Objekten sind starre und deformierbare Körper.

2.1.2 Eindimensionale Kinematik

Wir beginnen mit eindimensionaler Kinematik, d.h. mit einer Bewegung, welche mit einer einzigen Ortskoordinate beschrieben werden kann, welche die Po-



Abbildung 2.3: Isaac Newton (1642-1727).

sition des Körpers auf einer vorgegebenen Bahn beschreibt. Ein typisches Beispiel ist eine Eisenbahn auf einem einzelnen Gleis: dieses kann gebogen sein, aber die Position der Eisenbahn ist exakt bestimmt wenn man die Position bezüglich einem Koordinatennullpunkt angibt.

Ein Massenpunkt ist ein Modell für einen Körper, dessen Ausdehnung für die behandelte Fragestellung keine Rolle spielt. Die Bewegung des Massenpunktes ist vollständig beschrieben, wenn man die Position s als Funktion der Zeit t angibt. Dies erfolgt mathematisch durch eine Funktion $s(t)$ oder graphisch durch ein Weg-Zeit Diagramm.

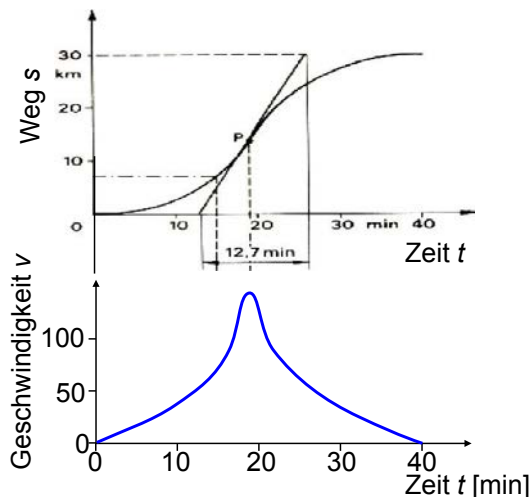


Abbildung 2.4: Weg-Zeit Diagramm.

Die Geschwindigkeit v des Massenpunktes kann aus

dem Weg-Zeit Diagramm (\rightarrow 2.4) durch Ableitung bestimmt werden:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad [v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Graphisch ist die Geschwindigkeit durch die Steigung der Kurve im Weg-Zeit Diagramm bestimmt.

Anstelle der instantanen Geschwindigkeit $v(t)$ interessiert manchmal auch die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Im Weg-Zeit Diagramm ist dies die Steigung der direkten Verbindung zwischen zwei Punkten.

Anstelle des Weges kann man auch die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit auftragen. Im Geschwindigkeit-Zeit Diagramm ist die zurückgelegte Wegstrecke als Integral (=Fläche unter der Kurve) gegeben:

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(t') dt'.$$

Analog zur Definition der Geschwindigkeit als Änderung des Ortes pro Zeiteinheit wird die Beschleunigung als Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit definiert:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad [a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Im Geschwindigkeit-Zeit Diagramm erscheint die Beschleunigung als Steigung der Kurve, im Ort-Zeit Diagramm als Krümmung: Positive Krümmung (nach oben) bedeutet positive Beschleunigung, negative Krümmung Verzögerung (d.h. Abbremsung). Die Geschwindigkeit ist durch das Integral der Beschleunigung gegeben:

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t') dt'.$$

Der Weg ist dementsprechend

$$s(t) = s(0) + v(0)t + \frac{a}{2}t^2.$$

2.1.3 Konstante Beschleunigung

Ein wichtiger Spezialfall ist die konstante Beschleunigung, $a(t) = a$. Dazu gehört u. a. der freie Fall. Für einen Körper, der sich zunächst in Ruhe ($v_0 = 0$) am Punkt $s(0) = 0$ befindet nimmt die Geschwindigkeit bei konstanter Beschleunigung proportional zur Zeit zu, $v(t) = at$. Der zurückgelegte Weg ist deshalb

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2. \quad (2.1)$$

Auf der Erdoberfläche wirkt auf alle Körper eine konstanten Beschleunigung nach unten mit $a = -g = -9,81 \text{ ms}^{-2}$ für ein Koordinatensystem, das senkrecht nach oben zeigt.

Wir erwarten somit, dass der zurückgelegte Weg quadratisch mit der Zeit ansteigt. Im Ausdruck (2.1) ist die Masse nicht enthalten, es fallen also alle Objekte mit der gleichen Beschleunigung und mit der gleichen (zeitabhängigen) Geschwindigkeit.

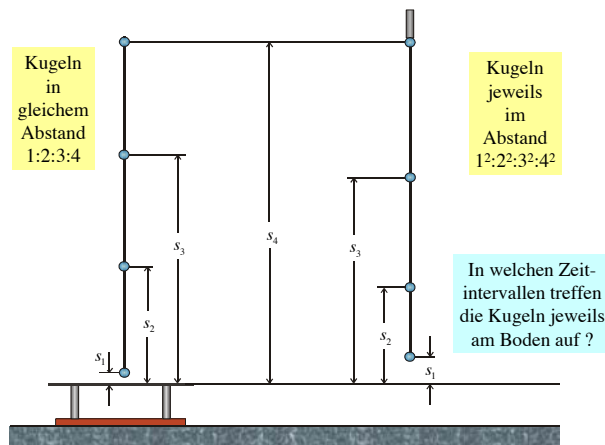


Abbildung 2.5: Experiment zum freien Fall: Es sind jeweils Gewichte in unterschiedlicher Höhe montiert. Sie werden gleichzeitig fallen gelassen.

Wir verifizieren die Vorhersage (2.1) anhand eines Experimentes. Jeweils vier Gewichte werden in unterschiedlicher Höhe über dem Boden aufgehängt und gleichzeitig losgelassen (\rightarrow Abb. 2.5). An der ersten Schnur sind die Gewichte im Abstand 0:1:2:3 (d.h. linear) angebracht : $h_i=(0; 1,6; 3,2; 4,8)$ m. Werden diese gleichzeitig fallen gelassen, so erreichen

sie den Boden nach einer Zeit

$$t_i = \sqrt{\frac{2h_i}{g}} = [0; 0,57; 0,81; 0,99],$$

also mit abnehmenden Abständen.

An der zweiten Schnur sind die Gewichte im Abstand 1:4:9:16 (also quadratisch. Konkret betragen die Höhen $h_i=(0,3; 1,2; 2,7; 4,8)$ m. Die Zeit bis sie auf dem Boden auftreffen, sollte deshalb zu den Zeiten

$$t_i = \sqrt{\frac{2h_i}{g}} = [0,25; 0,49; 0,74; 0,99]$$

auf dem Boden auftreffen. Der Abstand zwischen 2 aufeinanderfolgenden Ereignissen ist somit $t_{i+1} - t_i = 0,25$ s, für alle 3 Abstände. Dies lässt sich akustisch überprüfen: im zweiten Fall treffen die Gewichte etwa mit gleichen Abständen auf dem Boden (d.h. der Metallplatte) auf.

Im Normalfall unterscheidet sich die Fallgeschwindigkeit unterschiedlicher Objekte: eine Feder und ein Stein fallen nicht gleich schnell. Das liegt daran, dass in der Beschreibung der Luftwiderstand nicht berücksichtigt wurde. Im Vakuum fallen die Objekte aber wirklich mit gleicher Geschwindigkeit.

2.1.4 Senkrechter Wurf nach oben

$$s(t) = s(0) + v(0)t + \frac{a}{2}t^2$$

Anfangsort
Anfangsgeschwindigkeit

Beschleunigung

Abbildung 2.6: Das Superpositionsprinzip: Anfangsort, Anfangsgeschwindigkeit und Beschleunigung liefern unabhängige Beiträge.

Befindet sich der Körper zu Beginn nicht in Ruhe, so wird die Bewegung aufgrund der Anfangsgeschwindigkeit der Bewegung aufgrund der (gleichförmigen) Beschleunigung überlagert. Man bezeichnet dies als Superpositionsprinzip (\rightarrow Abb. 2.6): der

Anfangsort, die gleichförmige Bewegung und die gleichförmige Beschleunigung können unabhängig berechnet und die Resultate addiert werden.

Als Beispiel betrachten wir einen Körper, der von einem Turm (Höhe $h_0 = 10$ m) mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 5$ m/s senkrecht nach oben geworfen wird. Die Schwerkraft erzeugt eine zeitlich konstante Beschleunigung von $a = -g = -9.81$ m/s² nach unten.

Die Geschwindigkeit wird somit

$$v(t) = v_0 + at = (5 - 9.81t) \text{ m/s} \quad [t] = \text{s}$$

Der erste Term beschreibt die Anfangsgeschwindigkeit und ist unabhängig von der Zeit; dazu wird das Produkt aus Beschleunigung und Zeit addiert.

Für den Ort (d.h. die Höhe h) erhalten wir

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0 + v_0 t + a/2 t^2 = \\ &= (10 + 5t - 4.9t^2) \text{ m}. \quad [t] = \text{s}. \end{aligned}$$

Hier stellt der erste Term den Ausgangspunkt dar - er ist zeitunabhängig. Der zweite Term beschreibt den Effekt der Anfangsgeschwindigkeit, und der dritte Term ist auf die konstante Beschleunigung zurückzuführen.

Die maximale Höhe wird erreicht für $v(t) = 0$:

$$5 - 9.81 t_m = 0 \rightarrow t_m = 0.51 \text{ s},$$

zum Zeitpunkt t_m . Sie beträgt dann

$$h(0.51 \text{ s}) = (10 + 2.55 - 1.27) \text{ m} = 11.28 \text{ m}.$$

Die Kugel trifft auf den Boden ($h = 0$) auf wenn

$$\begin{aligned} h(t_0) &= 0 = h_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 = \\ &= 10 + 5t_0 - 4.9t_0^2, \end{aligned}$$

d.h. bei

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 196}}{9.81} = \\ &= \frac{5 \pm 14.87}{9.81}. \end{aligned}$$

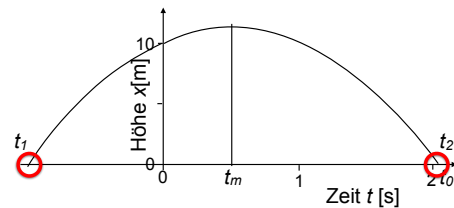


Abbildung 2.7: Höhe als Funktion der Zeit.

Wie in Abb. 2.7 gezeigt, hat diese Gleichung zwei Lösungen:

$$t_1 = 2.03 \quad \text{und} \quad t_2 = -1.01.$$

Wir müssen jetzt überprüfen weshalb wir zwei Lösungen erhalten. Die erste ($t_1 > 0$) ist diejenige die wir suchen. Die zweite ($t_2 < 0$) entspricht ebenfalls einer Durchquerung des Bodens durch den Körper - allerdings bevor er vom Turm nach oben geworfen wurde. Der Körper würde bei dieser Lösung bei $t = 0$ an der Spitze des Turmes eintreffen und anschließend die gleiche Kurve verfolgen wie der Körper, der bei $t = 0$ geworfen wurde. Man erhält häufig mathematisch mehr Resultate als physikalisch sinnvoll sind, wenn man die Randbedingungen nicht berücksichtigt: in diesem Fall betrachten wir nur Zeiten $t > 0$.

2.1.5 Kinematik in zwei und drei Dimensionen

In vielen Fällen findet Bewegung in mehr als einer Dimension statt. Physikalische Größen, die durch Betrag und Richtung beschrieben werden, nennt man Vektoren. In diesen Fällen wird die Position durch zwei oder mehr Koordinaten beschrieben, also z.B. $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Dafür muss ein Bezugssystem festgelegt werden. Dieses besteht aus einem Bezugspunkt O und gerichteten Orientierungslinien im Raum. Bezüglich dieses Koordinatensystems ist eine Position dann definiert durch einen Vektor \vec{r} vom Ursprung zum entsprechenden Punkt (\rightarrow Abb. 2.8).

Grundsätzlich ist man frei in der Wahl der Koordinaten, doch sind häufig kartesische Koordinatensysteme einfach zu handhaben. Dabei handelt es sich um rechtwinklige Koordinatensysteme mit gleichem

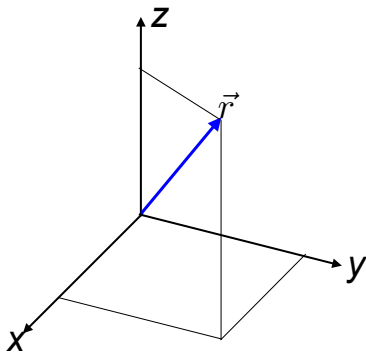


Abbildung 2.8: Vektor und Koordinatensystem.

Maßstab in allen Richtungen. Die Bewegung eines Massenpunktes in drei Dimensionen wird dann beschrieben durch einen Vektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Dementsprechend sind auch Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

und die Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$$

Vektoren in (zwei oder) drei Dimensionen.

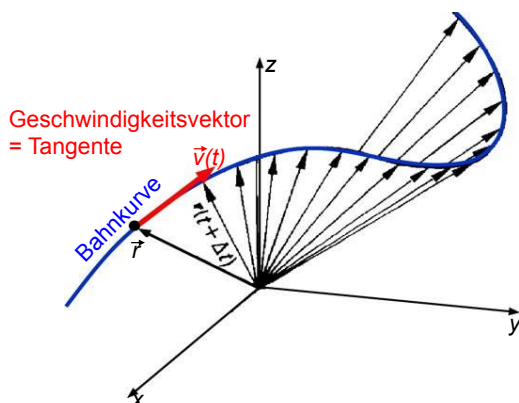


Abbildung 2.9: Bahnkurve in 3D.

Trägt man den Weg als Kurve auf, so ist die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ an einem beliebigen Punkt $\vec{r}(t)$ entlang der Tangente gerichtet, wie in Abb. 2.9 gezeigt.

Ist die Beschleunigung eines Massenpunktes gegeben, so können Geschwindigkeit und Ort als Funktion der Zeit für die Komponenten einzeln bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t') dt' = \\ &= \{v_x(0), v_y(0), v_z(0)\} + \\ &+ \left\{ \int_0^t a_x(t') dt', \int_0^t a_y(t') dt', \int_0^t a_z(t') dt' \right\}. \end{aligned}$$

Somit sind die drei Komponenten unabhängig voneinander.

Für den Fall konstanter Beschleunigung erhalten wir wiederum

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \vec{a}t$$

und

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{\vec{a}}{2}t^2.$$

2.1.6 Wurfparabel



Abbildung 2.10: Schiefer Wurf.

Wir illustrieren dieses Verhalten anhand einer zwei-dimensionalen Bewegung im Schwerfeld der Erde, d.h. mit konstanter Beschleunigung nach unten.

Abb. 2.10 zeigt ein Beispiel eines solchen Wurfs. Wir wählen ein Koordinatensystem mit x in horizontaler und z in vertikaler Richtung (nach oben). Der Körper sei zum Zeitpunkt $t = 0$ bei

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt

$$\vec{v}(0) = v_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

und die Beschleunigung

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

ist zeitlich konstant. Somit ist die Bewegung

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= v_0 t \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_0 t \cos \alpha, \\ v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir können diese Kurve auch als Gleichung schreiben. Die beiden Koordinaten ergeben 2 Gleichungen:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad z = v_0 t \sin \alpha - g \frac{t^2}{2}.$$

Wir lösen die erste Gleichung nach der Zeit t auf:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

und setzen diesen Ausdruck in die zweite Gleichung ein:

$$z = x \tan \alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Kurven der Form $z = ax + bx^2$ stellen Parabeln dar. In diesem speziellen Fall spricht man von der "Wurfparabel". Abb. 2.11 zeigt ein Beispiel.

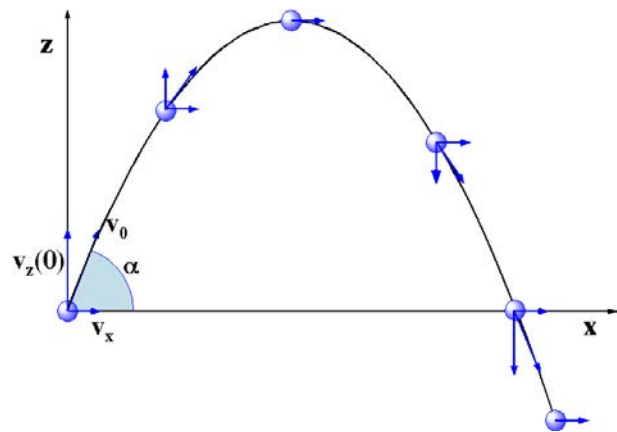


Abbildung 2.11: Bahnkurve des schiefen Wurfs. An einigen Punkten sind auch die Geschwindigkeitskomponenten dargestellt.

Man kann sie z.B. durch einen Wasserstrahl sichtbar machen, wie in Abb. 2.12 gezeigt. Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall dass das Wasser horizontal austritt, d.h. $\alpha = 0$. Die Gleichung reduziert sich dann zu

$$z = -x^2 \frac{g}{2v_0^2},$$

d.h. eine nach unten offene Parabel. Im Experiment tritt der Wasserstrahl horizontal aus der Düse aus und fällt unter dem Einfluss der Gravitationsbeschleunigung. Die roten Kreise markieren eine Parabel durch die Werte $(x/y) = (1/1), (2/4), (3/9), (4/16), (5/25) \dots$

Wird der Wasserstrahl gekippt, so wird $\alpha \neq 0$ und das Wasser erhält eine Anfangsgeschwindigkeit in vertikaler Richtung. Der Scheitelpunkt der Parabel verschiebt sich dadurch nach rechts oben.

2.1.7 Unabhängigkeitsprinzip

Nicht nur die Anfangswerte von Beschleunigung, Geschwindigkeit und Position gehen linear in die Gleichung ein; wir haben auch gesehen, dass die einzelnen Koordinaten voneinander unabhängig sind.

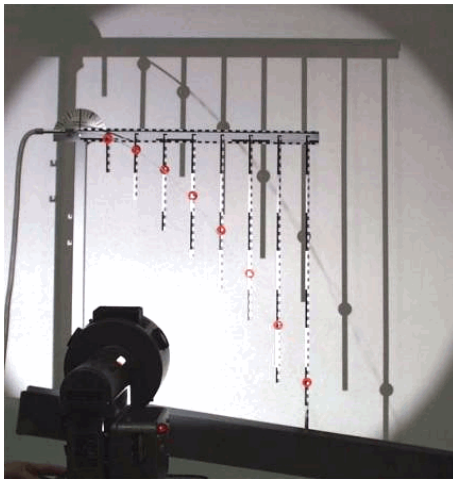


Abbildung 2.12: Wasserstrahlparabel.

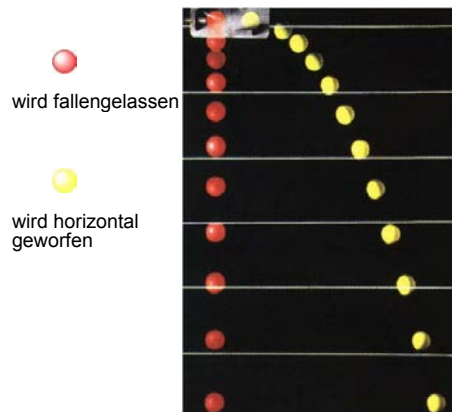


Abbildung 2.13: Unabhängigkeitsprinzip.

Die bedeutet z.B., dass eine Kugel, welche aus 1 m Höhe fallengelassen wird, den Boden nach $t = \sqrt{2s/a} = 0.45\text{s}$ erreicht, unabhängig davon ob sie sich zu Beginn in Ruhe befindet oder eine horizontale Anfangsgeschwindigkeit aufweist. Abb. 2.13 zeigt dies durch Vergleich der Trajektorien von 2 Kugeln.

Wir überprüfen dies, indem wir zwei Kugeln am gleichen Hebel befestigen (→ Abb. 2.14). Wird mit dem Hammer darauf geschlagen, so fällt die eine senkrecht hinunter, die andere in einer Parabel. Dass beide gleichzeitig auf dem Boden auftreffen lässt sich leicht akustisch verifizieren. Dies wird auch aus



Abbildung 2.14: Unabhängigkeitsprinzip: Eine Kugel wird fallen gelassen, die andere gleichzeitig horizontal geworfen. Beide treffen gleichzeitig am Boden auf.

der Vektorschreibweise der Bewegungsgleichung erkennbar:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{x0}t + \frac{a_x}{2}t^2 \\ z_0 + v_{z0}t + \frac{a_z}{2}t^2 \end{pmatrix} :$$

es handelt sich um zwei unabhängige Gleichungen, ohne Kopplungsterm. Das Unabhängigkeitsprinzip besagt, dass sich die beiden Koordinaten unabhängig voneinander entwickeln. Dies gilt immer für gleichförmig beschleunigte Bewegungen.

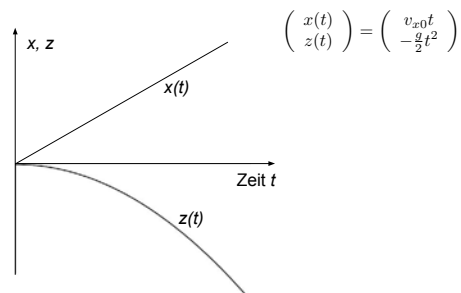


Abbildung 2.15: Unabhängige Zeitentwicklung für 2 Koordinaten im Schwerfeld.

Die x -Komponente der Geschwindigkeit ist konstant, die x Koordinate wächst deshalb linear (in beiden Fällen; für die rote Kugel ist $v_x = 0$).

Ein weiteres Experiment dazu ist der “Affenschuss”: Wie in Abb. 2.16 gezeigt, schießt ein Jäger auf einen Affen. Dieser lässt sich fallen, wenn er den Mündungsblitz des Gewehrs sieht. Wohin muss der Jäger

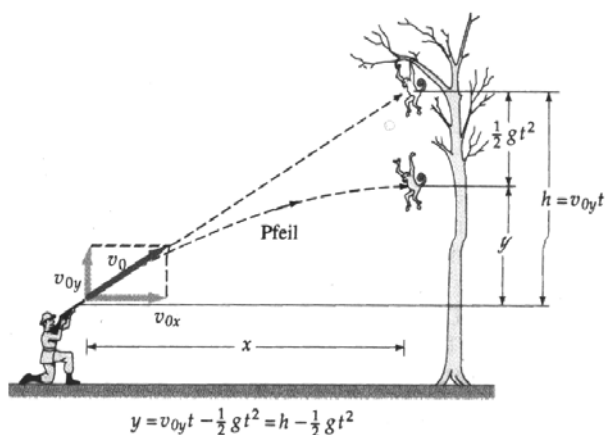


Abbildung 2.16: Der "Affenschuss".

zielen um den Affen (Höhe h , Distanz x_0) zu treffen? Was ist der Einfluss der Anfangsgeschwindigkeit v_0 ? Vernachlässigt man zunächst die Erdbeschleunigung, so muss der Jäger offenbar auf den Affen zielen um ihn zu treffen, d.h. $\tan \alpha = h/x_0$. Die Flugzeit der Kugel ist

$$t_0 = \frac{x_0}{v_0 \cos \alpha}.$$

Der zusätzliche Einfluss der Erdbeschleunigung ist identisch für den Affen und die Kugel: Beide fallen um eine Strecke $z = -gt_0^2/2$. Die Kugel trifft somit unabhängig von der Mündungsgeschwindigkeit wenn der Jäger richtig zielt und der Affe sich sofort fallen lässt.

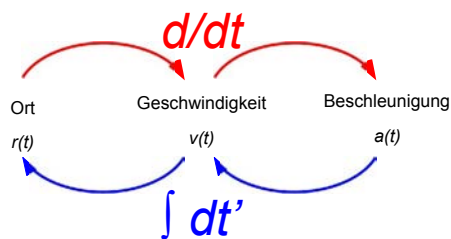


Abbildung 2.17: Zusammenfassung der Kinematik.

Im Sinne einer kurzen Zusammenfassung soll Abb. 2.17 nochmals daran erinnern, was das Thema der Kinematik ist: Es geht um die Beziehung zwischen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung, welche aus einander durch Differenzieren, resp. Integrieren hergeleitet werden können. In vielen Fällen gilt dies

für die verschiedenen Raumdimensionen unabhängig voneinander.

2.2 Dynamik von Massenpunkten

Die Dynamik befasst sich mit der Bewegung, welche von Kräften erzeugt und geändert wird.

2.2.1 Definitionen

Die wichtigsten Grundbegriffe der Dynamik sind die Masse, der Impuls und die Kraft.

Masse ein Maß für den Widerstand eines Körpers gegen Bewegungsänderungen. Sie ist unabhängig vom Ort und vom Bewegungszustand. Damit ist sie auch ein geeignetes Maß für die Stoffmenge. Das übliche Symbol ist m und die SI-Einheit ist kg. Man unterscheidet manchmal zwischen der trägen Masse (siehe oben) und der schweren Masse, welche ein Maß für die Schwerkraft ist. Experimentell findet man keinen Unterschied zwischen schwerer und träger Masse und die Relativitätstheorie zeigt, dass sie sich nicht unterscheiden.

Impuls \vec{p} ist ein Maß für die Bewegung. In der klassischen Mechanik ist er gegeben durch das Produkt aus Geschwindigkeit und Masse, $\vec{p} = m\vec{v}$. Er ist somit eine vektorielle Größe parallel zur Geschwindigkeit. Seine Einheit ist $\text{m}\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$.

Kraft \vec{F} ist ein Maß für die Fähigkeit, eine Bewegungsänderung zu erzeugen. SI-Einheit: $\text{N} = \text{m}\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$.

Zwei Experimente sollen das Konzept der Masse veranschaulichen. Im ersten Experiment ist an einer Masse oben und unten jeweils eine gleich starke Schnur befestigt. Zieht man an der unteren Schnur langsam, so reißt die obere Schnur, da hier die Gewichtskraft des Masse zusätzlich zur Zugkraft wirkt. Zieht man schnell, so reißt die untere Schnur, da die Trägheit der Masse verhindert, dass die Zugkraft auf die obere Schnur übertragen wird.

Die Trägheit der Masse kann auch dazu führen, dass ein Gegenstand in Ruhe bleibt, wenn die Kraft dar-

auf nur für eine kurze Zeit wirkt. In diesem Experiment wird ein Besenstiel auf 2 Trinkgläsern gelagert. Schlägt man langsam auf den Stiel, so wird der Stoß auf die Gläser übertragen und sie zerspringen. Schlägt man jedoch schnell genug darauf, so zerbricht der Besenstiel, da er nicht genug Zeit hat, den Stoß auf die Gläser an den Enden zu übertragen.

2.2.2 Newton'sche Axiome

Die Grundlage für die hier behandelte Mechanik wurde im Wesentlichen von Newton¹ gelegt. Seine Publikation der mathematischen Grundlagen der Physik markierte den Übergang von der peripatetischen Dynamik, welche auf die griechischen Philosophen zurückgeht, zur Newton'schen Dynamik, welche heute als klassische Mechanik bezeichnet wird. Ihre Grundlage sind die drei Newton'schen Axiome:

Trägheitsgesetz: Ein Körper, auf den keine äußeren Kräfte wirken, behält seine Geschwindigkeit nach Richtung und Betrag bei. Mathematisch: $\vec{F} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$.

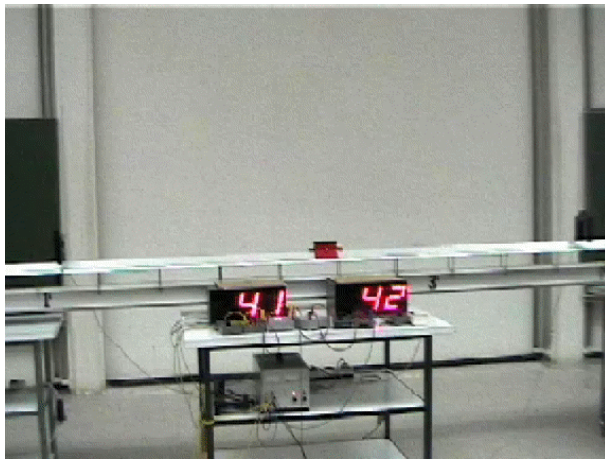


Abbildung 2.18: Experimentelle Verifikation von Newton's Axiomen: Bewegung auf einer Luftkissenschiene.

Die Bedingung, die in diesem Axiom enthalten ist, ist in der Praxis natürlich nur sehr schwer zu realisieren. Man kann sie in einem Demonstrationsexperiment näherungsweise verwirklichen, indem man

¹Isaac Newton, 1642 – 1727

einen Körper auf einem Luftkissen laufen lässt und so Reibungskräfte sehr gering hält. An zwei Stellen dieser Schiene wird jeweils gemessen wie lange der Körper die Fozelle verdunkelt, wie lange er also braucht um eine Strecke zurückzulegen, die seiner eigenen Länge entspricht. Wir erwarten eine Zeit $t = \ell/v$, wobei ℓ die Länge des Körpers darstellt. Die gemessene Zeit ist somit indirekt proportional zur Geschwindigkeit, eine Änderung der Geschwindigkeit erscheint als eine Änderung der Zeit. Das Experiment zeigt, dass die gemessenen Zeiten in etwa konstant sind.

Das zweite Newton'sche Axiom ist das

Aktionsgesetz = Grundgesetz der Mechanik: Die zeitliche Änderung des Impulses $p = mv$ ist gleich der resultierenden Kraft F :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Dieses Axiom kann auch als Definition einer Kraft betrachtet werden.

Im Experiment von Abb. 2.18 wirkt die Kraft die Körper am Umkehrpunkt; dies geschieht durch zwei Federn, welche am Wagen, resp. an der Schiene befestigt sind.

Das dritte Newton'sche Axiom ist das

Wechselwirkungsgesetz (actio = reactio): Wirkt ein Körper 1 auf einen Körper 2 mit der Kraft F_{12} so wirkt der Körper 2 auf den Körper 1 mit der Kraft

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12},$$

d.h. mit gleichen Betrag und umgekehrter Richtung. Kräfte treten somit immer paarweise auf.

Dieses Prinzip kann in einem einfachen Experiment verifiziert werden. Dabei werden nicht direkt die Kräfte gemessen, sondern das Integral der Kräfte. Aus

$$F = \frac{dp}{dt}$$

folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = \Delta p = p(t_2) - p(t_1),$$

d.h. die gesamte Wirkung der zeitabhängigen Kraft F ist eine Impulsänderung Δp . Sind die beiden Kräfte zu jedem Zeitpunkt entgegengesetzt so sind auch die Impulsänderungen entgegengesetzt.

Dies kann sehr schön an Wagen auf einer Luftkissenschiene gezeigt werden, z. B. indem man die beiden Wagen zunächst in Ruhe starten, wobei eine Feder zwischen ihnen komprimiert ist, die eine abstoßende Kraft erzeugt. Dadurch werden sie in entgegengesetzte Richtungen beschleunigt. Sind beide gleich schwer so erhalten sie auch die gleiche (entgegengerichtete) Geschwindigkeit, wie die Messung durch die beiden Lichtschranken ergibt. Wird die Masse des einen Wagens verdoppelt, so bewegt sich dieser langsamer; seine Geschwindigkeit ist nur halb so groß wie diejenige des leichteren Wagens, und damit haben beide den gleichen Impuls,

$$m_2 v_2 = 2m_1 \frac{v_1}{2} = m_1 v_1.$$

2.2.3 Kraft und Beschleunigung

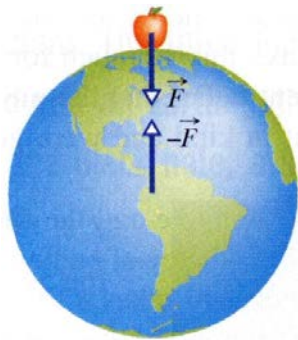


Abbildung 2.19: Newton's 3. Axiom: der Apfel erfährt die gleiche Kraft wie die Erde.

Gemäß dem 3. Newton'schen Axiom ist die Kraft, welche ein Apfel auf die Erde ausübt, gleich groß wie die Kraft, welche die Erde auf den Apfel ausübt (\rightarrow Abb. 2.19). Wenn der Apfel zur Erde fällt muss demnach auch die Erde in Richtung auf den Apfel fallen. Weil gemäß dem zweiten Axiom die Kraft eine Impulsänderung erzeugt,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt},$$

ist jedoch bei gegebener Kraft die Geschwindigkeitsänderung indirekt proportional zur Masse,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Wegen der Größe der Erdmasse ist deshalb die Beschleunigung sehr gering.

Ein analoges Beispiel ist das eines Läufers, der zu einem Spurt startet. Dafür beschleunigt er mit $a = 0,5 \text{ m/s}^2$. Seine Masse sei $m=100 \text{ kg}$. Er benötigt somit eine Kraft von $F = am = 50 \text{ m kg s}^{-2} = 50 \text{ N}$. Die gleiche Kraft wirkt in entgegengesetzter Richtung auf die Erde. Diese wird deshalb ebenfalls beschleunigt, in entgegengesetzter Richtung, mit

$$a_{Erde} = \frac{50 \text{ N}}{m_{Erde}} = \frac{50 \text{ N}}{6 \cdot 10^{24} \text{ kg}} = 8,3 \cdot 10^{-24} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Auf Grund der hohen Masse ist somit die Beschleunigung der Erde sehr gering.

2.2.4 Zusammenfassung und Gültigkeit

- **Trägheitsgesetz** : $v = \text{const.}$
ohne äußere Kraft
- **Aktionsgesetz** : $dp/dt = F$
- **Actio = Reactio** : $F_{12} = -F_{21}$

Voraussetzungen:

- Inertialsystem (d.h. nicht beschleunigt)
- Kleine Geschwindigkeiten, $v \ll c$



Isaac Newton,
1642 – 1727

Abbildung 2.20: Newton und seine Axiome.

Diese drei Grundgesetze, zusammengefasst in Abb. 2.20, sind die wichtigsten Grundlagen für die Dynamik. Ihre Einführung führte zu einer radikalen Vereinfachung der Physik und Astronomie.

Die Gültigkeit der Newton'schen Axiome definiert den Bereich der klassischen Mechanik:

- Die Zeit ist absolut und unveränderlich und hängt nicht von der Bewegung und dem Ort ab.
- Es gibt einen “absoluten Raum”, d.h. ein absolut ruhendes System, in dem alle Bewegungsabläufe stattfinden.
- Die Eigenschaft “Masse” eines Körpers geht nie verloren oder entsteht aus dem Nichts. “Masse” ist unabhängig vom Bewegungszustand und bleibt erhalten.

Der experimentelle Befund ist, dass diese drei Axiome gelten, sofern folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Das Bezugssystem ist nicht beschleunigt; Bezugssysteme, in denen die drei Axiome gelten, werden als Inertialsysteme bezeichnet.
- Die (relativen) Geschwindigkeiten der Körper sind klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit (Relativitätstheorie).

2.2.5 Masse

Das 2. Newton’sche Axiom kann auch als Definition der Masse betrachtet werden: Die träge Masse m_t stellt den Widerstand eines Körpers gegen eine Bewegungsänderung dar:

$$\vec{F} = m_t \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

Die heute noch gültige Einheit der Masse ist gegeben durch das Ur-Kilogramm, einen Platin-Iridium Zylinder, welcher in Paris aufbewahrt wird. Kopien davon existieren in verschiedenen Ländern, unter anderem bei der PTB in Braunschweig.

Eines der Probleme mit dieser Definition des Kilogramms liegt darin, dass es nicht perfekt stabil ist. Abb. 2.21 zeigt, wie sich die Masse von unterschiedlichen Kopien des Urkilogramms als Funktion der Zeit ändert. Es ist davon auszugehen, dass das Urkilogramm selber ähnlichen Änderungen unterliegt.

Um solche Probleme zu vermeiden, hat man inzwischen die meisten Grundeinheiten so definiert, dass sie Funktionen von Naturkonstanten sind, welche

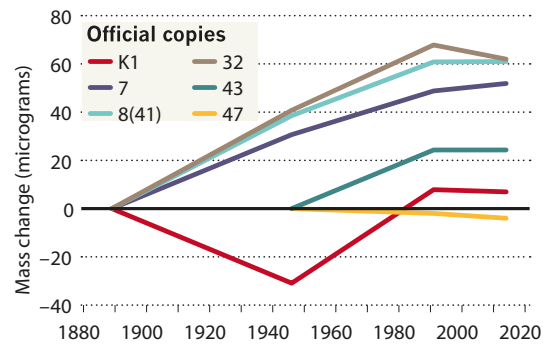


Abbildung 2.21: Variation der gemessenen Masse von unterschiedlichen Kopien des Ur-Kilogramms.

überall gemessen werden können. In nächster Zeit soll dies auch bei der Masseneinheit (dem kg) geschehen. Die vorgeschlagene Neudefinition der SI-Einheit lautet

Ein Kilogramm ist die Planck’sche Konstante, dividiert durch $6,626070015 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2/\text{s}^2$.

Mit dieser Definition kann überall ein Vergleich durchgeführt werden. Das dafür notwendige Instrument wird als Watt-Waage bezeichnet.

Die Masse spielt nicht nur beim 2. Newton’schen Axiom eine wichtige Rolle, sie ist auch die relevante Größe bei der Schwerkraft. Die Anziehung zwischen zwei Massen M und m_s beträgt

$$\vec{F} = -G \frac{M m_s}{r^3} \vec{r}, \tag{2.2}$$

mit der Gravitationskonstante

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}.$$

Wegen der geringen Stärke der Gravitationswechselwirkung ist eine entsprechende Messung sehr aufwändig und bedarf guter Planung um Fehler zu vermeiden. Die Masse m_s in Gleichung (2.2) wird als schwere Masse bezeichnet.

2.2.6 Schwere und träge Masse

In der klassischen Physik sind die schwere und die träge Masse zunächst voneinander unabhängige

Experimentator	Jahr	Methode	($10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$)
Cavendish	1798	Torsionswaage, Ablenkung	6,754
Poynting	1891	Gewöhnliche Waage	6,698
Boys	1895	Torsionswaage, Ablenkung	6,658
von Eötvös	1896	Torsionswaage, Ablenkung	6,65
Heyl	1930	Torsionswaage, Periode	
		Gold	6,678
		Platin	6,664
		Glas	6,674
Zahradniček	1933	Torsionswaage, Resonanz	6,659
Heyl und Chrzanowski	1942	Torsionswaage, Periode	6,673
Luther und Towler	1982	Torsionswaage, Periode	6,6726

Abbildung 2.22: Gemessene Werte der Gravitationskonstanten G .

Größen. Fällt ein Körper im Schwerfeld der Erde, so lautet die Bewegungsgleichung

$$F_G = m_s g = \frac{dp}{dt} = m_t \frac{dv}{dt}.$$

Somit taucht die schwere Masse m_s wie auch die träge Masse m_t in der Gleichung auf. Berechnet man die Beschleunigung

$$a = \frac{dv}{dt} = g \frac{m_s}{m_t}, \quad (2.3)$$

so ist diese proportional zum Verhältnis von schwerer zu träger Masse. In den meisten Fällen gibt es keinen Grund, zwischen schwerer und träger Masse zu unterscheiden, man setzt deshalb $m_s = m_t = m$.

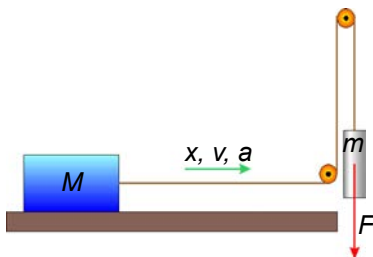


Abbildung 2.23: Atwood'sche Fallmaschine.

Es gibt aber auch Prozesse, bei denen die schwere und die träge Masse unabhängig verändert werden können. Ein Beispiel dafür ist die Atwood'sche Fallmaschine, welche 1784 von George Atwood entwickelt wurde, um die Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung zu untersuchen. Mit ihr kann man mit einfachen Mitteln statt der Fallbeschleunigung eine beliebig verringerte Beschleunigung erhalten.

In der Version von Abb. 2.23 besteht sie aus einer Masse M , welche horizontal bewegt wird. Eine weitere Masse m wird vertikal bewegt. Diese hängt im Schwerfeld der Erde und unterliegt somit der Gravitation. Beschleunigt man das System, so muss die Gesamtmasse $M + m$ beschleunigt werden; zur Gewichtskraft trägt jedoch nur die Masse m bei. Die Bewegungsgleichung ist deshalb

$$F = (M + m)a = (M + m) \frac{d^2x}{dt^2} = mg.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m}{M + m}g.$$

Die Beschleunigung ist somit um das Verhältnis aus schwerer zu träger Masse skaliert.

Integration liefert für $x(0) = 0, dx/dt(0) = 0$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m}{M + m}gt$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{m}{M + m}gt^2.$$

Im Experiment wird die Zeit gemessen, welche der Schlitten benötigt, um eine Distanz von $x = 2 \text{ m}$ zurückzulegen. Theoretisch sollte dies

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2x}{g} \frac{M + m}{m}}$$

M/g	m/g	(M+m) g	a/m s ⁻² berechnet	t/s berechnet	t/s gemessen
218	20	238	0,824	2,203	2,24
	40	258	1,521	1,622	1,63
436	40	476	0,824	2,203	2,21
	50	516	1,521	1,622	1,62

Tabelle 2.1: Resultate eines Experiments mit der Atwood'schen Fallmaschine.

Tabelle 2.1 zeigt die Resultate eines entsprechenden Experiments.

In diesem Experiment tragen zwei Körper zur trägen Masse m_t bei, aber nur einer zur schweren Masse m_s . Betrachtet man jedoch einzelne Körper, so findet man experimentell, dass seine schwere und träge Masse immer proportional zueinander sind, $m_s \propto m_t$.

Es ist deshalb praktisch, die beiden Massen gleich zu setzen, $m_s = m_t = m$. In Gleichung (2.3) kann die Masse deshalb eliminiert werden. Dieses sogenannte Äquivalenzprinzip wird im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie zu einem Axiom.

2.3 Kräfte in der Dynamik

2.3.1 Kräfte und Felder

Kräfte sind aus der Statik bekannt, welche im Wesentlichen auf dem Gleichgewicht der Kräfte beruht. In der Dynamik sind die Kräfte die Ursache für Bewegungsänderungen. Gemäß dem Newton'schen Axiom können Kräfte über die von ihnen erzeugte Impulsänderung beschrieben werden:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Damit ist die entsprechende Einheit

$$[F] = \frac{\text{mkg}}{\text{s}^2} = \text{N} = \text{Newton}.$$

Die Schwerkraft, die z.B. im Schwerfeld der Erde auf einen Körper wirkt, ist gemäß (2.2) proportional zur Masse des Körpers. Die resultierende Beschleunigung ist

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F} = \frac{1}{m} mg = g.$$

Hier ist g die Erdbeschleunigung

$$g = \frac{Gm_{\text{Erde}}}{r_{\text{Erde}}^2}.$$

Damit ist die induzierte Impulsänderung proportional zur Masse, während die Beschleunigung unabhängig von der Masse ist. Dieser Effekt wird im Allgemeinen davon überdeckt, dass unterschiedliche Luftreibung vorliegt, kann aber im Vakuum gezeigt werden. In Abb. 2.24 werden ein Apfel und eine Feder im Vakuum fallen gelassen. Die einzelnen Aufnahmen zu unterschiedlichen Zeiten zeigen, dass sie gleich schnell fallen.

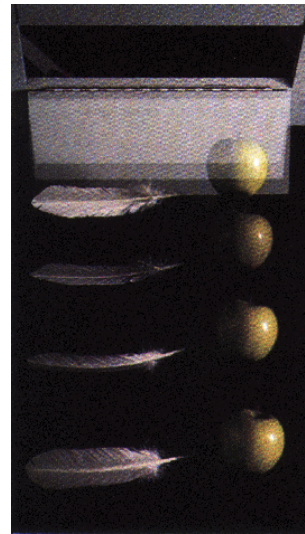


Abbildung 2.24: Freier Fall eines Apfels und einer Feder im Vakuum.

In der Gravitation wirkt offenbar eine Kraft zwischen zwei räumlich getrennten Objekten. Dies wurde lange als unplausibel betrachtet, so z.B. Newton in einem Brief an Bentley 1692. Man versuchte dies durch das Konzept des Feldes zu überbrücken. Dieses Feld wird von einer Quelle erzeugt und wirkt auf alle Körper, welche eine bestimmte Eigenschaft besitzen und sich in dem Feld aufhalten. Beispiele sind elektrische Felder, welche von elektrischen Ladungen erzeugt werden und auf elektrische Ladungen wirken, oder Gravitationsfelder, welche von Massebehafteten Körpern erzeugt werden und auf massive Körper wirken. Beispiel: Die Gleichung (2.2) kann man so interpretieren, dass die Masse M ein Gravitationsfeld

$$\vec{E}_G = -G \frac{M}{r^3} \vec{r}$$

erzeugt. Das Feld ist somit unabhängig von der Masse, auf die es wirkt und stellt eine Verallgemeinerung der Kraft dar. Bringt man die Masse m in dieses Feld, so wirkt darauf eine Kraft

$$\vec{F}_G = \vec{E}_G m = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}.$$

2.3.2 Elementare und phänomenologische Kräfte

Man unterscheidet zwischen elementaren Kräften, welche durch eine kleine Zahl von physikalischen Grundgesetzen beschrieben werden, und phänomenologischen Kräften, welche zu Vereinfachung von komplizierten Zusammenhängen eingeführt werden.

Wechselwirkung	Trägerteilchen	Beispiel
elektromagnetische	Photon	
starke	Gluon	
schwache	W, Z	
Gravitation	Graviton	

Abbildung 2.25: Die vier fundamentalen Wechselwirkungen.

In der Natur kommen 4 elementare Wechselwirkungen vor: die elektromagnetische (wobei im Rahmen dieser Vorlesung hier elektrische und magnetische Kräfte meist getrennt behandelt werden), die starke, die schwache Kernkraft und die Gravitations-Wechselwirkung (→ Abb. 2.25). Für den Alltag sind nur die elektrischen und magnetischen Kräfte, sowie die Schwerkraft relevant. Elektrizität und Magnetismus werden im Kapitel 4 behandelt.

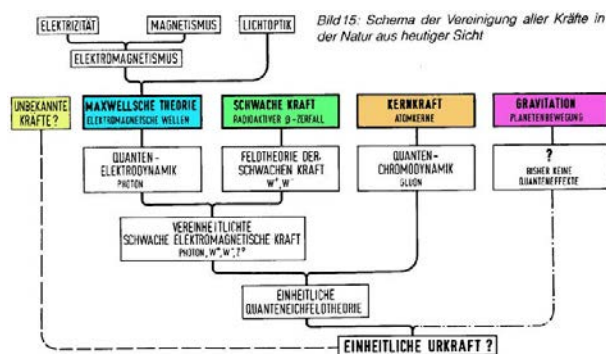


Abbildung 2.26: Vereinheitlichte Beschreibungen der fundamentalen Wechselwirkungen.

Zu den größten Erfolgen der physikalischen Forschung des letzten Jahrhunderts gehört die erfolgreiche Vereinheitlichung der Beschreibung dieser Wechselwirkungen. Abb. 2.26 fasst die entsprechenden Stufen zusammen.

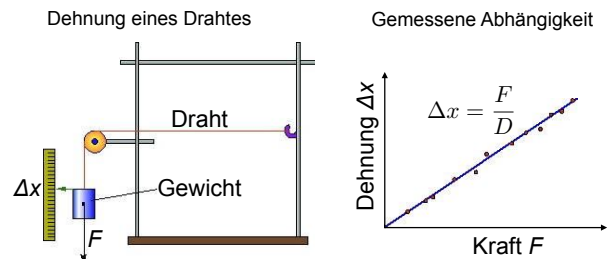


Abbildung 2.27: Phänomenologische Kraft einer Feder.

Darüber hinaus verwendet man jedoch auch sogenannte phänomenologische Wechselwirkungen, wie z.B. die Kraft einer Feder, welche grundsätzlich auf die fundamentalen Wechselwirkungen zurückgeführt werden kann. Häufig ist diese Rückführung jedoch sehr kompliziert und aufwändig, so dass man sich mit einer phänomenologischen Beschreibung begnügt. Dazu gehören z.B. elastische Kräfte, wie bei einer Feder. Wie in Abb. 2.27 gezeigt, findet man über einen gewissen Bereich oft eine lineare Beziehung,

$$\Delta x = \frac{F}{D},$$

mit der Feder- oder Dehnungskonstanten D .

2.3.3 Reibungskräfte

Eine weitere Gruppe von phänomenologischen Kräften sind Reibungskräfte. Diese findet man immer dann, wenn Körper sich berühren und sich relativ zueinander parallel zur Kontaktfläche bewegen. Die Kräfte wirken entgegen der Bewegungsrichtung, d.h. sie hemmen die Bewegung. Reibung kann auf unterschiedliche Weise reduziert werden, z.B. durch die Verwendung einer Luftkissenschiene.

Man unterscheidet zwischen Gleitreibung und Haftreibung. Haftreibung führt dazu, dass ein Körper sich nicht bewegt, wenn die daran angreifende Kraft

geringer ist als die Haftreibung. Gleitreibung entsteht, wenn ein Körper sich gegenüber einer Unterlage oder einem Medium bewegt. Sie ist der Bewegungsrichtung entgegengesetzt und hängt von der relativen Geschwindigkeit zwischen Körper und Umgebung ab. Man unterscheidet

Äußere Reibung/Festkörperreibung. Bei Festkörpern, die sich auf einer festen Unterlage bewegen. Hier ist die Reibungskraft F_R (in gewisser Näherung) proportional zur Normalkraft F_N , mit der der Körper auf die Unterlage drückt:

$$F_R = \mu F_N.$$

Die Proportionalitätskonstante μ wird als Reibungszahl bezeichnet; sie ist unabhängig von der (makroskopischen) Kontaktfläche und von der Geometrie. Typische Reibungskoeffizienten liegen im Bereich von 0.1 bis 0.5, wobei Extremwerte deutlich kleiner, aber auch größer als 1 werden können.

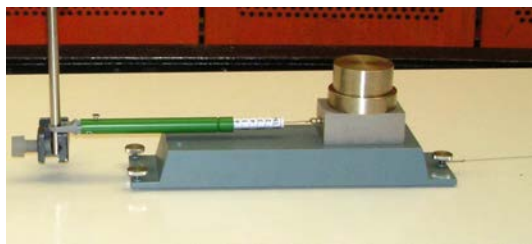


Abbildung 2.28: Messung des Reibungswiderstandes mit Hilfe eines Federkraftmessers.

Abb. 2.28 zeigt ein Experiment, bei dem man die Stärke der Reibung über eine Federwaage misst. Man findet, dass die Haftreibung größer ist als die Gleitreibung und dass die Gleitreibung mit dem Gewicht des Körpers zunimmt.

Die Haftreibung kann man messen, indem man einen Körper auf eine geeignete Unterlage stellt, deren Neigung variiert werden kann (→ Abb. 2.29). Bei der Neigung α , bei der der Körper zu rutschen beginnt, halten sich die Reibungskraft $F_R = \mu_s N$ mit dem Reibungskoeffizienten μ_s und der Normalkraft $N = mg \cos \alpha$ die Waage. Somit ist

$$\mu_s = \frac{F_R}{N} = \frac{mg \sin \alpha}{mg \cos \alpha} = \tan \alpha.$$

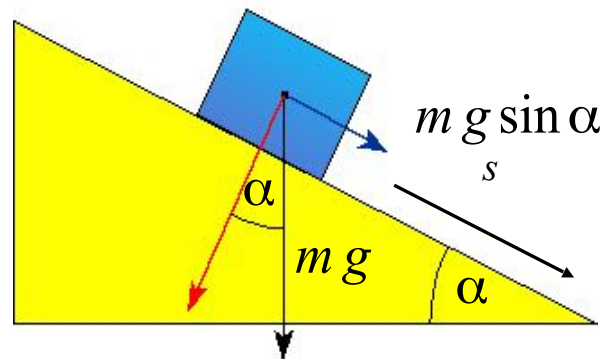


Abbildung 2.29: Haftreibung auf einer schiefen Ebene.

Somit kann der Reibungskoeffizient als Tangens des Neigungswinkels bestimmt werden.

Flächen	Gleitreibung Haftreibung	
	μ_G	μ_s
Glas auf Glas	0.4	0.9 – 1
Glas auf Metall	0.2-0.3	0.5 – 0.7
Metall auf Metall		0.3 – 1
Stahl auf Stahl	0.6	0.7
Stahl auf Stahl Mit Öl dazwischen	0.03-0.11	0.05-0.13
Teflon auf Metall	0.04	0.04
Gelenk mit Gelenkflüssigkeit		0.003 sehr klein !
Gummi auf Beton (naß)	0.25	0.3
Gummi auf Beton (trocken)	0.8	1 – 4 z.B. Reifen

Tabelle 2.2: Heft- und Gleitreibungskoeffizienten für unterschiedliche Materialien.

Tabelle 2.2 zeigt Haft- und Gleitreibungskoeffizienten für unterschiedliche Paare von Materialien.

2.3.4 Dynamik mit Reibung

Gleitet ein Körper auf einer schiefen Ebene mit Neigung α (→ Abb. 2.31), so hat die Schwerkraft eine Komponente

$$F = mg \sin \alpha$$

entlang der Bewegungsrichtung, welche den Körper beschleunigt. Ohne Berücksichtigung der Reibung

bewegt sich ein zunächst ruhender Körper mit der Geschwindigkeit

$$v = at = g \sin \alpha t. \quad (2.4)$$

Den zurückgelegten Weg erhält man durch Integration:

$$s = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2.$$

Berücksichtigt man auch die Reibung, so wirkt zusätzlich eine bremsende Kraft F_r , welche in bestimmten Fällen näherungsweise proportional zur Geschwindigkeit ist,

$$F_r = -bv.$$

Setzt man dies in die Bewegungsgleichung ein,

$$a = g \sin \alpha - \frac{b}{m} v$$

und integriert, dann erhält man für die Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{mg \sin \alpha}{b} \left(1 - e^{-bt/m}\right).$$

Für kurze Zeiten, $t \ll m/b$, entspricht das dem reibungsfreien Fall (2.4). Für lange Zeiten nähert sich die Geschwindigkeit dem Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_\infty = \frac{mg \sin \alpha}{b}.$$

Dieser Grenzwert hängt offenbar von der Masse des Körpers ab.

Neben dieser äußeren Reibung ist auch die "innere Reibung" in Flüssigkeiten und Gasen wichtig. Diese wird in Kap. 2.14.6 diskutiert.

2.3.5 Kräfte als Vektoren

Kräfte sind Vektoren und können vektoriell addiert werden:

$$\vec{F}_{ges} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

oder allgemein

$$\vec{F}_{ges} = \sum_i \vec{F}_i.$$

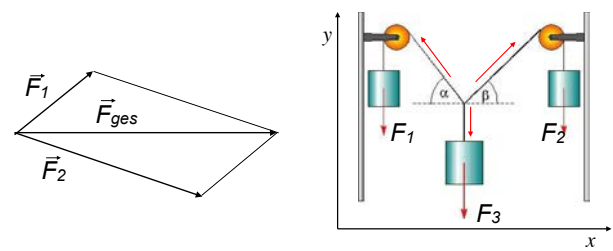


Abbildung 2.30: Vektorielle Addition von Kräften.

Im Gleichgewicht verschwindet die resultierende Kraft, $\vec{F}_{ges} = 0$.

Im Beispiel von Abb. 2.30 rechts sind die Kräfte, welche am Knoten in der Mitte angreifen, in Komponentenschreibweise

$$\vec{F}_1 = F_1 \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \vec{F}_2 = F_2 \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}.$$

$$\vec{F}_3 = F_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Im Fall von Abb. 2.30 rechts können aus der Gleichgewichtsbedingung die beiden Winkel α und β berechnet werden. Für die horizontale und die vertikale Komponente muss jeweils die Summe der Kräfte verschwinden:

$$\begin{aligned} F_1 \cos \alpha &= F_2 \cos \beta \\ F_3 &= F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta. \end{aligned}$$

Aus diesen 2 Gleichungen können α und β bestimmt werden.

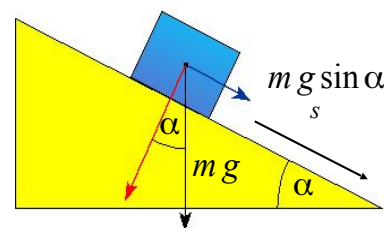


Abbildung 2.31: Gleiten eines Körpers auf einer schiefen Ebene.

Umgekehrt können Kräfte in Komponenten zerlegt werden. Für den Fall eines Wagens auf einer schiefen Ebene (\rightarrow Abb. 2.31) kann die Gewichtskraft

$\vec{F}_g = m\vec{g}$ zerlegt werden in die Normalkraft \vec{F}_1 , welche den Wagen auf die Fahrbahn drückt, und die Hang-Abtriebskraft \vec{F}_2 , welche die Dynamik bewirkt. Ihre Beträge sind

$$\begin{aligned} |\vec{F}_1| &= mg \cos \alpha \\ |\vec{F}_2| &= mg \sin \alpha. \end{aligned}$$

2.3.6 Raketen



Abbildung 2.32: Rakete beim Start.

Raketen (\rightarrow Abb. 2.32) bewegen sich im Weltraum und können beschleunigen, ohne dass äußere Kräfte auf sie wirken. Wie ist dies mit dem Impulssatz vereinbar?

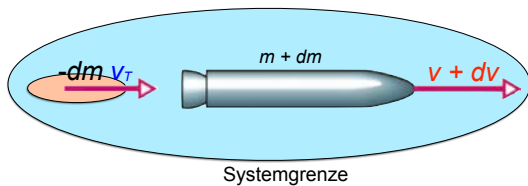


Abbildung 2.33: Modell einer Rakete.

Raketen erzeugen Schub indem sie einen Treibstoff mit möglichst hoher Geschwindigkeit nach hinten ausstoßen. Die Impulserhaltung gilt für das Gesamtsystem Rakete plus Treibstoff (Vorrat in der Rakete plus ausgestoßener Teil). Der Treibstoff wird nach hinten beschleunigt, mit einer Kraft, welche gemäß dem dritten Newton'schen Axiom gleich stark die Rakete nach vorn beschleunigt. Dadurch ändert sich sowohl die Masse wie auch die Geschwindigkeit der

Rakete: im Zeitintervall dt ändert sich die Masse m der Rakete um dm (mit $dm < 0$) und die Geschwindigkeit v um dv (> 0).

Man betrachtet ein Gesamtsystems, bestehend aus Rakete plus ausgestoßener Treibstoff (\rightarrow Abb. 2.33) und vernachlässigt zunächst die Gravitation. Dann gilt für dieses System Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = \\ &= [(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm\vec{v}_T] - m\vec{v} \\ &= md\vec{v} - dm(\vec{v}_T - (\vec{v} + d\vec{v})) = 0. \end{aligned}$$

Hier stellt \vec{v}_T die Geschwindigkeit des Treibstoffes dar. Man definiert die Geschwindigkeit \vec{v}_{rel} des Treibstoffes relativ zur Rakete als

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_T - (\vec{v} + d\vec{v})$$

und erhalten damit die Raketengleichung

$$d\vec{p} = m d\vec{v} - dm\vec{v}_{rel} = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet für Anfangsgeschwindigkeit \vec{v}_0 , konstante Austrittsgeschwindigkeit des Treibstoffes und konstante Rate des Treibstoffausstoßes

$$\vec{v}_{end} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{rel} \ln \frac{m_0}{m_{end}},$$

wobei m_0 die Anfangsmasse bezeichnet und m_{end} die verbleibende Masse bei Brennschluss.

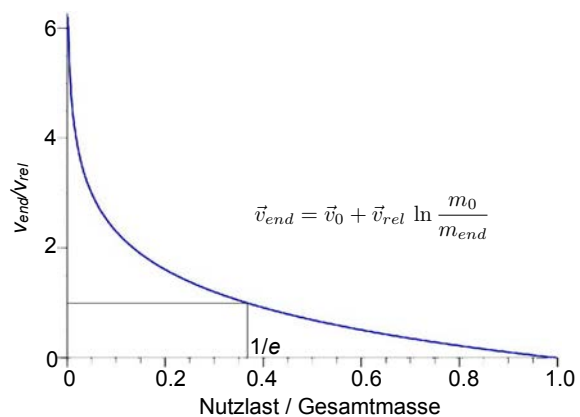


Abbildung 2.34: Endgeschwindigkeit der Rakete als Funktion der Nutzlast.

Man kann somit beliebig hohe Geschwindigkeiten erreichen: Allerdings nimmt das verbleibende Gewicht (d.h. die Nutzlast) exponentiell mit der Geschwindigkeit ab, wie in Abb. 2.34 gezeigt.

In der theoretischen Analyse wurde die Schwerkraft nicht berücksichtigt. Startet die Rakete von der Erde, so muss noch die Schwerebeschleunigung abgezogen werden. Damit wird die resultierende Beschleunigung und Geschwindigkeit deutlich niedriger.

2.3.7 Beispiele

Als Beispiel betrachten wir die erste Stufe der Saturn V Rakete des Apollo Programms. Ihre Ausstoßgeschwindigkeit v_{rel} betrug 2220 m/s, die Startmasse $m_0 = 2,95 \cdot 10^6$ kg, die Nutzlast 27% davon, und die Brenndauer 130 s. Bei konstantem Massestrom betrug dieser

$$\frac{dm}{dt} = 2,95 \cdot 10^6 \text{ kg} \frac{0,73}{130 \text{ s}} = 16565 \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Dies entspricht einem Schub

$$\frac{dm}{dt} v_{rel} = 16565 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 2220 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 36,8 \text{ MN}.$$

Damit war die Anfangsbeschleunigung am Boden

$$\frac{dv}{dt} = -g + \left| \frac{dm}{dt} \right| \frac{v_{rel}}{m_0} = 2,66 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Am Ende der Brenndauer ist die Beschleunigung

$$\frac{dv}{dt} = -g + \left| \frac{dm}{dt} \right| \frac{v_{rel}}{m_{end}} = 36,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Die Endgeschwindigkeit beträgt

$$\begin{aligned} v_{end} &= -gt_B + v_{rel} \ln \frac{m_0}{m_{end}} = -1275 + 2906 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 1,63 \frac{\text{km}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Ein einfaches Modell einer Rakete, wie in Abb. 2.35 zeigt bereits die wichtigsten Merkmale. Diese Modellrakete kann mit Luft oder Wasser als Treibstoff verwendet werden, wobei die Relativgeschwindigkeit in beiden Fällen durch Aufpumpen mit Druckluft erzeugt wird. Nach Öffnen des Ventils wird der



Abbildung 2.35: Modellrakete.

Treibstoff mit der Geschwindigkeit v_0 aus der Rakete gepresst, was den gewünschten Rückstoß erzeugt. Während die Endgeschwindigkeit bei Luft als Treibstoff relativ bescheiden ist, findet man bei Wasser als Treibstoff eine wesentlich höhere Endgeschwindigkeit. Die relative Austrittsgeschwindigkeit ist im Falle von Luft höher, das Massenverhältnis m_0/m_{end} ist jedoch bei Wasser als Treibstoff erheblich günstiger.

2.4 Arbeit, Leistung und Energie

2.4.1 Motivation und Definition

Prinzipiell kann man mit den Newton'schen Axiomen die Bewegung von Massenpunkten wie auch Systemen von Massenpunkten beschreiben. In vielen Fällen ist es aber sehr aufwendig, die Bewegungsgleichungen exakt zu lösen. Es ist dann nützlich, andere Methoden zur Verfügung zu haben, um relevante Aussagen machen zu können. Ein wichtiges und sehr leistungsfähiges Hilfsmittel ist das Konzept der Energie.

Als Beispiel betrachten wir eine Eisenbahn, die mit einer Geschwindigkeit von 250 km/h auf ebener Strecke fährt (\rightarrow Abb. 2.36). Die Zugkraft der Lokomotive reicht genau um die Reibungskraft zu überwinden. Sie fährt auf einen Hügelkamm zu, der 200 m über der Ebene liegt. Gelingt es der Eisenbahn, diesen Hügel mit konstanter Zugkraft zu überqueren? Die Frage kann mit Hilfe der Newton'schen Axiome diskutiert werden, aber nur wenn der gesamte Streckenverlauf (genauer: die Steigung als



Abbildung 2.36: Ein fahrender Zug besitzt kinetische Energie.

Funktion des Ortes) bekannt ist. Am Ende des Kapitels werden wir zeigen, dass dies nicht nötig ist.

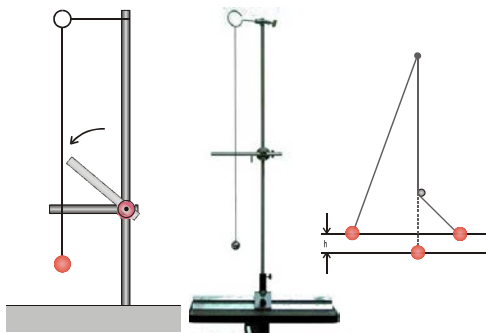


Abbildung 2.37: Das Hemmpendel.

Ein zweites Beispiel kann etwas einfacher im Experiment gezeigt werden: Wir betrachten ein schwingendes Pendel, bei dem wir jeweils einmal pro halbe Periode eine Umlenkung einführen, so dass die Pendellänge verkürzt wird (siehe Abb. 2.37). Frage: wie sieht die Bahn des Pendels jetzt aus?

2.4.2 Arbeit

Wir beginnen mit der Definition der Arbeit. Die Arbeit, die an einem System geleistet wird, ist definiert als das Integral der Kraft F , welche von außen auf das System ausgeübt wird (\rightarrow Abb. 2.38), über den

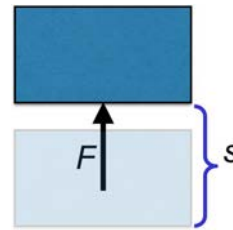


Abbildung 2.38: Definition der Arbeit.

Weg,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \rightarrow W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Die Einheit der Arbeit beträgt demnach ²

$$[W] = \text{Nm} = \text{J} = \text{Joule} = \frac{\text{m}^2\text{kg}}{\text{s}^2}.$$

Wie aus der Definition hervorgeht, trägt nur diejenige Komponente der Kraft zur Arbeit bei, welche parallel zum zurückgelegten Weg wirkt, resp. nur diejenige Komponente des Weges, die parallel zur angelegten Kraft zurückgelegt wird.

Die Kraft, welche hier eingesetzt werden muss, ist die von außen angelegte Kraft. Somit ist die Arbeit positiv definiert wenn gegen den Widerstand des Systems Arbeit verrichtet wird, z.B. wenn ein Körper angehoben wird. Im Falle eines Motors, wo der explodierende Treibstoff eine Kraft erzeugt, wird dem Motor Arbeit entzogen, d.h. die am Motor geleistete Arbeit ist negativ. Dies kann man natürlich auch so betrachten, dass der Motor an seiner Umwelt Arbeit leistet.

Ist die Kraft unabhängig vom Ort, so muss lediglich die Projektion des Weges auf die Kraft integriert werden. Beispiele dafür sind die Schwerkraft (in der Nähe der Erdoberfläche), die Beschleunigungskraft für eine konstante Masse, oder die Arbeit gegen eine Reibungskraft.

Ein typischer Fall ist die Hebung eines Körpers gegen die Gewichtskraft, wie in Abb. 2.39 gezeigt.

²James Prescott Joule (1818 - 1889).

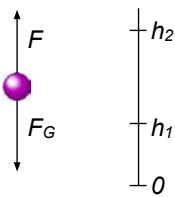


Abbildung 2.39: Hebung eines Körpers gegen die Schwerkraft F_G .

Hier ist die erforderliche Kraft $\vec{F} = -\vec{F}_G = mg$, unabhängig vom Ort. Da Kraft und Wegelement parallel sind, reduziert sich das Integral auf

$$W = \int_{h_1}^{h_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = mg \int_{h_1}^{h_2} ds = mg(h_2 - h_1).$$

Mit der Notation $h = h_2 - h_1$ für die Höhendifferenz erhält man somit für die zu leistende Arbeit

$$W = mgh. \tag{2.5}$$

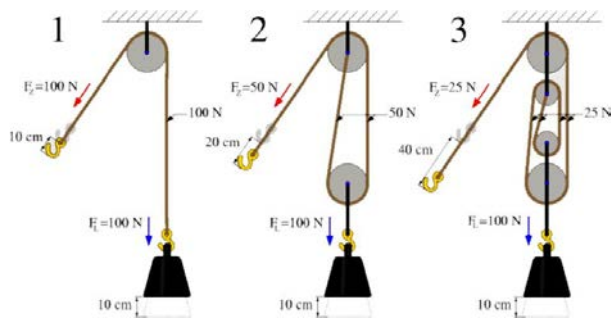


Abbildung 2.40: Unterschiedliche Flaschenzüge.

Die insgesamt geleistete Arbeit hängt somit nur von der Höhendifferenz h ab. Es ist jedoch möglich, die notwendige Kraft oder den zurückgelegten Weg zu reduzieren, jeweils auf Kosten des anderen Faktors. Abb. 2.40 zeigt unterschiedliche Flaschenzüge, welche jeweils ein Gewicht um 10 cm anheben. Je nach Flaschenzug sind die nötigen Zugkräfte 100, 50 oder 25 N, die zurückgelegten Wege 10, 20 oder 40 cm. Die Arbeit beträgt somit in allen Fällen 10 J.

2.4.3 Beispiele mit konstanter Kraft

Ein einfaches Beispiel ist ein Körper, der auf einer schiefen Ebene mit Steigung α reibungsfrei nach

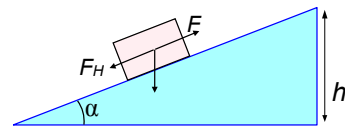


Abbildung 2.41: Schiefe Ebene.

oben geschoben wird (siehe Abb. 2.41). Die Hangabtriebskraft beträgt $F_H = -mg \sin \alpha$. Somit ist eine gleich starke Kraft in Bewegungsrichtung notwendig, um den Körper zu transportieren. Für eine gesamte Höhendifferenz h beträgt die zurückgelegte Wegstrecke $h/\sin \alpha$. Somit ist insgesamt eine Arbeit $W = mgh$ notwendig. Offenbar ist dies unabhängig von der Neigung der Ebene.

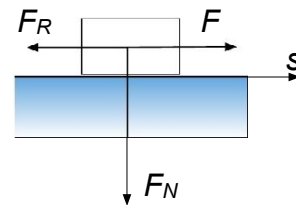


Abbildung 2.42: Verschiebung in der Ebene.

Als nächsten Fall betrachten wir die Arbeit, die benötigt wird, um einen Körper auf einer horizontalen Fläche gegen die Reibungskraft zu bewegen (\rightarrow Abb. 2.42). Die Reibungskraft beträgt

$$F_R = \mu F_N = \mu gm.$$

Um den Körper über eine Distanz s zu transportieren beträgt die Arbeit somit $W = \mu gms$, sofern der Reibungskoeffizient μ konstant ist.

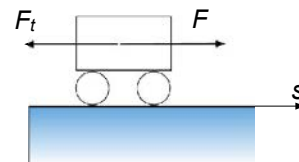


Abbildung 2.43: Reibungsfreie Bewegung.

Das nächste Beispiel, dargestellt in Abb. 2.43, ist ein Körper, der sich reibungsfrei auf ebener Strecke bewegt. Eine äußere Kraft (die gegen die Trägheitskraft wirkt) bewirkt in diesem Fall eine Beschleunigung.

gung. Die Kraft ist $F = ma$. Beträgt die Geschwindigkeit des Körpers zu Beginn v_0 und wird er gleichmäßig beschleunigt, so legt er während einer Zeit Δt eine Distanz

$$s = v_0 \Delta t + \frac{a}{2} \Delta t^2 \quad (2.6)$$

zurück, wobei die Geschwindigkeit auf

$$v = v_0 + a \Delta t$$

erhöht wird. Diese Gleichung kann aufgelöst werden nach der Zeit

$$\Delta t = \frac{v - v_0}{a}.$$

Einsetzen in (2.6) ergibt für den Weg

$$\begin{aligned} s &= v_0 \Delta t + \frac{a}{2} \Delta t^2 = \frac{v_0(v - v_0)}{a} + \frac{(v - v_0)^2}{2a} = \\ &= \frac{2v_0v - 2v_0^2 + v^2 + v_0^2 - 2v_0v}{2a} = + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \end{aligned}$$

Die Arbeit, welche dafür geleistet werden muss, beträgt somit

$$W = Fs = mas = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2). \quad (2.7)$$

Die entspricht gerade der Änderung der kinetischen Energie des Körpers:

$$W = \mathcal{E}_{kin} - \mathcal{E}_{kin,0}.$$

Diese beträgt zu Beginn

$$\mathcal{E}_{kin,0} = \frac{m}{2} v_0^2$$

und am Ende

$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{m}{2} v^2.$$

2.4.4 Variable Kraft

Die Kraft kann auch mit dem Weg variieren; in diesem Fall muss die Integration explizit durchgeführt werden. Der einfachste Fall ist wohl das Federgesetz

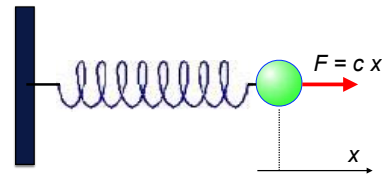


Abbildung 2.44: Federkraft.

(→ Abb. 2.44), wo die Kraft proportional zur Auslenkung x ist, $F_f = -cx$. Dies wird als Hooke'sches Gesetz bezeichnet. Die Kraft, welche von außen angelegt werden muss, ist deshalb $F = cx$ und die Arbeit beträgt

$$W_{ab} = \int_a^b F dx = c \int_a^b x dx = \frac{c}{2}(b^2 - a^2).$$

In diesem Fall wird die an der Feder geleistete Arbeit in potenzielle Energie der Feder überführt. Die potenzielle Energie einer Feder ist deshalb

$$\mathcal{E}_{pot,F} = \frac{c}{2} x^2. \quad (2.8)$$

In dieser Form wird z.B. in einer mechanischen Uhr Energie gespeichert.

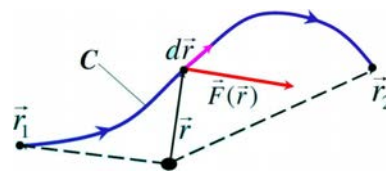


Abbildung 2.45: Arbeit als Wegintegral.

In mehreren Dimensionen sind die Kraft wie auch der Weg vektorielle Größen, wie z.B. in Abb. 2.45. In diesem Fall muss über das Skalarprodukt integriert werden:

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Dies bedeutet, dass nur diejenige Komponente der Kraft \vec{F} , welche in Bewegungsrichtung $d\vec{r}$ wirkt, zur Arbeit beiträgt. Typische Beispiele sind in Abb. 2.42 und 2.43 gezeigt: nur die Zugkraft trägt bei zur Arbeit, nicht die Gewichtskraft, welche senkrecht dazu wirkt.

2.4.5 Energie

In den meisten hier diskutierten Fällen ist die Arbeit, die am Körper geleistet wurde, unabhängig vom Weg, den man vom Anfangs- zum Endpunkt genommen hat, also z.B. von der Geschwindigkeit 0 zur Geschwindigkeit v . Durch die Arbeit, die am Körper geleistet wurde, ist er in eine höhere Lage oder zu einer höheren Geschwindigkeit gebracht worden. Dadurch ist er selbst in die Lage gebracht worden, an anderen Körpern Arbeit zu leisten. Die Größe, welche diese Fähigkeit quantifiziert, ist die mechanische Energie (potenzielle oder kinetische):

Die Energie des Körpers (oder Systems) bezeichnet sein Potenzial, Arbeit zu leisten.

Somit ist auch die Einheit der Energie die gleiche wie die der Arbeit, also J. Sie ist eine Größe, die rein durch den Zustand bestimmt ist, unabhängig vom Weg, auf dem der Zustand erreicht wurde.

In der Mechanik unterscheidet man zwei Arten von Energie, die kinetische und die potenzielle Energie:

$$\mathcal{E}_{mech} = \mathcal{E}_{kin} + \mathcal{E}_{pot}.$$

Die kinetische Energie ist eine Funktion von Geschwindigkeit oder Impuls und Masse des Körpers, die potenzielle Energie ist abhängig vom Ort und von den Kräften, die auf das System wirken. Es können sowohl äußere Kräfte wie auch innere Kräfte beitragen.

Die kinetische Energie entspricht der Arbeit, welche geleistet werden muss, um einen Körper von der Geschwindigkeit 0 auf die Geschwindigkeit v zu beschleunigen. Diese beträgt nach Gl. (2.7)

$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{m}{2} v^2.$$

Die potenzielle Energie ist z.B. durch die Lage im Gravitationsfeld gegeben. Nach Gl. (2.5) beträgt diese

$$\mathcal{E}_{pot,g} = mgh. \quad (2.9)$$

Für andere Kraftfelder, wie z.B. das elektrische Feld, existieren entsprechende potenzielle Energien, wie z.B. das elektrische Potenzial.

Die Änderung der mechanischen Energie eines Systems ist gleich der am System geleisteten Arbeit,

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = W_{12}.$$

Wenn wir noch einen Nullpunkt für die Energie definieren, können wir somit direkt die Ausdrücke übernehmen, die wir für die Arbeit hergeleitet haben. Die Wahl dieses Nullpunkts ist grundsätzlich willkürlich, aber in vielen Fällen existiert eine "natürliche" Wahl, wie z.B. bei der kinetischen Energie.

Nicht jede Art von Arbeit führt zu einer Änderung der mechanischen Energie des Systems. Das Beispiel aus Abb. 2.42 der Arbeit gegen eine Reibungskraft ist ein typisches Beispiel wo die mechanische Energie nicht geändert wird: der Körper ist immer auf der gleichen Höhe, bei der gleichen Geschwindigkeit. Die aufgewendete Arbeit wird stattdessen in Reibungswärme umgewandelt. Ob eine Kraft, gegen die Arbeit geleistet wird, zu einer entsprechenden Änderung der Energie des Systems führt, wird in Kapitel 2.4.8 diskutiert.

2.4.6 Leistung

Eng verwandt mit der Energie ist die Leistung, welche sich durch Differenzierung nach der Zeit ergibt,

$$P = \frac{d\mathcal{E}}{dt}. \quad [P] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W} = \text{Watt}.$$

Die Einheit ist benannt nach James Watt (1736-1819). Handelt es sich um eine mechanische Leistung (Arbeit pro Zeit) und ist die Kraft konstant, so kann die Leistung auch als Kraft mal Geschwindigkeit definiert werden:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Umgekehrt erhält man die geleistete Arbeit aus der Leistung durch Integration über die Zeit:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt.$$

Typische Leistungen von Menschen liegen bei länger andauernden Belastungen im Bereich von 100

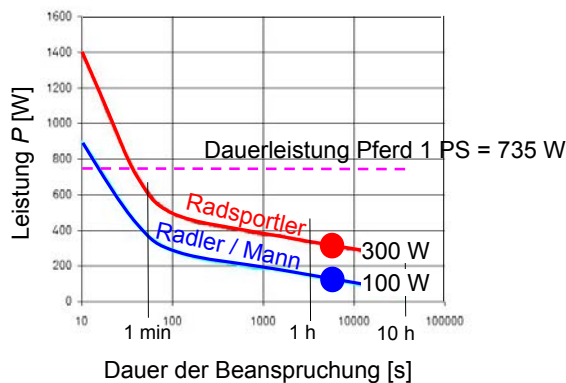


Abbildung 2.46: Leistung als Funktion der Dauer der Beanspruchung.

W, bei trainierten Sportlern bei etwa 300 W. Über kürzere Zeiten können auch Leistungen bis etwa 1 kW abgerufen werden (→ Abb. 8.6). Die Einheit “Pferdestärke” (PS) ist als die Dauerleistung eines Pferdes definiert; sie liegt bei 735 W.

2.4.7 Potenzielle Energie

Potenzielle Energie ist immer mit einer konservativen Kraft verbunden. Nach Gl. (2.8) ist die Arbeit, welche geleistet werden musste, um eine Feder zu spannen, proportional zum Quadrat der Auslenkung. Eine andere Form von potenzieller Energie ist die Lageenergie im Schwerfeld. Nach Gl. (2.9) ist die entsprechende potenzielle Energie proportional zur Höhe, $\mathcal{E}_{lage} = mgh$. Bei potenzieller Energie, die mit einer distanzabhängigen Kraft verbunden ist, wie z.B. der Gravitationsenergie oder der Coulomb-Energie, wählt man den Nullpunkt der Energieskala meist für unendlich getrennte Körper, wo die Kraft verschwindet. Die Kraft ist in beiden Fällen proportional zu $\frac{1}{r^2}$ und die potenzielle Energie, welche durch das Integral über die Kraft gegeben ist, proportional zu $-\frac{1}{r}$.

Ein Molekül als eine deformierbare Ansammlung von Atomen besitzt es eine potenzielle Energie als Funktion der Geometrie. In allen Fällen hängt die Energie von räumlichen Koordinaten ab. Trägt man die potenzielle Energie als Funktion des Ortes auf so erhält man eine Kurve, aus der man leicht qualitative (und auch quantitative) Aussagen machen kann

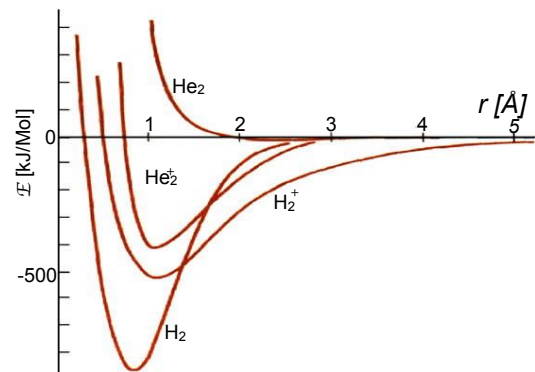


Abbildung 2.47: Potenzielle Energie einfacher 2-atomiger Moleküle als Funktion des atomaren Abstandes.

über die Bewegung, welche das System durchzuführen wird. Abb. 2.47 zeigt als Beispiel die potenzielle Energie von zweiatomigen Molekülen als Funktion des Abstandes zwischen den Atomen. In einem eindimensionalen System bewegt sich das System (falls es zu Beginn in Ruhe ist) auf der Potenzialkurve nach unten, wobei potenzielle Energie in kinetische Energie umgewandelt wird, d.h. das System beschleunigt. Indem die dadurch erzeugte kinetische Energie wieder in potenzielle Energie umgewandelt wird, kann das System sich auch auf der Potenzialkurve aufwärts bewegen. Das Minimum der Kurve entspricht dem Gleichgewichtsabstand: Hier wirken keine Kräfte auf die Atome.

Wichtig ist bei solchen Betrachtungen, dass man die gesamte Energie des Systems berücksichtigt. Dies soll anhand eines scheinbar paradoxen Experiments gezeigt werden.

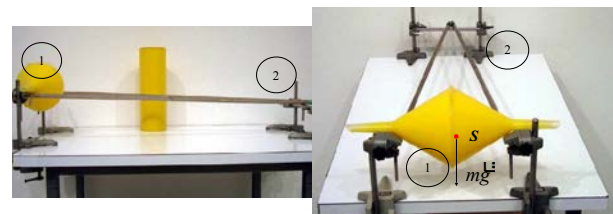


Abbildung 2.48: Bahn für Hohlzylinder und Doppelkegel.

Legt man einen Hohlzylinder auf die in Abb. 2.48 gezeigten Schienen, so rollt er von der höheren zur niedrigeren Seite (1 → 2). Legt man dagegen einen

Doppelkegel auf die Schienen, so rollt er in entgegengesetzter Richtung, scheinbar also aufwärts. Dies liegt an der Anordnung der beiden Schienen: Sie laufen auseinander. Dadurch sinkt der Doppelkegel, sein Schwerpunkt sinkt und das System kann Energie gewinnen.

2.4.8 Konservative Kräfte

Die potenzielle Energie wird dem System zugeführt, indem daran Arbeit verrichtet wird. Daraus lässt sich umgekehrt ableiten wie groß die Kraft ist, welche überwunden werden muss, um dem System die entsprechende potenzielle Energie zuzuführen. Die Kraft, welche von außen aufgebracht werden muss beträgt in einer Dimension

$$F = \frac{dW}{ds} = \frac{d\mathcal{E}_{pot}}{ds}.$$

Diese ist im Gleichgewicht entgegengesetzt gleich der Kraft, welche das System auf seine Umgebung ausübt. Wird keine äußere Kraft auf das System angewendet, so bewegt es sich nur unter dem Einfluss der potenziellen Energie. Es wird dann beschleunigt durch eine entgegen-gerichtete Kraft

$$F_P = -\frac{d\mathcal{E}_{pot}}{ds}.$$

Die Kraft, welche auf einen Körper wirkt, kann somit aus der Ortsabhängigkeit der potenziellen Energie bestimmt werden. In drei Dimensionen gilt entsprechend

$$\vec{F}_P = -\vec{\nabla}\mathcal{E}_{pot} = -\left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right)\mathcal{E}_{pot},$$

d.h. die resultierende Kraft zeigt in Richtung des steilsten Abfalls.

Abb. 2.49 zeigt als Beispiel eine Karte mit Höhenkurven und darauf für einige Orte die Richtung des steilsten Gefälles, also die Richtung der resultierenden Kraft. Ein typisches Beispiel für eine konservative Kraft ist die Gravitationskraft

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

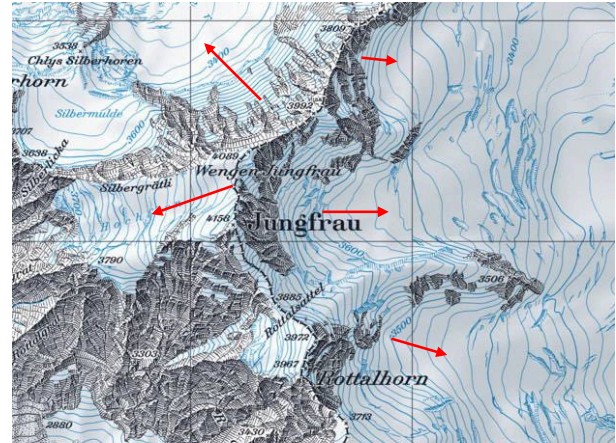


Abbildung 2.49: Richtung des steilsten Abfalls auf einer Landkarte.

für eine Masse m im Potenzial eines punktförmigen Körpers der Masse M . \vec{r} ist der Ortsvektor von m relativ zu M . Die entsprechende potenzielle Energie ist

$$U_g(r) = -G\frac{Mm}{r}.$$

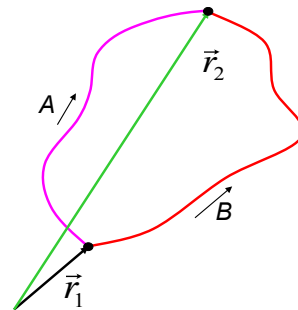


Abbildung 2.50: Zwei unterschiedliche Wege in einem Kraftfeld.

Kräfte, die von einem Potenzial abgeleitet werden können, werden als konservative Kräfte bezeichnet. Sie haben die Eigenschaft, dass die Arbeit, welche geleistet werden muss, um von einem Ausgangspunkt \vec{r}_1 zu einem Ziel \vec{r}_2 zu gelangen, nicht davon abhängt, welcher Weg dabei benutzt wird (\rightarrow Abb. 2.50). Es gilt somit

$$W_a = \int_{\vec{r}_{1,A}}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = W_b = \int_{\vec{r}_{1,B}}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Somit gilt auch, dass die Arbeit für geschlossene Wege verschwindet,

$$W = \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0.$$

Diese Beziehung bietet auch die Möglichkeit aus der Struktur eines Kraftfelds $\vec{F}(\vec{r})$ zu erkennen, ob dieses konservativ ist: Man bestimmt die Rotation des Kraftfeldes, $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})$. Verschwindet diese überall, so ist das Kraftfeld konservativ.

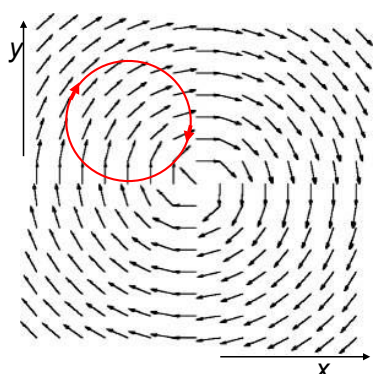


Abbildung 2.51: Kraftfeld mit Wirbel.

Ein typisches Beispiel ist eine Bergtour: kommt man am Ende des Tages an den Ausgangspunkt zurück, so ist die potenzielle Energie die gleiche wie zu Beginn. Die geleistete Arbeit ist demnach nicht in potenzielle Energie umgewandelt worden, sondern in Wärme. Abb. 2.51 zeigt ein Kraftfeld mit einem Wirbel. Eine Fahrradtour (roter Kreis) kann hier in einer Richtung meist Rückenwind nutzen, in der entgegengesetzte Richtung muss man deutlich mehr Kraft einsetzen, um den Luftwiderstand zu überwinden.

2.4.9 Gleichgewicht

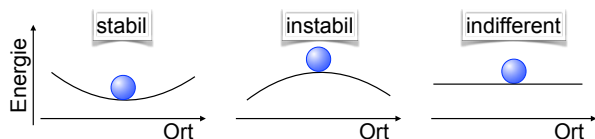


Abbildung 2.52: Unterschiedliche Arten von Gleichgewicht.

Offenbar gibt es auch Situationen, in denen keine Kraft auf den Körper wirkt. Abb. 2.52 zeigt drei un-

terschiedliche Fälle, bei denen der Gleichgewichtsort einem Minimum, einem Maximum oder einem ebenen Teil der Potenzialkurve entspricht. Man bezeichnet diese Punkte als stabiles, instabiles oder neutrales (indifferentes) Gleichgewicht. Bei einem instabilen Gleichgewicht führt eine geringe Auslenkung dazu, dass eine Kraft wirkt und das System immer stärker beschleunigt. Ein Beispiel dafür ist ein Bleistift, der auf seiner Spitze steht. Im Fall des stabilen Gleichgewichts führt eine Auslenkung zu einer Kraft, welche das System zurück zum Gleichgewicht treibt (z.B. Pendel), während in einem neutralen Gleichgewicht verschiedene Positionen mit identischer Energie vorhanden sind und eine Auslenkung keine Kraft erzeugt. Typische Beispiele dafür sind Gegenstände auf einem Tisch.

2.4.10 Austausch von Energie

Unterschiedliche Energieformen können ineinander umgewandelt werden. Dies geschieht z.B. wenn man einen Körper fallen lässt: dabei wird potenzielle Energie in kinetische Energie umgewandelt.

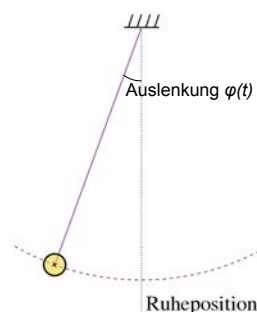


Abbildung 2.53: Fadenpendel.

In einem Pendel wird ebenfalls Energie von potenzieller in kinetische umgewandelt (und umgekehrt). Abb. 2.53 zeigt als Beispiel ein Fadenpendel, welches für kleine Auslenkungen einem mathematischen Pendel entspricht. Wie in Kapitel 5.2 gezeigt wird, verhält sich die Auslenkung eines mathematischen Pendels als Funktion der Zeit ist wie

$$\varphi(t) = A \sin \omega t \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}},$$

wobei φ den Winkel der Auslenkung darstellt, ℓ die Länge des Pendels und A die Amplitude der Schwingung. Die potenzielle Energie ist gegeben durch die Höhe,

$$\mathcal{E}_{pot} = mgh = mg\ell \frac{\varphi^2}{2} = \frac{mg\ell}{2} (A \sin \omega t)^2,$$

wobei - wie immer beim mathematischen Pendel - die Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$ verwendet wurde. Die kinetische Energie ist

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{kin} &= \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{m}{2} \ell^2 \omega^2 (A \cos \omega t)^2 \\ &= \frac{mg\ell}{2} (A \cos \omega t)^2. \end{aligned}$$

Die Summe aus potenzieller und kinetischer Energie ist somit

$$\mathcal{E} = mg \frac{\ell}{2} A^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = mg \frac{\ell}{2} A^2,$$

also zeitunabhängig. Es findet lediglich ein Austausch zwischen den beiden Energieformen statt.

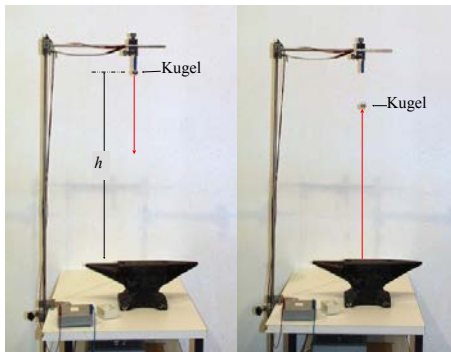


Abbildung 2.54: Kugel springt auf einem Amboss.

Die Umwandlung von potenzieller in kinetische Energie kann man auch beim Fallenlassen eines Körpers beobachten, wie im Beispiel von Abb. 2.54. Beim Auftreffen auf dem Boden wird die kinetische Energie kurzfristig in elastische Energie umgewandelt, dann wieder in kinetische und schließlich wieder in potenzielle. Die Umwandlungsprozesse sind nie 100% effizient, sondern ein Teil der Energie wird jeweils in Wärme umgewandelt. Deshalb erreicht die Kugel nicht mehr ganz die Ausgangshöhe.

Für kräftefreie Systeme ist die kinetische Energie auch eine Erhaltungsgröße; dies ergibt sich aus den Newton'schen Axiomen: Für $m = \text{const.}$ kann das erste Newton'sche Axiom mit der Geschwindigkeit multipliziert werden:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\dot{x}\ddot{x} &= \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\dot{x})^2 = 0. \end{aligned}$$

2.4.11 Energieerhaltung

Die obigen Beispiele illustrieren ein allgemeines Prinzip: Energie ist eine Erhaltungsgröße; sie kann weder erzeugt noch vernichtet werden.

In einem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtenergie \mathcal{E} erhalten, d.h. die Summe aller beteiligten Energieformen ist eine Konstante.

Wird die Energie eines Systems erhöht, indem daran Arbeit geleistet wird, so muss dazu die Energie eines anderen Systems erniedrigt werden. Sie kann aus einer Form in eine andere überführt werden oder von einem Ort zu einem anderen Ort transportiert werden, die gesamte Energie eines abgeschlossenen Systems bleibt jedoch konstant. Im Rahmen der Mechanik ist die Energie auf potenzielle und kinetische Energie beschränkt, so dass gilt

$$\mathcal{E}_{mech} = \mathcal{E}_{kin} + \mathcal{E}_{pot} = \text{konst.}$$

Nicht in allen Fällen wird die Arbeit, die am System geleistet wurde, auch in mechanische Energie umgewandelt. Erfolgt die Arbeit gegen eine Reibungskraft, wie z.B. beim Transport eines Körpers auf einer horizontalen Ebene mit konstanter Geschwindigkeit, so bleibt die mechanische Energie des Körpers konstant. In diesem Fall wird die geleistete Arbeit in Wärme umgewandelt.

Es ist nicht möglich, zu "beweisen", dass die Energie eines beliebigen Systems konstant ist. Der Energieerhaltungssatz ist jedoch mit allen bisher gemachten Erfahrungen vereinbar. Er kann außerdem bewiesen werden für den Fall, dass die Naturgesetze zeitlich invariant sind. Dies ist wiederum ein nicht beweisbarer Glaubenssatz, welcher mit allen bisher

gemachten Erfahrungen übereinstimmt. Im Falle der oben erwähnten nichtkonservativen Kräfte (z.B. Reibung), bei denen die gesamte Arbeit über einen geschlossenen Pfad nicht verschwindet, wird die geleistete Arbeit in Wärmeenergie umgewandelt. Außerdem sind Energie und Materie äquivalent, d.h. sie können ineinander umgewandelt werden.



Abbildung 2.55: Gibt es ein ‘‘Energieproblem’’?

Wenn in den Medien von einem ‘‘Energieproblem’’ die Rede ist (siehe z.B. Abb. 2.55), oder sogar von einem ‘‘Energemangel’’ so kann sich dies offenbar nicht auf die gesamte zur Verfügung stehende Energie beziehen, sondern offenbar nur auf bestimmte Formen von Energie. Da es nicht möglich ist, Energie zu erzeugen, kann das ‘‘Energieproblem’’ auch nicht ‘‘gelöst’’ werden, indem man mehr Energie erzeugt.

Es gibt jedoch unter den unterschiedlichen Formen der Energie solche die nützlicher sind als andere. So können die mechanischen Formen der Energie theoretisch zu 100% in andere Energieformen umgewandelt werden. Bewegt man sich von A (z. B. Uni Dortmund) nach B (z. B. nach Hause) und wieder nach A , so ist offenbar die mechanische Energie des Körpers, welcher dabei bewegt wurde, konstant geblieben. Die Energie, welche dabei ‘‘verbraucht’’ wurde, wurde somit nicht in mechanische Energie des transportierten Körpers umgesetzt, sondern typischerweise in Wärme umgewandelt. Die minimal für einen solchen Transport notwendige Energie ist damit Null. Ein Verkehrssystem kann als umso intelligenter bezeichnet werden, je näher es diesem Grenzwert kommt.

2.4.12 Anwendungen

Die Verwendung des Prinzips der Energieerhaltung kann Rechnungen häufig stark vereinfachen. Als Beispiel berechnen wir die Geschwindigkeit eines Pendels am tiefsten Punkt. Man verwendet dazu die Tatsache, dass die kinetische Energie am niedrigsten Punkt gerade gleich der potenziellen Energie am höchsten Punkt ist,

$$\mathcal{E}_{kin}(\varphi = 0) = \mathcal{E}_{pot}(\varphi_{max}) = \frac{m}{2}v^2 = mgh.$$

Somit ist die Geschwindigkeit am niedrigsten Punkt

$$v = \sqrt{2gh},$$

d.h. gleich groß wie wenn ein Körper fallengelassen wird, außer, dass in diesem Fall die Geschwindigkeit horizontal ist. Der Faden übt zwar eine Kraft aus auf die Pendelmasse, da die Länge konstant ist, ist diese Kraft senkrecht zur Bewegung und er leistet keine Arbeit.

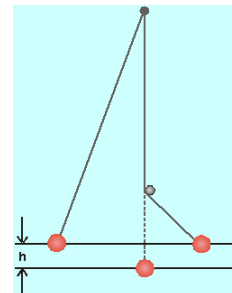


Abbildung 2.56: Bahn des Hemmpendels.

Damit können wir auch die Frage beantworten was für eine Bahn das Hemmpendels (\rightarrow Abb. 2.56) beschreibt: auf der gestreckten Seite wird die gesamte potenzielle Energie in kinetische Energie umgewandelt. Auf der gehemmten Seite wird die kinetische Energie wieder in potenzielle Energie umgewandelt, d.h. der Pendelkörper erreicht die gleiche Höhe wie auf der gestreckten Seite.

Hier die Lösung der Eisenbahnfrage aus Abschnitt 2.4.1: Da die Lokomotive die Reibungskraft kompensiert, ist das System äquivalent zu einem reibungsfreien Zug ohne Lokomotive. Er kann den Hügel überqueren, wenn die kinetische Energie in der

Ebene höher ist als die potenzielle Energie auf dem Hügel. Die beiden Energien betragen, jeweils durch die Masse dividiert

$$\frac{\mathcal{E}_{kin}}{m} = \frac{1}{2}v^2 = 2411 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 2411 \frac{\text{J}}{\text{kg}}.$$

$$\frac{\mathcal{E}_{pot}}{m} = gh = 1962 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1962 \frac{\text{J}}{\text{kg}}.$$

Die Energie reicht somit aus. Es bleiben sogar $449 \text{ m}^2/\text{s}^2$ übrig, d.h. die Eisenbahn hat noch eine Geschwindigkeit von $21 \text{ m/s} = 76 \text{ km/h}$.

Eine sportliche Anwendung der Energieerhaltung ist der Stabhochsprung. Hierbei wird im Wesentlichen kinetische Energie (Sprint vor dem Absprung) in potenzielle Energie (Höhe der Messlatte) umgewandelt. Die maximale Sprintgeschwindigkeit beträgt etwa $40 \text{ km/h} = 11 \text{ m/s}$. Daraus ergibt sich eine Höhe

$$mgh = \frac{m}{2}v^2 \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{121}{20} \text{ m} \approx 6,05 \text{ m},$$

was in der Nähe des aktuellen Weltrekords von $6,16 \text{ m}$ liegt (Renaud Lavillenie 2014).

2.5 Stoßprozesse

2.5.1 Definition und Motivation

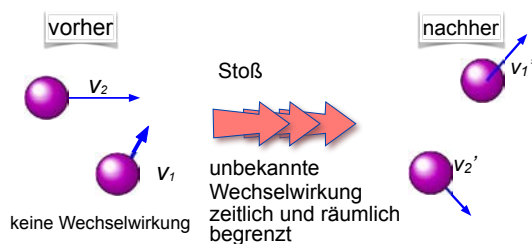


Abbildung 2.57: Stoßprozess.

Unter einem Stoß (\rightarrow Abb. 2.57) versteht man eine zeitlich begrenzte Wechselwirkung zwischen zwei oder mehr Systemen, wobei man sich für die Einzelheiten der Wechselwirkung entweder nicht interessiert oder keine Möglichkeit hat, sie zu untersuchen oder zu beeinflussen. Man betrachtet einerseits die

Körper bevor die Wechselwirkung stattfindet und andererseits dann, wenn die Wechselwirkung praktisch nicht mehr vorhanden ist. Dazwischen liegt die eigentliche Wechselwirkungszone. Interessant ist eine solche Betrachtung vor allem dann, wenn die Wechselwirkung mit dem Abstand zwischen den beiden Körpern rasch abnimmt, so dass die beteiligten Körper sich meist frei und unabhängig bewegen.

Für den gesamten Prozess geht man davon aus, dass keine äußeren Kräfte auf das System wirken, $\vec{F}_{ext} = 0$. Aus dem 2. Newton'schen Axiom folgt somit, dass der Gesamtimpuls \vec{p}_{ges} des Systems, also die Summe der Einzelimpulse \vec{p}_i konstant bleibt:

$$\vec{p}_{ges} = \sum_i \vec{p}_i = \text{konst.}$$

Es existieren jedoch Kräfte zwischen den Partnern. Gemäß dem dritten Axiom treten diese jedoch immer paarweise auf, $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ und somit sind auch die dadurch erzeugten Impulsänderungen gegengleich,

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik} = -\frac{d\vec{p}_k}{dt},$$

so dass diese sich in der Summe aufheben,

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = 0.$$

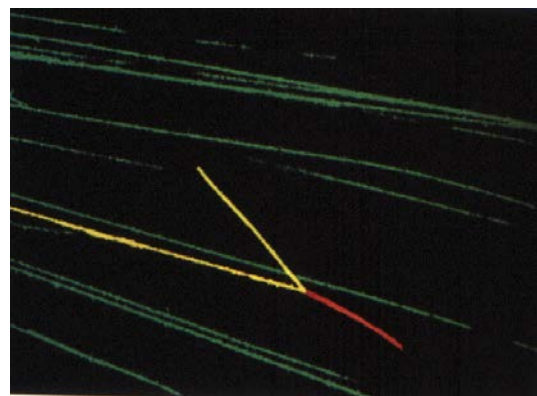


Abbildung 2.58: Stoßprozess eines α -Teilchens mit einem Stickstoffatom.

Ein typischer Fall sind Kollisionen in der Kern- und Elementarteilchenphysik (\rightarrow Abb. 2.58), wo die Wechselwirkungen häufig gar nicht analytisch

beschrieben werden können. In der Molekülphysik oder bei chemischen Reaktionen zwischen Molekülen ist die Situation sehr ähnlich: man kennt die Details der Wechselwirkung nicht, man kann höchstens die Ausgangszustände bestimmen und die Produkte analysieren.

In vielen Fällen kann man einen Teil oder sogar die gesamte Kinematik nach dem Stoß (d.h. ab dem Zeitpunkt, wo die Wechselwirkungen vernachlässigbar klein geworden sind) vorhersagen ohne die Details der Wechselwirkung zu kennen. Wir werden für geeignete Beispiele die Geschwindigkeiten nach dem Stoß berechnen ohne die Art der Wechselwirkung überhaupt zu diskutieren. Dies bedeutet, dass die folgenden Überlegungen für die Gravitationswechselwirkung zwischen Galaxien genau so zutrifft wie für Billardkugeln oder sub-atomare Teilchen in einem Beschleuniger.

Stoßprozesse zwischen Atomen und Molekülen in Gasen spielen eine wichtige Rolle. Kollisionen zwischen Atomen und Molekülen sind die Grundlage für die kinetische Gastheorie.

2.5.2 Klassifikation von Stoßprozessen

Man unterscheidet verschiedene Arten von Stoßprozessen. Zum einen können wir sie anhand der Zahl der Stoßpartner klassifizieren. Im Rahmen dieser Vorlesung beschränken wir uns auf zwei Stoßpartner.

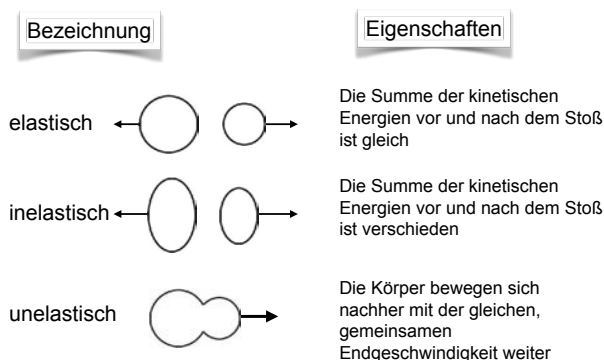


Abbildung 2.59: Klassifizierung von Stoßprozessen zwischen 2 Körpern.

Ein weiteres wichtiges Kriterium ist, ob beim Stoß

kinetische Energie der Körper in Deformations-Energie umgewandelt wird. Je nachdem wird der Stoß als elastisch, inelastisch, oder unelastisch bezeichnet, wie in Abb. 2.59 zusammengefasst.

Da keine äußeren Kräfte auf das System wirken ist die gesamte Energie des Systems immer konstant. Bei elastischen Stößen ist auch die mechanische Energie konstant, bei inelastischen und unelastischen Stößen wird ein Teil in Wärme umgewandelt.



Abbildung 2.60: Beispiel für einen unelastischen Stoß: Meteorkrater in Arizona.

Ein typisches Beispiel eines unelastischen Stoßes ist der Aufprall eines Meteoriten auf die Erde (→ Abb. 2.60): hier wurde in guter Näherung die gesamte kinetische Energie des Meteoriten in Wärme umgewandelt.

Ein weiteres typisches Beispiel für inelastische oder unelastische Stöße sind Zusammenstöße zwischen Automobilen oder Autos mit stationären Objekten (→ Abb. 2.61). Die Deformations-Energie wird hier sehr leicht sichtbar.

2.5.3 Kraftstoß

In vielen Fällen ist es auch nützlich, die Änderung des Impulses eines Teilchens während einer begrenzten Zeit zu betrachten.

Wie in Abb. 2.62 gezeigt, kann das eine zeitliche begrenzte konstante Kraft sein (links) oder eine kontinuierlich als Funktion der Zeit variable Kraft. Die relevante Größe ist die gesamte Impulsänderung des Körpers, auf den diese Kraft wirkt. Gemäß dem

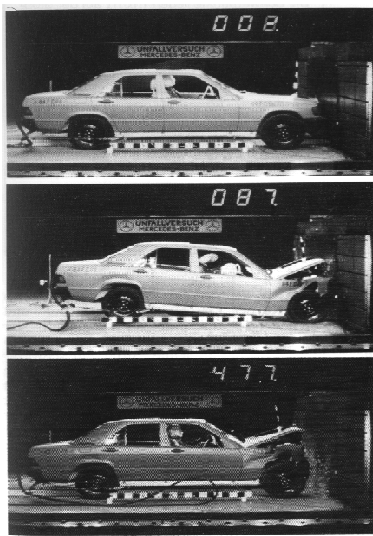


Abbildung 2.61: Unelastischer Stoß eines Automobils.

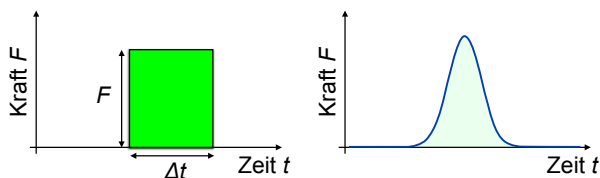


Abbildung 2.62: Zeitlich begrenzte Kraft.

zweiten Newton'schen Axiom ist die Impulsänderung

$$\Delta \vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt.$$

Diese wird als Kraftstoß bezeichnet. Die Einheit des Kraftstoßes ist $[\Delta \vec{p}] = \text{mkg/s} = \text{Ns}$. Im einfachen Fall (Abb. 2.61 links) ist er gegeben durch das Produkt aus Kraft und Dauer, $\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t$. Damit lassen sich also z.B. die Kräfte abschätzen, die bei einem Meteoriteneinschlag wirken.

2.5.4 Elastischer 2-Körperstoß

Wir betrachten zwei Körper mit Massen m_1 und m_2 . Wir diskutieren hier nur den Fall wo die Schwerpunkte der beiden Körper sich zu jeder Zeit auf der gleichen Linie bewegen - man spricht dann von

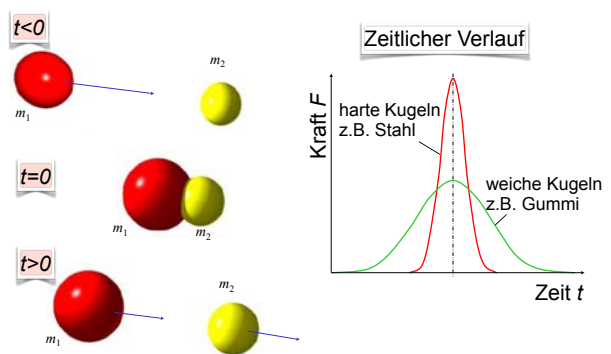


Abbildung 2.63: Zentraler elastischer Stoß.

einem zentralen Stoß (\rightarrow Abb. 2.63). In diesem Fall spielt der Vektor-Charakter der Geschwindigkeit keine Rolle, die Geschwindigkeiten können als Skalare beschrieben werden. Die Geschwindigkeiten vor dem Stoß seien $v_{1,2}$. Man würde erwarten, dass je nach der Art der Wechselwirkung während des Stoßes die beiden Körper sich nach dem Stoß sehr unterschiedlich verhalten.

Um die Geschwindigkeiten $v'_{1,2}$ nach dem Stoß zu berechnen benötigen wir lediglich die Erhaltungssätze für Energie und Impuls. Der Impuls bleibt nach den allgemeinen Voraussetzungen für Stoßprozesse immer erhalten, die mechanische Energie für den Fall elastischer Stöße. Die Erhaltungssätze lauten

$$p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = p'_1 + p'_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$2E_{kin} = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2.$$

Die beiden Erhaltungssätze können als Bestimmungsgleichungen für die beiden Endgeschwindigkeiten verwendet werden. Auflösung nach $v'_{1,2}$ ergibt:

$$v'_1 = \frac{2m_2 v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}. \quad (2.10)$$

Hier sind offenbar die absoluten Massen nicht relevant, sondern allein das Massenverhältnis $\alpha = m_2/m_1$. Als Funktion dieser Größe erhält man

$$v'_1 = \frac{2\alpha v_2 + v_1(1 - \alpha)}{1 + \alpha}$$

$$v'_2 = \frac{2v_1 + v_2(\alpha - 1)}{1 + \alpha}. \quad (2.11)$$

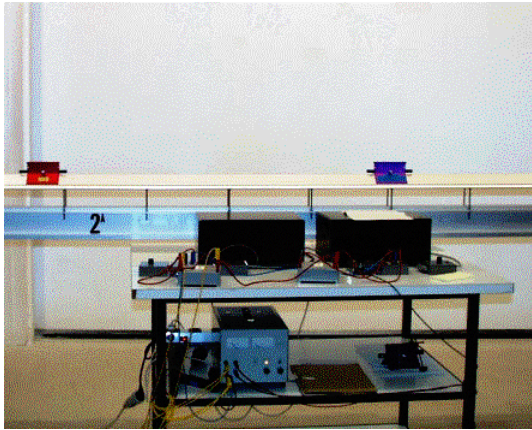


Abbildung 2.64: Elastischer Stoß auf Schiene.

Wir betrachten zunächst als einfachen Spezialfall die Situation wo beide Massen identisch sind, $m_1 = m_2 = m$, $\alpha = 1$. Dann vereinfachen sich die Ausdrücke zu

$$v'_1 = v_2; \quad v'_2 = v_1,$$

d.h. die beiden Körper tauschen Geschwindigkeit (und damit Impuls). Damit verbunden ist auch ein Übertrag von Energie vom einen auf den anderen Körper.

Als nächstes Beispiel betrachten wir den Fall von beliebigen Massen, aber $v_2 = 0$. Wie viel Energie wird von m_1 auf m_2 übertragen? Lösung:

$$\mathcal{E}'_2 = \mathcal{E}'_1 \frac{4(m_1/m_2)}{(1+m_1/m_2)^2} = \mathcal{E}'_1 \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}.$$

Der Energieübertrag wird somit maximal (100 %) für $m_1 = m_2$ oder $\alpha = 1$ und verschwindet für $\alpha \rightarrow 0$ und $\alpha \rightarrow \infty$.

Als dritten Spezialfall betrachten wir $\alpha = 1/2$, d.h. $m_2 = m_1/2$, $v_2 = 0$. Hier bewegen sich beide Schlitten nach dem Stoß in die gleiche Richtung, mit dem Geschwindigkeitsverhältnis 4:1:

$$v'_1 = \frac{v_1}{3}, \quad v'_2 = \frac{4v_1}{3}.$$

Die leichtere Masse bewegt sich somit nach dem Stoß schneller als die schwere vor dem Stoß!

Für zwei weitere Spezialfälle verwenden wir Schlitten mit einem Massenverhältnis von 2:1, von denen

der eine jeweils auf den ruhenden zweiten auftrifft. Ist der massivere Schlitten in Ruhe, d.h. $m_2 = 2 m_1$, $\alpha = 2$, $v_2 = 0$. Einsetzen in die allgemeine Formel (2.10) ergibt

$$v'_1 = -\frac{v_1}{3}, \quad v'_2 = \frac{2v_1}{3},$$

d.h. die leichtere Masse bewegt sich nach dem Stoß rückwärts, die schwerere mit reduzierter Geschwindigkeit vorwärts. Im Extremfall von einem großen Massenverhältnis ($m_2 \gg m_1$) wird die leichtere Masse exakt reflektiert.

2.5.5 Fallende Gummibälle



Abbildung 2.65: Zwei Gummibälle werden fallen gelassen.

Man lässt zwei Bälle (\rightarrow Abb. 2.65) aus einer Höhe h_0 auf den Erdboden fallen. Beide Bälle erreichen den Boden mit der Geschwindigkeit v . Der leichtere Ball steigt auf eine Höhe h , die bis zu $9h_0$ betragen kann.

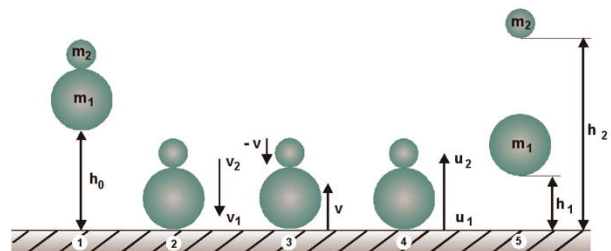


Abbildung 2.66: Bezeichnung der relevanten Geschwindigkeiten.

Abb. 2.66 definiert die Geschwindigkeiten der beiden Bälle, welche bei der Berechnung berücksichtigt

werden müssen. Beim Auftreffen auf dem Boden haben beide Bälle eine Geschwindigkeit von

$$v = \sqrt{2gh_0}.$$

Die Geschwindigkeit des unteren, schwereren Balls wird zuerst invertiert. Dadurch treffen die beiden Bälle mit betragsmäßig gleichen Geschwindigkeiten aufeinander. Für $v_1 = v$ und $v_2 = -v$ folgt aus Gl. 2.11 für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß

$$v_1' = v \frac{1 - 3\alpha}{1 + \alpha} \quad v_2' = v \frac{3 - \alpha}{1 + \alpha}.$$

Für $\alpha \rightarrow 0$ wird $v_1' = v$ und $v_2' = 3v$. Damit ist die kinetische Energie des kleineren Balls $3^2 = 9$ mal so hoch wie die ursprüngliche potenzielle Energie und der Ball steigt bis zu 9 mal so hoch auf. Für $m_2 = m_1/3$ wird $v_2' = 2v$ und er steigt noch vier mal so hoch.

2.5.6 Stoß an Kugelreihe



Abbildung 2.67: Stoß an einer Kugelreihe.

Die Übertragung von Impuls von einem Körper auf einen anderen kann auch sehr schön mit Hilfe von aufgehängten Kugeln gezeigt werden (\rightarrow Abb. 2.67). Lässt man eine Kugel in auf eine zweite Kugel fallen, welche in Ruhe ist, so realisiert man den oben diskutierten Fall. Zwar ist die Bewegung der Kugel nicht auf einer Geraden, aber unmittelbar beim Stoß ist die Bewegung horizontal; unmittelbar danach beginnt ein Austausch von kinetischer und potenzieller Energie, der aber während des Stoßes vernachlässigt werden kann. Durch Zufügen weiterer Kugeln erhält man verschiedene Fälle die auch analog berechnet werden können. Dabei beobachtet man,

dass immer gleich viele Kugeln wegfliegen, wie auf die Reihe auftreffen. Mit der Impulserhaltung wäre auch vereinbar, dass beim Auftreffen einer Kugel mit Geschwindigkeit v auf der anderen Seite zwei Kugeln mit halber Geschwindigkeit wegfliegen. Übung: Warum geschieht das nicht?

Wenn alle Kugeln die gleiche Masse haben, sind nach dem Stoß immer gleich viele Kugeln in Bewegung wie vor dem Stoß. Dies ändert sich, wenn Kugeln mit unterschiedlicher Masse stoßen - in exakter Analogie zum Stoß auf der Schiene. So schiebt eine schwere Kugel eine leichtere vor sich her und gibt nur einen Teil seines Impulses ab. Trifft jedoch eine leichte Kugel auf eine schwere, so wird sie reflektiert, während die schwere nur entsprechend langsamer zurückweicht.

2.5.7 Unelastischer 2-Körperstoß

Von einem unelastischen Stoß zweier Körper spricht man dann, wenn sich die beiden Körper nach dem Stoß gemeinsam weiterbewegen, also "verschmelzen". In diesem Fall ist die mechanische Energie des Systems nicht erhalten, da ein Teil davon in Deformations- und Wärmeenergie umgewandelt wird. Es gilt jedoch weiterhin die Impulserhaltung:

$$p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v',$$

wobei v' die Geschwindigkeit des kombinierten Körpers nach dem Stoß darstellt. Sie beträgt somit

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \tag{2.12}$$

entspricht also massengewichtete Mittel der Anfangsgeschwindigkeiten.

Abb. 2.68 zeigt ein entsprechendes Experiment. Hier wird ein Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_1 auf einen ruhenden Körper der gleichen Masse auftrifft, $m_1 = m_2 = m$. Die beiden kleben aneinander und bewegen sich gemeinsam weiter. Für die aktuellen Parameter wird aus Gl. (2.12)

$$v' = \frac{mv_1}{m + m} = \frac{v_1}{2}.$$

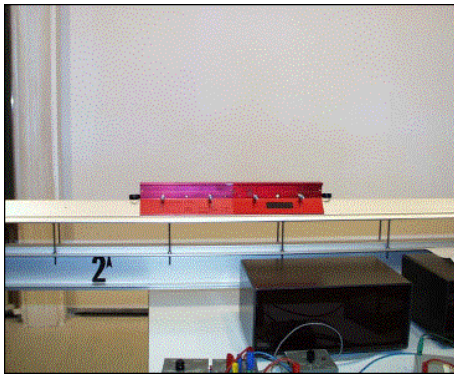


Abbildung 2.68: Unelastischer Stoß.

Somit ist die resultierende Geschwindigkeit gleich der halben Geschwindigkeit des bewegten Körpers. Die Geschwindigkeit wird im Experiment gemessen, indem für den ersten Körper zweimal die Verdunkelungszeit gemessen wird, für den kombinierten, doppelt so langen, nur einmal; die zweite Zeit ist in guter Näherung doppelt so lang wie die erste.

2.5.8 Elastischer Stoß in zwei Dimensionen

Im Allgemeinen finden Stöße nicht in einer Dimension statt. Wir diskutieren hier den zweidimensionalen Fall, der in Abb. 2.69 dargestellt ist. Der Erhaltungssatz für die Energie bleibt unverändert, während der Erhaltungssatz für den Impuls jetzt für beide Dimensionen unabhängig gilt. Wir betrachten einen elastischen Stoß zwischen zwei Körpern

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2.$$

Damit hat man drei Gleichungen und (im Allgemeinen) vier Geschwindigkeitskomponenten nach dem Stoß. Es ist somit nicht möglich, die Bewegung der Körper nach dem Stoß vorauszusagen.

Dass man trotzdem zu nützlichen Aussagen kommen kann, zeigt z.B. der Spezialfall, dass die beiden Körper gleiche Masse haben und der eine Körper zu Beginn in Ruhe ist. Dann vereinfachen sich die Erhaltungsgleichungen zu

$$\vec{v}_2 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2.$$

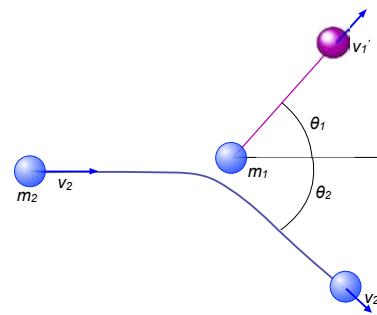


Abbildung 2.69: Elastischer Stoß in 2 Dimensionen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die Behandlung vereinfachen, indem wir die x -Achse des Koordinatensystems in Richtung der Anfangsbewegung \vec{v}_2 legen. Dann folgt aus der Impulserhaltung für die y -Komponente, dass die beiden y -Komponenten nach dem Stoß entgegengesetzt sind,

$$v'_{1y} = -v'_{2y} = v_y.$$

Wie bereits erwähnt, kann man die Bahnen der beiden Körper nicht bestimmen; sie hängen u.a. davon ab, wie stark die beiden Körper gegeneinander versetzt sind. Aus der obigen Beziehung zwischen einlaufenden und auslaufenden Geschwindigkeiten erhält man aber eine Bedingung für die auslaufenden Geschwindigkeitsvektoren, welche für alle Stöße dieser Art erfüllt sein muss, unabhängig von der Art der Wechselwirkung: Der Winkel $\theta_1 + \theta_2$ zwischen den beiden auslaufenden Bahnen ist immer 90° .

2.6 Drehbewegungen

2.6.1 Kreisbewegung

Genau so wie ein Körper sich ohne die Einwirkung äußerer Kräfte geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, so behält er seine Orientierung gegenüber einem Inertialsystem bei, sofern er sich zu Beginn in Ruhe befindet, resp. behält eine vorhandene Drehbewegung bei.

Dies kann man anhand eines Kreisels im Hörsaal zeigen. Es gibt außerdem eine lange Liste von physikalisch relevanten Phänomenen, bei denen dies eine Rolle spielt.

Eigendrehimpuls von Elementarteilchen

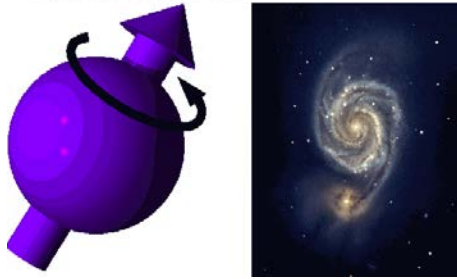


Abbildung 2.70: Eigendrehimpuls findet man bei Elementarteilchen wie auch bei Galaxien.

Dies beginnt auf sehr kleinen Skalen mit dem Spin, d.h. dem Eigendrehimpuls von Elementarteilchen, und es setzt sich über viele Größenordnungen fort, z.B. zur Rotation von Planeten, ihrer Bahnbewegung um die Sonne, oder der Rotationsbewegung von Galaxien.

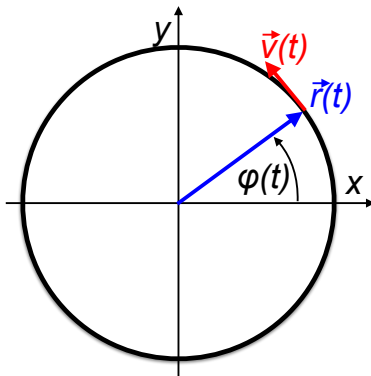


Abbildung 2.71: Ort \vec{r} , Geschwindigkeit \vec{v} und Winkelkoordinate φ eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn.

Die Basis für die folgende Diskussion ist die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn (→Abb. 2.71). Benutzt man Polarkoordinaten, so bleibt dabei der Radius r fest, es ändert sich nur der Winkel φ . Im Fall der gleichförmigen Kreisbewegung ist $\varphi = \omega_0 t$. Der Ort ändert sich um

$$dr = r d\varphi$$

und der Betrag der Geschwindigkeit ist somit

$$v = \frac{dr}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega.$$

Hier ist ω die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Ist diese zeitabhängig, so kann man die Winkelbeschleunigung α bestimmen:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}.$$

2.6.2 Vektorielle Beschreibung

Die Bahngeschwindigkeit, also die Geschwindigkeit auf der Bahn, beträgt

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad |\vec{v}| = \omega r.$$



Abbildung 2.72: Funken zeigen den Geschwindigkeitsvektor.

Bei einer Kreisbewegung bildet der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} überall eine Tangente an den Kreis, wie man z.B. aus der Flugbahn von Funken erkennen kann, die an einem Rad erzeugt werden (→ Abb. 2.72).

Die Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

wird sinnvollerweise in eine Komponente $a_{||}$ parallel zum Geschwindigkeitsvektor \vec{v} und eine Komponente a_{\perp} senkrecht dazu aufteilt. Die parallele Komponente entspricht der Änderung des Betrags der Geschwindigkeit $|\dot{v}(t)|$, während die Komponente senkrecht dazu die Richtungsänderung beschreibt:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \vec{e}_{||}(t) + \frac{v^2(t)}{r} \vec{e}_{\perp}(t).$$

Hier stellt

$$\vec{e}_{||}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}$$

den Einheitsvektor entlang der instantanen Bewegungsrichtung dar und $\vec{e}_{\perp}(t)$ denjenigen senkrecht dazu.

Für den Fall einer Kreisbewegung mit verschwindender Winkelbeschleunigung, $\alpha = 0$, ist der Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}|$ konstant und die Komponenten der Beschleunigung parallel und senkrecht dazu sind

$$a_{||} = 0$$

$$a_{\perp} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}.$$

2.6.3 Drehimpuls eines Massenpunkts

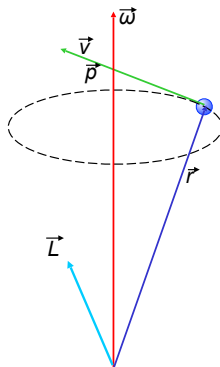


Abbildung 2.73: Definition des Drehimpulses $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Offenbar existiert hier ebenfalls ein Erhaltungssatz. Die entsprechende Größe ist der Drehimpuls. Für einen Massenpunkt ist der Drehimpuls definiert als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad [L] = \text{m}^2 \text{kg s}^{-1} = \text{Nms} = \text{Js},$$

also als Vektorprodukt aus Ort und Impuls. Der Drehimpuls ist somit immer in Bezug auf ein Koordinatensystem definiert. Im Beispiel von Abb. 2.73 zeigt er nicht in Richtung der Drehachse.

Abb. 2.74 zeigt die relevanten Größen für den Fall einer Kreisbewegung. In drei Dimensionen kann die

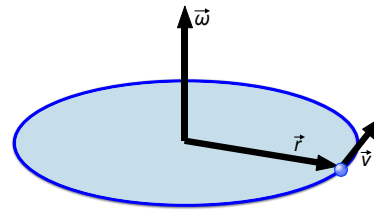


Abbildung 2.74: Kreisbewegung. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Zentrum des Kreises.

Geschwindigkeit eines Massenpunktes als Vektorprodukt aus Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und Abstand \vec{r} von der Rotationsachse geschrieben werden:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Der Winkelgeschwindigkeitsvektor steht parallel zur Rotationsachse und sein Betrag ist die Rotationsfrequenz ω . Der Drehimpuls wird somit

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (2.13)$$

Im Fall der Kreisbewegung ist es sinnvoll, ein symmetrieangepasstes Koordinatensystem zu wählen, dessen Ursprung im Zentrum des Kreises liegt. Dann sind die Vektoren \vec{r} , \vec{v} und $\vec{\omega}$ jeweils senkrecht zueinander und der Ausdruck (2.13) für den Drehimpuls vereinfacht sich zu

$$\vec{L} = m r^2 \vec{\omega}.$$

Offenbar ist hier der Drehimpuls proportional zur Winkelgeschwindigkeit.

2.6.4 Drehimpuls eines Körpers, Trägheitsmoment

Wie am Beispiel eines Massenpunktes explizit gezeigt, ist der Drehimpuls proportional zur Winkelgeschwindigkeit. Die Proportionalitätskonstante wird allgemein als Trägheitsmoment I bezeichnet:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}.$$

Für die Kreisbewegung eines Massenpunktes gilt offenbar $I = m r^2$.

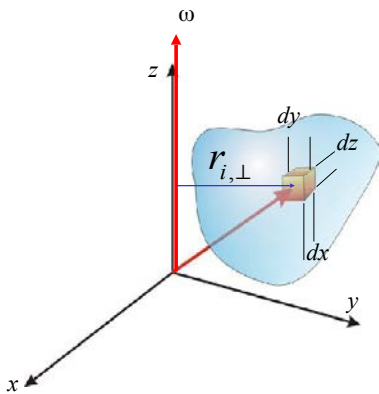


Abbildung 2.75: Berechnung von Trägheitsmomenten beliebiger Körper durch Integration.

Für einen allgemeinen Körper wird das Trägheitsmoment I berechnet als Integral über die Beiträge einzelner infinitesimaler Massenelemente dm . Wie in Abb. 2.75 gezeigt, kann es berechnet werden als

$$I = \iiint r_{\perp}^2 dm = \iiint r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV,$$

wobei das Integral über den gesamten Körper läuft, r_{\perp} den Abstand von der Rotationsachse darstellt und ρ die Dichte des Volumenelements dV . Das Trägheitsmoment ist deshalb im Allgemeinen abhängig von der Orientierung der Rotationsachse. Man spricht deshalb von einem Trägheitstensor. Für einen asymmetrischen Trägheitstensor ist der Drehimpuls \vec{L} nicht mehr parallel zur Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

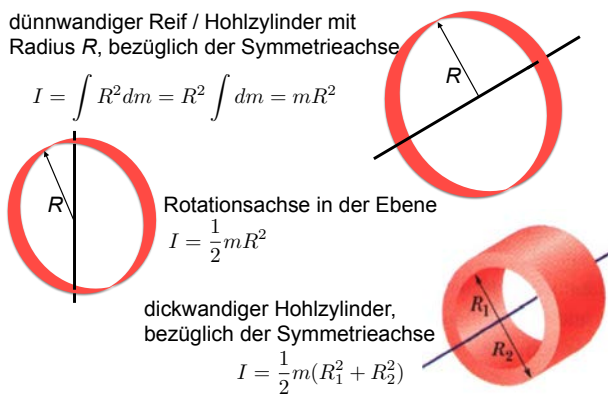


Abbildung 2.76: Trägheitsmomente von Hohlzylindern.

Abb. 2.76 und 2.77 zeigen die Trägheitsmomente für

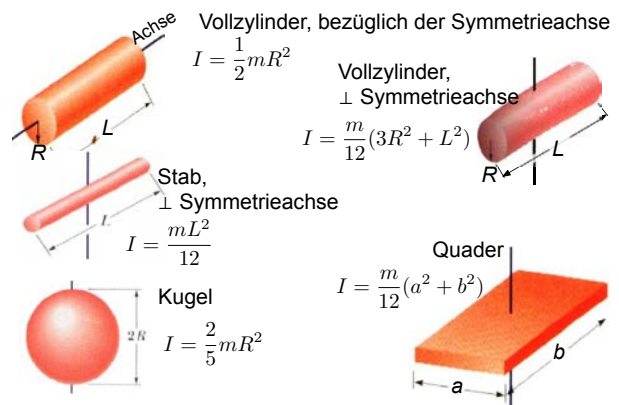


Abbildung 2.77: Weitere Trägheitsmomente.

einige einfach geformte Körper, bezüglich symmetriangepasster Achsen.

Auch ein Körper, der sich auf einer Geraden bewegt, besitzt einen Drehimpuls; dieser wird als Bahndrehimpuls bezeichnet. Im Gegensatz dazu unterscheidet man den Eigendrehimpuls, bei dem man sich auf eine Achse durch den Schwerpunkt bezieht.

	Translation	Rotation	
Impuls	\vec{p}	\vec{L}	Drehimpuls
Masse	m	I	Trägheitsmoment
Geschwindigkeit	\vec{v}	$\vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit

Tabelle 2.3: Analogien zwischen Translations- und Rotationsbewegung.

Offenbar bestehen eine Reihe von Analogien zwischen Drehimpuls und linearem Impuls. Einige davon sind in Tabelle 2.3 zusammengestellt.

In Analogie zum Erhaltungsgesetz für den linearen Impuls gilt ein Erhaltungssatz für den Drehimpuls:

So lange keine äußeren Kräfte wirken, bleibt der Drehimpuls eines Systems erhalten.

Die Erhaltung des Drehimpulses spielt eine große Rolle in vielen Teilen der Physik, vom Mikrokosmos (z.B. Wechselwirkungen zwischen Elementar-

teilchen, Absorption von Licht) bis zum Makrokosmos (Planetenbewegung, Stabilität von Galaxien).

2.6.5 Kinetische Energie

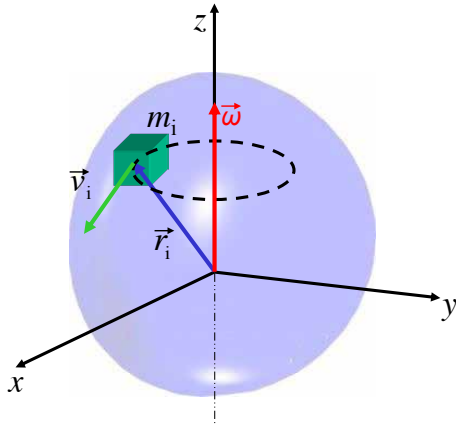


Abbildung 2.78: Beitrag eines Volumenelements zur kinetischen Energie.

Mit Hilfe des Trägheitsmoments lässt sich auch die kinetische Energie berechnen. Aus dem Ausdruck für die kinetische Energie von Massenpunkten folgt

$$\mathcal{E}_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{p}_i.$$

Ist die Rotation durch den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ bestimmt, so gilt

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

und

$$\mathcal{E}_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} \iiint r^2 dm,$$

mit ω als Betrag der Winkelgeschwindigkeit und r_i resp. r dem Abstand von der Drehachse. Mit Hilfe des Trägheitstensors \overleftrightarrow{I} lässt sich die Summe, respektive das Integral schreiben als

$$\mathcal{E}_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L},$$

Fällt die Rotationsachse mit einer Symmetrieachse zusammen, so kann der Trägheitstensor durch das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse ersetzt werden:

$$\mathcal{E}_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

2.6.6 Energieerhaltung

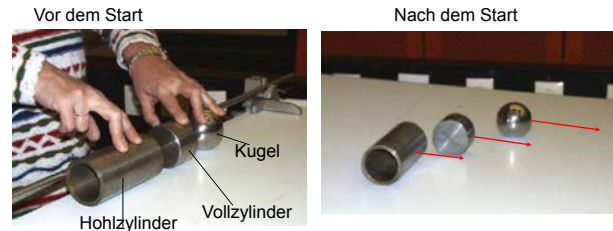


Abbildung 2.79: Rotationssymmetrische Körper auf einer schiefen Ebene.

Die unterschiedlichen Trägheitsmomente haben z.B. einen Einfluss darauf, wie schnell entsprechende Körper eine schiefe Ebene hinunterrollen (\rightarrow Abb. 2.79). Bei diesem Experiment wird potenzielle Energie $\mathcal{E}_{pot} = mgh$ in kinetische Energie umgewandelt. Diese besteht aus zwei Beiträgen, der translatorischen und der rotatorischen:

$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2.$$

Die beiden Terme sind jedoch über $v = \omega R$ aneinander gekoppelt, wobei R den Radius bezüglich der Rotationsachse darstellt und dieser für alle Körper gleich ist. Daraus folgt auch

$$\frac{d\omega^2}{dt} = 2\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{2\omega}{R} \frac{dv}{dt} = \frac{2v}{R^2} a.$$

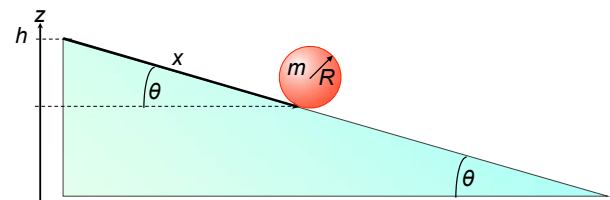


Abbildung 2.80: Rotation über schiefe Ebene.

Die Erhaltung der Gesamtenergie kann geschrieben werden als

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{tot} = mva + \frac{I}{R^2} va + mg \frac{dz}{dt} = 0. \quad (2.14)$$

z stellt hier die Höhe dar, $v = dx/dt$ die Geschwindigkeit und x die zurückgelegte Distanz. Mit h als Starthöhe ist

$$z = h - x \sin \theta, \quad \frac{dz}{dt} = -v \sin \theta.$$

Einsetzen in (2.14) ergibt

$$mva + \frac{I}{R^2}va - mgv \sin \theta = 0.$$

Diese Gleichung kann aufgelöst werden nach der Beschleunigung

$$a = g \sin \theta \frac{mR^2}{mR^2 + I} = g \sin \theta \left(1 - \frac{I}{mR^2 + I} \right).$$

Der Vorfaktor $g \sin \theta$ beschreibt die Beschleunigung für einen reibungsfreien Massenpunkt, während der Ausdruck in Klammern die Modifikation durch die Rotation berücksichtigt und immer kleiner als 1 ist. Die Beschleunigung ist somit am größten für den Körper mit dem kleinsten Trägheitsmoment I . Dies erklärt, weshalb beim Experiment der Körper mit dem geringsten Trägheitsmoment zuerst das untere Ende erreicht.

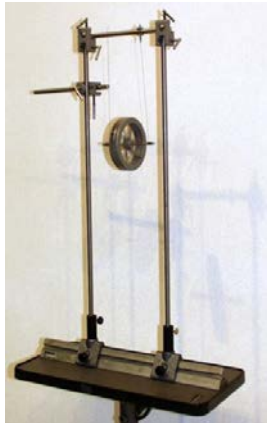


Abbildung 2.81: Maxwell-Rad.

Einen sehr ähnlichen Effekt beobachtet man beim in Abb. 2.81 gezeigten Maxwell-Rad: auch dieses demonstriert den Austausch von Energie zwischen unterschiedlichen Formen mechanischer Energie. Das Rad hängt an zwei Fäden, die um die Achse gewickelt sind. Nach dem Loslassen wickeln sich die Fäden ab und bringen das Rad in Rotation. Es findet ein ständiger Austausch zwischen potenzieller Energie, der kinetischen Energie des Schwerpunktes und der Rotationsenergie des Rades statt. Die Gesamtenergie ist

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{kin} + \mathcal{E}_{rot} + \mathcal{E}_{pot} = \frac{m}{2}v_S^2 + \frac{I}{2}\omega^2 + mgz_S.$$

Hier stellt z_S die Höhe des Schwerpunkts dar, welcher auf der Achse liegt, und $v_S = dz_S/dt$ seine Geschwindigkeit. Die lineare und die Rotationsgeschwindigkeit sind aneinander gekoppelt, über $v = \omega r$, mit r dem Radius der Achse. Da die Achse relativ dünn ist und die Masse des Rades sich relativ weit von der Achse befindet, wird die potentielle Energie zum größten Teil in rotatorische kinetische Energie umgewandelt und die Translationsgeschwindigkeit des Rades bleibt relativ gering - es fällt deutlich langsamer als ein frei fallendes Rad.

2.6.7 Drehmoment

Der Drehimpuls ist eine Erhaltungsgröße wenn keine äußere Kraft angreift. Wie beim linearen Impuls kann aber eine äußere Kraft den Drehimpuls verändern. Allerdings spielt nicht nur der Betrag der Kraft eine Rolle, sondern auch die Richtung und der Angriffspunkt.

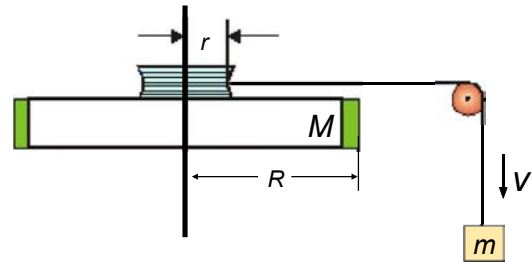


Abbildung 2.82: Experimentelle Bestimmung des Drehmoments.

Abb. 2.82 zeigt ein Experiment, bei dem eine Kraft in Form der Gewichtskraft eines Massenpunkts tangential an einem Rad angreift, das um seine Achse rotiert. Eine Änderung des Drehimpulses kann für einen Massenpunkt geschrieben werden als

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Die beiden Vektoren des ersten Terms (\vec{v} und \vec{p}) sind parallel, so dass das Vektorprodukt verschwindet. Bei einer Drehbewegung ohne äußere Kräfte ($\vec{\omega}$ konstant) ist außerdem $\frac{d\vec{p}}{dt} \parallel \vec{r}$, so dass auch der zweite Term verschwindet: der Drehimpuls ist konstant.

Wenn jedoch eine geeignete Kraft angreift, welche eine Komponente parallel zu \vec{p} aufweist, so ändert sich die Geschwindigkeit der Drehbewegung entsprechend $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{||}$ und damit auch der Drehimpuls:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Dies ist offenbar das Äquivalent zum zweiten Newton'schen Axiom. Man bezeichnet die Größe auf der rechten Seite als Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad [M] = \text{Nm}.$$

Damit kann man das Grundgesetz der Rotation schreiben als

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Das Drehmoment liegt im rechten Winkel zur Kraft und erzeugt damit einen Drehimpuls senkrecht zur Kraft. Da das Drehmoment aus dem Vektorprodukt $\vec{r} \times \vec{F}$ besteht, verschwindet es, wenn die Kraft parallel zum Ortsvektor (d.h. radial) angreift; in diesem Fall würde eine Änderung des linearen Impulses erzeugt, falls keine Gegenkraft wirkt (z.B. durch die Lager eines Rades).

Im Experiment von Abb. 2.82 wird die Kraft durch ein Gewicht der Masse m erzeugt, welches an einem Seil im Schwerfeld der Erde zieht. Indem das Gewicht über eine Höhe h fällt, wird eine Energie $\Delta \mathcal{E}_{pot} = mgh$ auf das Rad übertragen und in kinetische Energie der Rotation \mathcal{E}_{rot} umgewandelt. Diese beträgt

$$\mathcal{E}_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 = mgh.$$

Somit lässt sich aus diesem Experiment das Trägheitsmoment bestimmen:

$$I = \frac{2mgh}{\omega^2},$$

indem man die resultierende Rotationsgeschwindigkeit ω des Rades misst.

Die Tatsache, dass sich das Drehmoment auf ein bestimmtes Koordinatensystem, respektive eine Drehachse bezieht, lässt sich anhand des in Abb. 2.83 gezeigten Experimentes demonstrieren. Wenn man mit

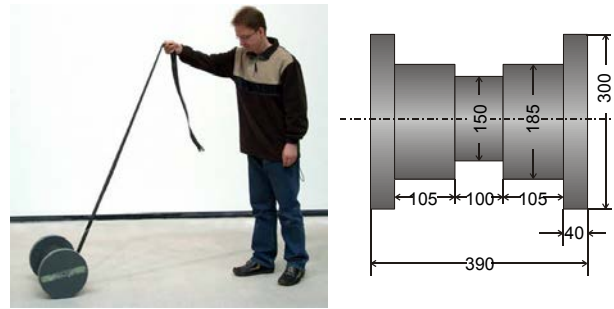


Abbildung 2.83: Folgsame Rolle.

Hilfe eines Bandes an einer Rolle eine Kraft ausübt, so erzeugt dies ein Drehmoment, welches bezüglich der Symmetrieachse immer in die gleiche Richtung zeigt. Allerdings steht die Rolle in Kontakt mit dem Boden und dadurch erfolgt die Rotation um den Auflagepunkt, nicht um die Achse. Bezüglich dieses Punktes kann das Drehmoment positiv oder negativ sein. Dementsprechend ist es möglich, die Rolle in Richtung auf den Experimentator oder von ihm weg zu bewegen.

2.6.8 Kräftegleichgewicht

Drehmomente spielen vor allem bei ausgedehnten Körpern eine Rolle. Dies werden meist als starre Körper behandelt, man vernachlässigt also Deformationen.

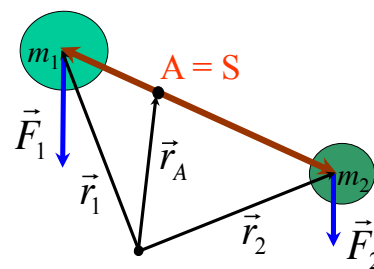


Abbildung 2.84: Gleichgewicht eines starren Körpers.

Abb. 2.84 zeigt einen einfachen starren Körper, bestehend aus 2 Massenpunkten, welche starr miteinander verbunden sind. Damit dieser im Gleichgewicht ist, also seinen Bewegungszustand nicht ändert, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein. Zum er-

sten muss die Summe der von außen auf den Körper wirkenden Kräfte verschwinden,

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i = 0.$$

Im vorliegenden Fall muss die Summe der Schwerkkräfte auf die beiden Massen durch eine Stützkraft \vec{F}_S ausgeglichen werden,

$$\vec{F}_{tot} = (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{F}_S = 0.$$

Für die Translationsbewegung spielt es keine Rolle, wo die Kräfte angreifen.

Dies wird jedoch relevant, wenn es um eine Rotationsbewegung geht. Damit der Körper auch bezüglich einer Drehung im Gleichgewicht ist, muss zusätzlich die Summe der Drehmomente verschwinden. Dafür verwenden wir ein Koordinatensystem, bei dem die Stützkraft \vec{F}_S am Punkt \vec{r}_S angreift. Damit verschwindet ihr Beitrag zum Drehmoment. Der Beitrag der Gewichtskräfte ist

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_S) \times \vec{g} + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_S) \times \vec{g} = 0. \quad (2.15)$$

Daraus folgt die Bedingung für die Lage \vec{r}_S des Massenschwerpunkts:

$$m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_S) + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_S) = 0.$$

Auflösen nach \vec{r}_S ergibt

$$\vec{r}_S = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

also den mit den Massen gewichteten Mittelwert der beiden Ortsvektoren. Dieser Punkt wird deshalb auch als Schwerpunkt bezeichnet. Die Rechnung lässt sich leicht auf eine beliebige Zahl von Massenpunkten oder Massenelementen erweitern:

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}.$$

Mit Hilfe des Schwerpunkts kann man untersuchen, ob ein Körper stabil aufgestellt oder aufgehängt ist: Wenn sich der Schwerpunkt eines Körpers über oder unter seiner Auflagefläche befindet, dann fällt er nicht um. Ob das Gleichgewicht stabil, instabil oder

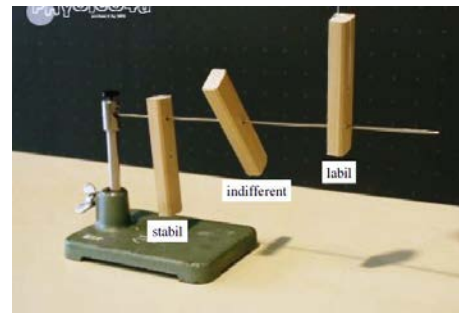


Abbildung 2.85: Stabiles, indifferentes und labiles Gleichgewicht, abhängig vom Aufhängepunkt.

indifferent ist, hängt wiederum davon ab, ob die mögliche Drehachse des Körpers ober-, unter- oder auf der Höhe des Schwerpunkts ist. Abb. 2.85 illustriert dies für einen Holzstab. Daraus ergibt sich auch eine Möglichkeit, den Schwerpunkt eines Körpers zu bestimmen: Man hängt ihn an verschiedenen Punkten auf und markiert die Richtung nach Unten. Die entsprechenden Geraden schneiden sich im Schwerpunkt.

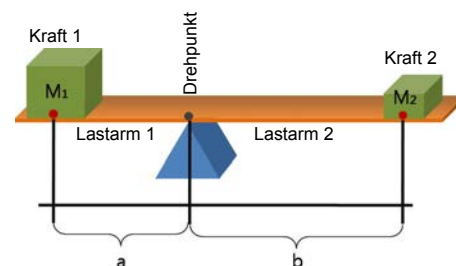


Abbildung 2.86: Hebelgesetz.

Eine weitere Konsequenz ist das Hebelgesetz, welches in Abb. graphisch dargestellt ist. Aus der Bedingung (2.15), dass das Drehmoment verschwindet,

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0 = F_1 a - F_2 b$$

folgt

$$F_1 a = F_2 b$$

oder

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{b}{a}.$$

2.6.9 Pirouette



Abbildung 2.87: Pirouette.

Eine bekannte Anwendung der Drehimpulserhaltung ist die Pirouette von Eiskunstläufern (→ Abb. 2.87). Hier reduziert der Artist das Trägheitsmoment indem er die Arme anzieht und erhöht dadurch die Winkelgeschwindigkeit: Da der Drehimpuls konstant bleibt, muss gelten

$$L_1 = L_2 = I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2.$$

Daraus folgt

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{I_1}{I_2}.$$

Als Beispiel nehmen wir an, dass er sich zunächst mit einer Drehfrequenz von $v_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ bewegt und, dass sein Trägheitsmoment zunächst $I_0 = 6 \text{ kg m}^2$ beträgt. Durch Anziehen der Arme reduziert er dieses auf $I_1 = 1,5 \text{ kg m}^2$. Sind Reibungsverluste vernachlässigbar, muss der Drehimpuls dabei erhalten bleiben und damit die Drehfrequenz zunehmen auf

$$v_1 = v_0 \frac{I_0}{I_1} = 4 \text{ s}^{-1}.$$

Die kinetische Energie der Rotation,

$$\mathcal{E}_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I}$$

bleibt dabei nicht erhalten; diese wird dem System über eine Arbeitsleistung zugeführt, indem die Arme gegen die Zentrifugalkraft angezogen werden müssen. Die entsprechende Arbeit beträgt

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 - I_0 \omega_0^2) \\ &= \frac{1}{2} (1,5 \cdot 631 - 6 \cdot 39,5) \text{ J} = 592 \text{ J}. \end{aligned}$$

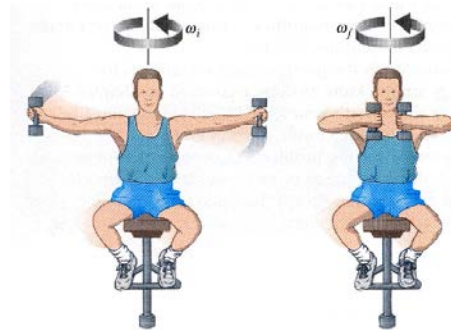


Abbildung 2.88: Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit durch Reduktion des Trägheitsmoments.

Das Experiment kann auch im Hörsaal durchgeführt werden, wobei der Effekt durch Gewichte in den Händen verstärkt wird (→ Abb. 2.88). Beim Anziehen der Arme wird das Trägheitsmoment reduziert und die Erhaltung des Drehimpulses führt zu einer Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit.

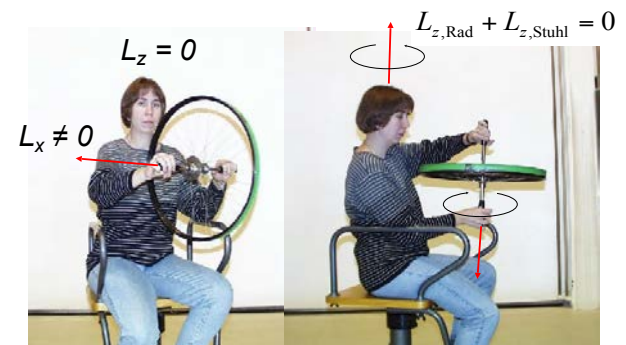


Abbildung 2.89: Erhaltung des Gesamtdrehimpuls-Vektors.

Der Drehimpuls ist eine vektorielle Größe, die sich aus mehreren Komponenten zusammensetzen kann. Im Beispiel von Abb. 2.89 bleibt jedoch nur die vertikale Komponente erhalten, da der Drehstuhl um diese Achse frei beweglich ist. Die Achse des Rades wird zunächst in horizontaler Richtung gehalten. Dreht man das Rad, so dass der Drehimpuls nach oben zeigt, muss sich der Drehstuhl in entgegengesetzter Richtung bewegen, um den Gesamtdrehimpuls bezüglich der vertikalen Achse zu erhalten. Dreht man die Achse des Rades nach unten, rotiert der Drehstuhl in die entgegengesetzte Richtung.

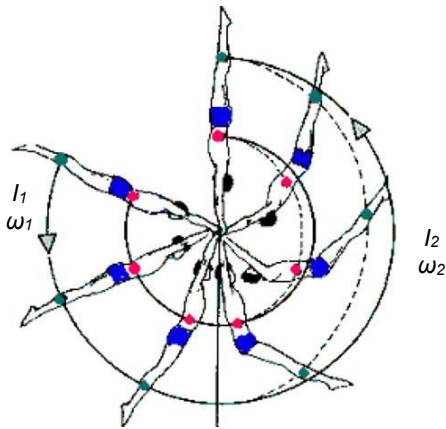


Abbildung 2.90: Turner an einem Reck.

Auf ähnliche Weise kann ein Turner an einem Reck seine Winkelgeschwindigkeit vergrößern. Wie in Abb. 2.90 gezeigt, ändert er durch seine Körperhaltung sein Trägheitsmoment und damit auch seine Winkelgeschwindigkeit. Indem er dies synchronisiert mit dem Drehwinkel durchführt, leistet er auch Arbeit gegen die Schwerkraft und erhöht damit seine kinetische Energie und seinen Drehimpuls.



Abbildung 2.91: Feuerornament.

Drehimpulserhaltung spielt auch bei der Dynamik von Gasen eine Rolle. Abb. 2.91 zeigt einen so-

genannten Feuerornament, welcher durch Drehen eines Tellers mit einer brennenden Flüssigkeit erzeugt wird. Die Flamme wird von einem Drahtkäfig umschlossen, der sich ebenfalls dreht. Durch die Flamme steigen im Drahtkäfig heiße Luft und Verbrennungsgase auf und saugen dadurch von außen frische Luft in den Zylinder hinein. Beim Einströmen sinkt der Abstand von der Drehachse. Wie bei der Pirouette wird dadurch die Rotationsgeschwindigkeit größer. Entsprechend dreht sich die Feuerssäule viel schneller als der Käfig. Gleichzeitig wird durch die Drehbewegung die radiale Strömungsgeschwindigkeit reduziert. Dementsprechend dauert es länger, bis genügend Sauerstoff die Flamme erreicht und die Gase können weiter aufsteigen - die Flamme steigt höher. Auf ähnliche Weise kommt die Rotation von Winden um Hoch- und Tiefdruckgebiete zustanden, wie auch bei Hurrikannen, Taifunen oder Tornados.

2.6.10 Kreisel

Ein Kreisel ist ein starrer Körper, der um eine Achse rotiert. In diesem Fall gelten Erhaltungsgesetze für alle drei Komponenten des Drehimpulses. Für praktische Anwendungen sollte die Rotationsachse mit einer Symmetrieachse des Körpers zusammenfallen, in diesem Fall kann die Rotation sehr stabil sein.

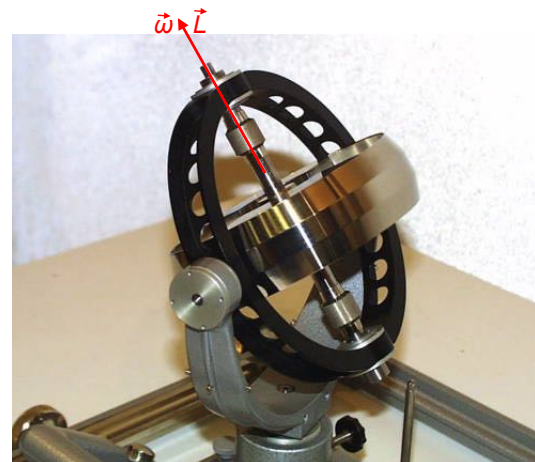


Abbildung 2.92: Kardanis aufgehängter Kreisel.

Lagert man den Kreisel so, dass keine Drehmomente

M auf ihn wirken (\rightarrow Abb. 2.92), so bleibt wegen

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0$$

der Drehimpuls L und auch die Drehachse konstant. Je größer der Drehimpuls, desto schwieriger wird es, seine Richtung zu ändern. Deshalb sind Kreisel bei hohen Drehzahlen sehr stabil.

Kurskreisel

Ein solcher kräftefreier Kreisel behält seine einmal vorgegebene Orientierung auch dann bei, wenn man ihn mit dem Aufbau als Ganzes beliebig durch den Raum trägt. Ein Kreisel kann so im Prinzip als Kurskreisel zur Richtungsbestimmung in der Navigation eingesetzt werden. Allerdings ergeben Reibungseffekte und Drehmomente Abweichungen.

Backstein

Eine freie Rotation ist stabil bei Rotation um die Achse mit dem kleinsten oder dem größten Trägheitsmoment.

Nutation

Rotiert der kräftefreie Kreisel nicht um eine Symmetrieachse, so bleibt zwar die Richtung des Drehimpulses konstant, nicht aber die Richtung der Rotationsachse. Der allgemeine Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit ist

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}.$$

Hier stellt \hat{I} den Trägheitstensor dar, welcher den Vektor $\vec{\omega}$ rotiert und multipliziert. Drehachse und Symmetrieachse des Kreisels ändern mit der Zeit ihre Richtung und bewegen sich auf Kegelmänteln um die Drehimpuls-Achse \vec{L} .

Präzession

Wirkt eine Kraft auf einen Kreisel, z.B. die Schwerkraft, so erzeugt diese i.A. auch ein Drehmoment

und damit eine Änderung des Drehimpulses:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_G.$$

Da die Änderung des Drehimpulses senkrecht zur Richtung der Gewichtskraft liegt, fällt der Kreisel nicht um, sondern er präzediert um die Richtung der Gewichtskraft, also um die Vertikale.

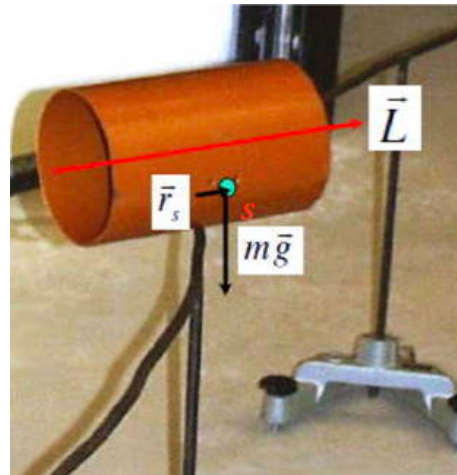


Abbildung 2.93: Ein Zylinder wird durch einen Kreisel stabilisiert und kann so einem dünnen Metallrohr folgen.

Das Experiment zeigt ein einfaches Beispiel, in dem die Drehimpulserhaltung ein selbständig navigierendes System ergibt. Man benutzt dazu einen Kreisel, der in ein Kunststoffrohr eingebaut ist. Der Kreisel rollt auf einem gebogenen Draht eine schiefe Ebene hinunter und folgt den Kurven eines dünnen Metallrohrs (\rightarrow Abb. 2.93). Dies wird durch die Drehimpulserhaltung möglich. Man kann den Effekt qualitativ so erklären:

- Der Kreisel läuft rechts oder links von der Bahn. Sein Schwerpunkt S liegt jetzt nicht mehr direkt über der Schiene.
- Es wirkt ein Drehmoment $\vec{M} = \vec{r}_S \times m\vec{g}$.
- Das Drehmoment erzeugt eine Präzession des Kreisels um die Achse senkrecht zu \vec{L} .
- Dadurch ändert sich die Richtung der Rotationsachse des Zylinders und damit die Richtung der Schwerpunktsbewegung.

- Bei korrektem Drehsinn des Kreisels bewegt sich der Zylinder so, dass der Schwerpunkt wieder über dem Draht liegt.

2.7 Astronomische Anwendungen

2.7.1 Drehimpuls und Planetenbahnen

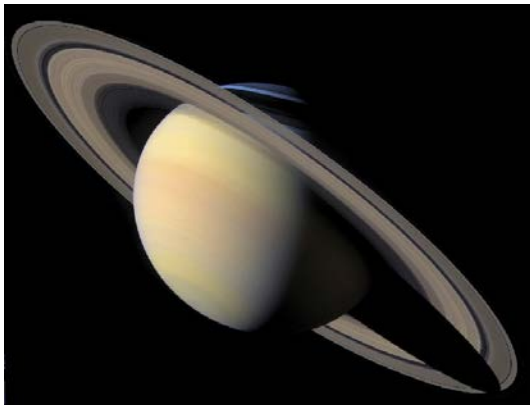


Abbildung 2.94: Ringe des Saturns.

Die Erhaltung des Drehimpulses ist auch verantwortlich für die Rotation von Planeten im Sonnensystem, von Satelliten (Monden, Ringen) um Planeten, und der Sonnensysteme in der Galaxis: diese bildeten sich aus Wolken von Gas und Staub durch Kontraktion unter dem Einfluss der Schwerkraft. Die Erhaltung des Drehimpulses bei der Kontraktion führte zu einer Erhöhung der anfangs geringen Rotationsgeschwindigkeit und verhindert eine vollständige Kontraktion: ohne Drehimpulserhaltung würden die Planeten unter dem Einfluss der Schwerkraft in die Sonne fallen. Ähnliche Effekte führen zur Form der Galaxien.

Die Planetenbahnen haben die Menschen seit Langem fasziniert. Ptolemäus fasste im 2. Jh. nach Christus den damaligen Wissenstand zusammen und erstellte ein Weltbild (→ Abb. 2.95), welches mehr als tausend Jahre Bestand hatte. In seinem System war die Erde im Zentrum des Universums und der Mond, Merkur, Sonne, Mars, Jupiter und Saturn bewegten sich in Kreisen um die Erde. Dies war allerdings nicht mit allen Beobachtungen kompatibel;



Abbildung 2.95: Das Ptolemäische Weltbild mit der Erde im Mittelpunkt.

so bewegen sich die Planeten von der Erde aus betrachtet nicht immer in die gleiche Richtung, sondern folgen manchmal einer Art von Schleife. Man versuchte das Ptolemäische Modell deshalb durch sogenannte Epizyklen zu korrigieren: Die Planeten liefen nicht direkt auf Kreisen, sondern auf Kreisen, deren Mittelpunkte wiederum auf Kreisen um die Erde liefen. Noch genauere Messungen zeigten, dass mehrere Generationen von Epizyklen notwendig waren, um die Beobachtungen erklären zu können.

Die wichtigste Neuerung wurde von Kopernikus (1473-1543) initiiert, welcher anstelle der Erde die Sonne ins Zentrum stellte. Dies konnte einige der Beobachtungen qualitativ erklären, aber eine quantitative Übereinstimmung wurde nicht erreicht, weil die Planeten in seinem Modell sich immer noch auf Kreisbahnen bewegten. Der dänische Hofastronom Tycho Brahe (1546-1601) stellte umfangreiche Beobachtungen an, welche insgesamt weder mit dem kopernikanischen noch mit dem ptolemäischen Weltbild wirklich vereinbar waren.

2.7.2 Die Kepler'schen Gesetze

Die erste Theorie, welche die Beobachtungen anhand einiger weniger Gesetze erklären konnte stammt von Johannes Kepler (1571-1630; → Abb. 2.96). Er formulierte die ersten zwei seiner Gesetze 1609, das dritte 1619. Sie wurden für Planeten formuliert, gelten aber analog z.B. für die Umlaufbahnen von Monden. Zu Kepler's Zeit waren dies neue Grundgesetze, welche nur der Beschreibung

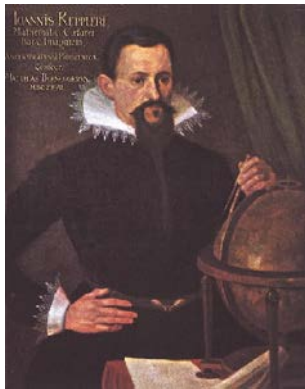


Abbildung 2.96: Johannes Kepler (1571-1630).

der astronomischen Daten dienen. Erst gegen Ende des 17. Jahrhunderts lieferte Newton die theoretischen Grundlagen, mit denen diese Gesetze aus grundlegenden Gesetzen hergeleitet werden konnten.

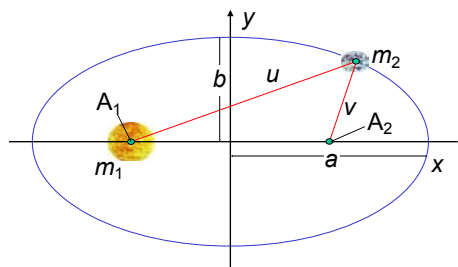


Abbildung 2.97: 1. Kepler'sches Gesetz: Die Planetenbahnen sind Ellipsen; die Sonne steht in einem der Brennpunkte $A_{1,2}$.

1. Kepler'sches Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen. Die Sonne steht jeweils in einem der Brennpunkte. Ellipsen sind geschlossene Kurven, welche z.B. durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschrieben werden können. a und b stellen die Halbachsen der Ellipse dar (\rightarrow Abb. 2.97). Für $a = b$ geht die Ellipse in einen Kreis über. Ellipsen können u.a. konstruiert werden, indem man zwischen den beiden Brennpunkten einen Faden spannt und mit einem Bleistift bei gespanntem Faden die Kurve zieht.

Dabei nutzt man aus, dass die Strecke $u + v$ konstant ist.

Das Gesetz beinhaltet verschiedene Näherungen, z.B. dass die Sonne unendlich schwer ist. Dies ist eine gute Näherung: Die Masse der Sonne beträgt etwa $2 \cdot 10^{30}$ kg, diejenige der Erde etwa $6 \cdot 10^{24}$ kg. Berücksichtigt man die endliche Masse, so bewegen sich Sonne und Planet um den gemeinsamen Schwerpunkt, dieser liegt in einem Brennpunkt der Ellipse. Außerdem stören andere Planeten die Bahn.

2.7.3 2. Kepler'sches Gesetz

Das 2. Kepler'sche Gesetz beschreibt die Geschwindigkeit auf der Bahn.

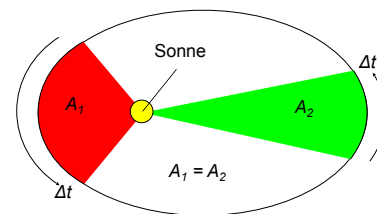


Abbildung 2.98: 2. Kepler'sches Gesetz: Die Flächen A_1 und A_2 sind gleich.

Der von der Sonne zum Planeten gezogene Radiusvektor \vec{r} überstreicht in gleichen Zeiten Δt konstante Flächen ΔA : $\Delta A / \Delta t = \text{konstant}$ (\rightarrow Abb. 2.98). Dieses Gesetz lässt sich beweisen, wenn man die Fläche dA berechnet, welche in der (infinitesimalen) Zeit dt überstrichen wird:

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m d\vec{r}| \\ &= \frac{1}{2m} \left| \vec{r} \times m \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m \vec{v}| dt. \end{aligned}$$

Da $\vec{r} \times m \vec{v} = \vec{L}$ den Drehimpuls darstellt, ist

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} |\vec{L}| = \text{const.}$$

konstant, wenn der Drehimpuls sich nicht ändert. Dies gilt für endliche Zeiten genau so,

$$A(\Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \frac{dA}{dt} dt = \frac{1}{2m} |\vec{L}| \Delta t.$$

Das zweite Kepler'sche Gesetz ist also eine direkte Manifestation der Erhaltung des Drehimpulses.

2.7.4 3. Kepler'sches Gesetz

Das dritte Kepler'sche Gesetz betrifft das Verhältnis zwischen Abstand und Umlaufzeit der Planeten. Kepler fand es erst etwa 10 Jahre nach den ersten beiden Gesetzen; es wurde 1619 publiziert, im Werk *Harmonices mundi*.

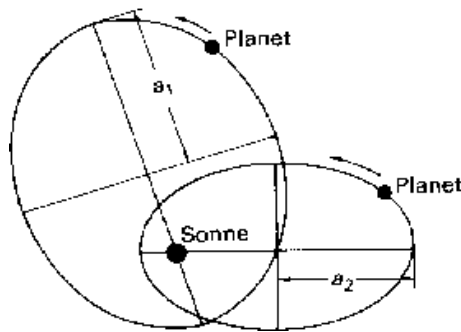


Abbildung 2.99: 3. Kepler'sches Gesetz.

Die Quadrate der Umlaufzeiten T_1, T_2 zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen a_1, a_2 (\rightarrow Abb. 2.99):

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3.$$

Diese Beobachtung kann für eine Kreisbewegung leicht erklärt werden: In diesem Fall wirkt die Gravitation

$$F_G = G \frac{Mm}{R^2}$$

als Zentripetalkraft. Diese muss der Zentrifugalkraft

$$F_Z = m\omega^2 R$$

entsprechen. Die Kreisfrequenz ω ist invers proportional zur Periode, $\omega = 2\pi/T$. Somit ist

$$G \frac{Mm}{R^2} = m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R.$$

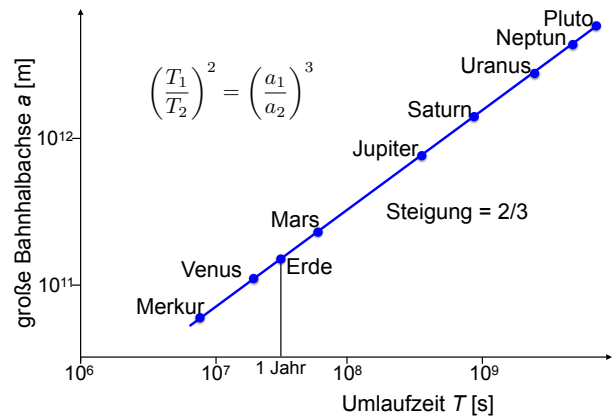


Abbildung 2.100: Vergleich des 3. Kepler'schen Gesetzes mit Daten der Planetenbahnen.

Umstellen ergibt das 3. Kepler'sche Gesetz:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const.}$$

Solche Potenzgesetze kann man am besten überprüfen indem man die vorhandenen Daten logarithmiert: Bildet man auf beiden Seiten den Logarithmus dann findet man

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 &= 2(\log T_1 - \log T_2) \\ &= \log \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = 3(\log a_1 - \log a_2) \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\log a_1 - \log a_2}{\log T_1 - \log T_2} = \frac{2}{3}.$$

Trägt man $\log a$ gegen $\log T$ auf, so erhält man somit eine Gerade mit Steigung $2/3$. Wie in Abb. 2.100 gezeigt, passen die experimentellen Daten sehr gut zu dieser Voraussage.

2.7.5 Theorie der Gravitation

Die Kepler'schen Gesetze lieferten hervorragende Vorhersagen welche innerhalb der Messgenauigkeit die Beobachtungen erklären konnten. Sie liefern

aber keine Erklärung für die beobachteten Phänomene. Kepler versuchte auch, eine Erklärung zu liefern, aber es gelang ihm nicht. Diese lieferte jedoch Newton mit seinen Gesetzen der Mechanik (→ Abschnitt 2.2.2) und mit seiner Theorie der Gravitation (→ 2.2.5). Diese besagt, dass die unterschiedliche Massen sich anziehen, mit einer Kraft

$$|F_G| = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}.$$

Die Gravitationskonstante G war zu Newton's Zeit noch nicht bekannt. Der heute anerkannte Wert beträgt

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}^2 \text{s}^2}.$$

Nachdem die Gravitationskonstante bestimmt ist, kann man eine Messung der Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche dazu verwenden, die Erdmasse zu bestimmen. Mit dem mittleren Erdradius $r = 6,37 \cdot 10^6 \text{m}$ erhält man $m_E = 5,97 \cdot 10^{24} \text{kg}$. Analog kann man aus dem Radius einer Planetenbahn und seiner Umlaufzeit die Masse der Sonne bestimmen: Aus dem Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und Gravitationskraft der Sonne

$$F_{ZP} = m_P r_P \omega_P^2 = F_G = G \frac{m_P m_S}{r_P^2}.$$

Die Sonnenmasse erhält man daraus als

$$m_S = r_P^3 \omega_P^2 / G \approx 2 \cdot 10^{30} \text{kg}.$$

Dies beinhaltet gleichzeitig das dritte Kepler'sche Gesetz (für den Grenzfall eines Kreises, d.h. verschwindender Elliptizität).

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts erkannte Einstein, dass die Newton'sche Theorie als eine Näherungsform betrachtet werden muss. In dieser Theorie erfolgt die Wechselwirkung zwischen unterschiedlichen schweren Körpern nicht mehr über Kräfte, sondern indem jeder Massenpunkt den Raum in seiner Umgebung verzerrt. Die Theorie behandelt somit nicht Kräfte, sondern die Geometrie des vierdimensionalen Raum-Zeit Kontinuums.

Abb. 2.101 zeigt diese Krümmung schematisch, anhand einer Projektion in den zweidimensionalen

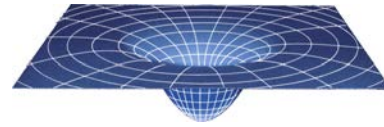


Abbildung 2.101: Krümmung des Raum-Zeit Kontinuums durch eine Masse.

Raum, respektive die dreidimensionale Raum-Zeit. Jede Masse erzeugt eine Krümmung in ihrer Umgebung.

Sie gibt in vielen Fällen die gleichen Voraussagen zu experimentell beobachtbaren Größen wie die Newton'sche Theorie. In einigen wenigen Spezialfällen findet man Unterschiede. So kann sie z.B. die Präzessionsbewegung bei der Merkurbahn erklären, oder die Ablenkung von Sternenlicht beim Passieren der Sonne. Eine wichtige Bestätigung der allgemeinen Relativitätstheorie erfolgte 2016, als zum ersten Mal Gravitationswellen gemessen wurden. Gravitationswellen sind Verzerrungen des Raums, welche sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Alle bewegten Körper erzeugen Gravitationswellen, aber die entsprechenden Verzerrungen sind meistens zu klein, um sie messen zu können. Lediglich wenn sich sehr große Massen sehr schnell bewegen, sind die Amplituden der Wellen groß genug um messbar zu sein. Die bisher gemessenen Signale wurden Paaren von schwarzen Löchern und Neutronensternen zugeschrieben, die sich verschmolzen haben. Einige der beteiligten Forscher erhielten 2017 den Nobelpreis für Physik.

2.8 Starre und elastische Körper

2.8.1 Starre Körper

Starre Körper sind, nach dem Massenpunkt, eine weitere nützliche Modellvorstellung. Unter einem starren Körper versteht man ein

System von Massenpunkten, deren Abstände voneinander zeitlich unverändert sind.

Formal: für jedes Paar i, k von Massenpunkten gilt

$$\vec{r}_i - \vec{r}_k = \vec{c}_{ik} = \text{const.}$$

2.8.2 Deformation

Elemente eines makroskopischen Körpers sind gegeneinander verschiebbar. **Deformationen** erfordern eine Kraft, die von der Art der Deformation sowie der Art des Körpers abhängt. Es wird zwischen zwei Typen von Deformationen unterschieden. Bei der Ersten ändert sich die Form, bei der Zweiten zusätzlich das Volumen:

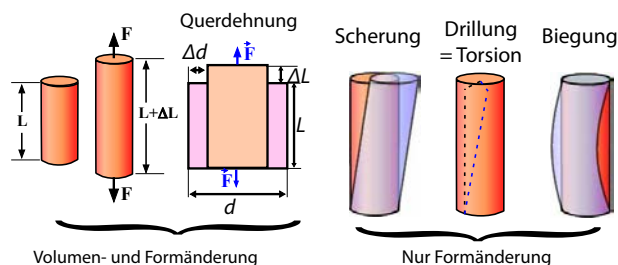


Abbildung 2.102: Unterschiedliche Arten der Verformung.

- Nur Formänderung: **Scherung, Biegung, Drillung**
- Auch Volumenänderung: **Kompression, Dilation**

Festkörper sind form- und volumenelastisch, sie wehren sich gegen alle Arten von Deformationen und kehren in ihre ursprüngliche Gestalt zurück, wenn die Beanspruchung aufgehört hat. Erst wenn

die Beanspruchung eine gewisse Grenze überschreitet, dann beginnt das sogenannte plastische Fließen, das bei einer weiteren Steigerung der Beanspruchung zum Bruch führt. Als Zugfestigkeit bezeichnet man die höchstmögliche angelegte Zugspannung bevor das Material bricht.

2.8.3 Spannung

Eine Spannung ist der Quotient aus der wirkenden Kraft $\Delta\vec{F}$ und dem Flächenelement ΔA , an dem diese Kraft angreift:

$$\vec{S} = \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A}$$

Man beschreibt die wirkenden Spannungen durch Zerlegung des Körpers in kleine Volumenelemente, auf die diese Kräfte wirken. Unter den Spannungen erleiden die Volumenelemente Formänderungen.

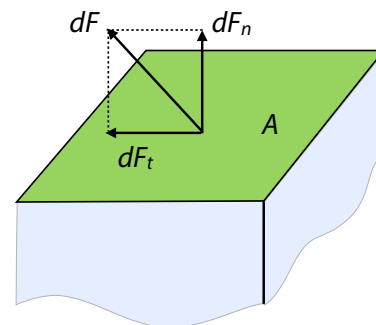


Abbildung 2.103: Zerlegung einer Spannung in Normal- und Schubspannung.

Wie in Abb. 2.103 gezeigt, kann eine allgemeine Spannung \vec{S} unterteilt werden in die Normalspannung σ , bei der die Spannung senkrecht zum Flächenelement angreift, und in die Schubspannung τ , welche parallel zur Fläche wirkt.

An einem Punkt des Körpers kann man die Fläche, an der die Kräfte angreifen, in drei orthogonale Richtungen orientieren. Bezüglich dieser Fläche kann man die Kraft in eine Normal- und zwei Schubspannungsanteile aufteilen. Insgesamt erhält man somit 9 unterschiedliche Spannungen, welche einen symmetrischen Tensor 2. Stufe bilden, den Spannungstensor.

sor

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Auf Grund der Symmetrie sind maximal 6 dieser Größen unabhängig von einander. In der Diagonalen stehen die Normalspannungen und in den Außerdiagonalelementen die Schubspannungen. Da die Spannung als Funktion des Ortes variiert, wird sie in einem ausgedehnten Körper als Tensorfeld $\mathbf{S}(\vec{r})$ beschrieben.

Jede Belastung kann in **elementare Belastungen** zerlegt werden. Bei Zug- und Druckspannungen oder bei Biegungen treten reine Normalspannungen auf. Bei Scherung und Torsion treten reine Schubspannungen auf.

2.8.4 Dehnung

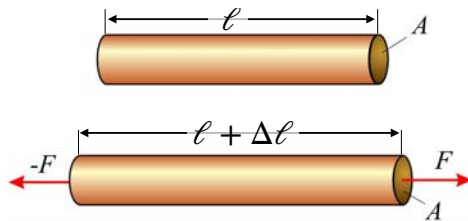


Abbildung 2.104: Dehnung eines Stabs.

Eine elastische Verformung wird beschrieben durch die Veränderung der Geometrie eines Körpers unter den wirkenden Kräften. Im einfachen Fall eines Würfels (als Volumenelement) kann zum Beispiel eine **Längenänderung** $\Delta\ell$ stattfinden, wobei die rechten Winkel erhalten bleiben. Als **Dehnung** bezeichnet man, wie in Abb. 2.104 gezeigt, die relative Längenänderung $\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}$. **Stauchungen** sind negative Dehnungen.

Spannung und Dehnung sind voneinander abhängig. In den weitaus meisten Körpern existiert zudem für niedrige Spannungen ein Bereich, in dem eine lineare Beziehung gilt, welche für Federn als Hooke'sches Gesetz bekannt ist:

$$\sigma = E\varepsilon \quad [E] = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

wobei die Proportionalitätskonstante E als Elastizitätsmodul (= **Young'scher Modul**) bezeichnet wird. Bei Stahl beträgt er etwa 200 GPa, und bei Gummi (und auch in etwa bei Muskeln) weniger als 0.1 GPa. Knochen mit $E = 15$ GPa haben in etwa die elastischen Eigenschaften von Holz (13 GPa). Tabelle 2.4 vergleicht die numerischen Werte von Elastizitäts- und Schubmodul für einige Materialien; für Aluminium und Stahl enthält sie außerdem die Bruchspannung als Vergleichsgröße.

Material	E GPa	μ	G GPa	σ_B MPa
Al	70.6	0.34	26.5	147
Stahl	206	0.28	80.4	981
Diamant	1100			
Knochen	17		9	150
Holz	13			
Gummi	0.1- 0.01	0.5		
Bandscheibe	0.005			

Tabelle 2.4: Elastische Konstanten unterschiedlicher Materialien.

Diese Größen gelten nur für den linearen Bereich. Dieser endet spätestens dann, wenn die Verformung plastisch wird. Es gibt aber auch im reversiblen Bereich Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz, also nichtlineare Beziehungen zwischen Spannung und Dehnung.

Da das Hooke'sche Gesetz bei biologischen Materialien wie z.B. Gummi nur in einem kleinen Bereich gilt (\rightarrow Abb. 2.105), ist eine sinnvolle Definition der differentielle Elastizitätsmodul

$$\frac{1}{E_{diff}} = \frac{d\varepsilon}{d\sigma}.$$

Dieser muss somit als Funktion des Spannungszustandes bekannt sein.

2.8.5 Volumenänderung

Wird ein Körper gedehnt, indem eine Normalspannung angelegt wird, so findet man im Allgemei-

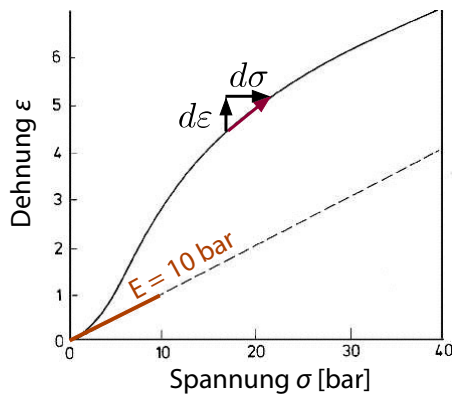


Abbildung 2.105: Dehnung von vulkanisiertem Gummi bei Zug.

nen nicht nur eine Änderung der Länge in Richtung der Normalspannung, sondern ebenso eine Änderung der Ausdehnung senkrecht zu dieser Richtung. In den meisten Fällen handelt es sich um eine Kontraktion; man spricht von **Querkontraktion**. Wie für die Dehnung findet man einen linearen Bereich, in dem die transversale Längenänderung proportional ist zur Spannung und damit zur Längenänderung in Zugrichtung.

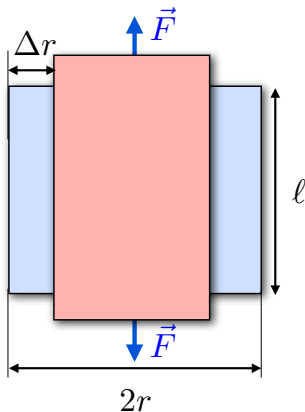


Abbildung 2.106: Querkontraktion eines Zylinders.

Wir betrachten als Beispiel einen Zylinder, der in Achsenrichtung gedehnt wird, wie in Abb. 2.106 gezeigt. Die Verringerung Δr seines Radius r schreiben wir als relative Änderung

$$\epsilon_r = \frac{\Delta r}{r} = -\mu \frac{\Delta \ell}{\ell}.$$

Das Verhältnis der Querkontraktion zur Dehnung

heißt *Poisson-Zahl* μ .

Aus der Dehnung und der Querkontraktion berechnen wir die Volumenänderung: Das Volumen des entspannten Zylinders beträgt

$$V = \pi r^2 \ell.$$

Durch die Spannung ändert sich die Länge um $\Delta \ell$ und der Radius um Δr , das Volumen also um

$$\Delta V = 2\pi r \Delta r \ell + \pi r^2 \Delta \ell = V \left(\frac{2\Delta r}{r} + \frac{\Delta \ell}{\ell} \right).$$

Mit Hilfe des oben eingeführten Parameters μ kann dies geschrieben werden als $\frac{\Delta V}{V} = \epsilon(1 - 2\mu)$. Für Gummi ist $\mu = 0.5$. Somit verschwindet hier die Volumenänderung.

2.8.6 Scherung

Eine Scher- oder Schubspannung τ bewirkt, dass alle zur Fläche senkrechten Kanten eines Quaders um einen Winkel $\alpha = \Delta x / \ell$ gekippt werden, wie in Abb. 2.107 gezeigt. Man bezeichnet dies als Scherung.

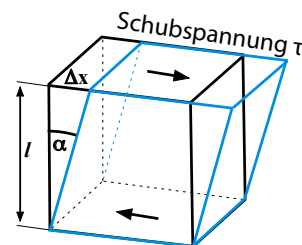


Abbildung 2.107: Scherung eines Würfels.

Der Scherwinkel α ist im linearen Bereich proportional zur Schubspannung:

$$\alpha = \frac{\tau}{G}; \quad \tau = G\alpha.$$

Der Proportionalitätsfaktor G ist der **Torsions- oder Schubmodul**. Da die Schubspannung die gleiche Einheit besitzt wie die Zugspannung ($\tau = F/A$; $[\tau] = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$), besitzt auch der Schubmodul die Einheit Pascal. Materie ist allgemein leichter durch Scherung als durch Dehnung verformbar, d.h. $G < E$ (siehe Tabelle 2.4). Dies kann man sich dadurch

plausibel machen, dass auf atomarer Ebene bei Dehnung oder Kompression die Abstände der Atome ändern, bei Scherung aber in erster Näherung nur die Bindungswinkel, nicht die Abstände.

Ähnlich wie der Schubmodul kleiner ist als der Spannungsmodul, ist auch die Bruchspannung für Scherung kleiner als für Stauchung. Knochenbrüche finden deshalb häufig unter kleinen Winkeln statt.

2.8.7 Elastische und plastische Verformung

Das Verhalten von Materialien unter Zugbelastung kann mittels einer Prüfmaschine ermittelt werden und in einem **Spannungs-Dehnungs-Diagramm** aufgetragen werden (siehe Abb. 2.108):

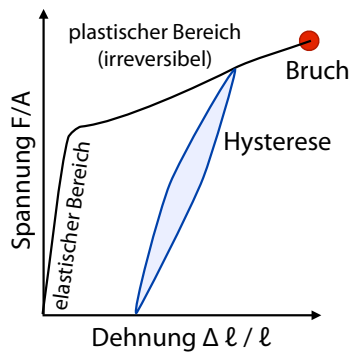


Abbildung 2.108: Spannungs-Dehnungs-Diagramm.

Man kann folgende Bereiche unterscheiden:

- **Elastischer Bereich:** Die Dehnung gehorcht dem **Hooke'schen Gesetz**. In diesem Bereich ist die Verformung verschwunden, wenn keine Spannung mehr wirkt.
- **Plastischer Bereich:** Verformungen bleiben teilweise auch ohne Spannung erhalten. Die Form wird abhängig von der Vorgeschichte.
- Wird die Spannung zu groß, so erreicht man den **Bruchpunkt**: Bei dieser Dehnung bricht oder zerreißt der Körper.

Auf mikroskopischer Ebene erzeugt man im plastischen Bereich Defekte und / oder verschiebt die Defekte innerhalb des Gitters. Beim Bruchpunkt ver-

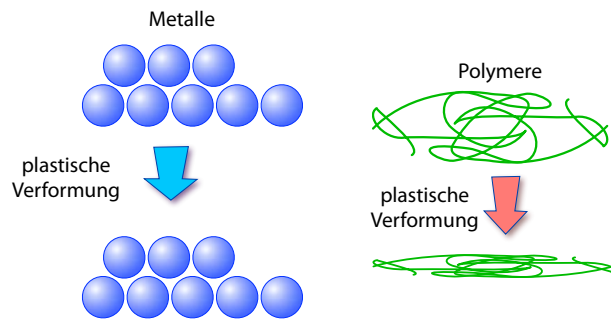


Abbildung 2.109: Mikroskopische Prozesse einer plastischen Verformung.

größert sich ein solcher Defekt schlagartig bis auf die Dimensionen des gesamten Körpers.

Im Bereich der plastischen Verformung wird nicht die gesamte in das System hineingesteckte Arbeit wieder frei, sondern sie bleibt als Verformungsenergie und Wärme im System. Die plastische Verlustenergie kann berechnet werden, indem man für jedes Volumenelement dV das Schleifenintegral über einen Zyklus der angelegten Spannung bildet. Die geleistete mechanische Arbeit ist dann

$$dW = \oint dF ds = dV \oint d\varepsilon \sigma.$$

Hier ist dF die am Volumenelement angreifende Kraft und ds der gegen die Kraft zurückgelegte Weg. Außerdem haben wir verwendet dass

$$dF = \sigma dA,$$

mit der Spannung σ und

$$ds = d\varepsilon \ell.$$

Ist der Körper homogen, d.h. ε und σ über das Volumen konstant, so reduziert sich das Volumenintegral auf eine Multiplikation mit $V = \int \ell dA$. Damit wird die Verlustenergie

$$W = V \oint d\varepsilon \sigma.$$

Im Spannungs-Dehnungs-Diagramm entspricht dies der Fläche, die von der Hysteresekurve eingeschlossen wird.

Diese unterschiedlichen Bereiche findet man bei biologischen Materialien genau so wie bei kristallinen Festkörpern. Allerdings sind biologische Materialien meistens wesentlich komplexer und häufig nicht homogen, sondern auf unterschiedlichen Ebenen strukturiert und an unterschiedlichen Orten unterschiedlich stark. Ein wichtiger Aspekt bei der Optimierung ist die Verschiebung des Bruchpunktes zu möglichst hohen Werten von Spannung und Dehnung. Dazu muss vor allem vermieden werden, dass mikroskopische Defekte (Risse) sich zu schnell ausbreiten.

2.9 Biomechanik

2.9.1 Grundlagen und Motivation

Die Biomechanik, als Teilgebiet der Biophysik, befasst sich mit Funktionen und Strukturen des Bewegungsapparats und mit Bewegungen von biologischen Systemen. Methodik und Messgrößen werden von der klassischen Mechanik übernommen und auf biologische Organismen und Objekte angewendet. Fragestellungen stammen aus der Ergonomie (z.B. Arbeitsplatzgestaltung, Werkzeuge, Arbeitsabläufe), der Medizin (Anatomie, Neurophysiologie, Orthopädie), aber auch aus der Biologie (z.B. tierische oder pflanzliche Bewegung und Strukturen). Neben der Biologie und Medizin spielt die Biomechanik eine wichtige Rolle im Leistungssport, teilweise auch im Theater.

Wie in der klassischen Mechanik kann man zwischen Statik, Dynamik und Kinematik unterscheiden. Das vorliegende Kapitel behandelt vor allem die Statik und die Muskelmechanik und -energetik, elastische und plastische Verformungen im Zusammenhang mit Knochen und Wirbelsäule. Andere Themen der Biomechanik, die hier nicht abgedeckt werden können, sind Fortbewegung auf dem Lande (inklusive Stehen), Fortbewegung im Wasser (Hydrodynamik, Schwimmen, Geißelbewegung) und Fortbewegung in der Luft (Aerodynamik, Fliegen). Die Biomechanik des Blutkreislaufes wird im folgenden Kapitel [2.15](#) ausführlicher behandelt.

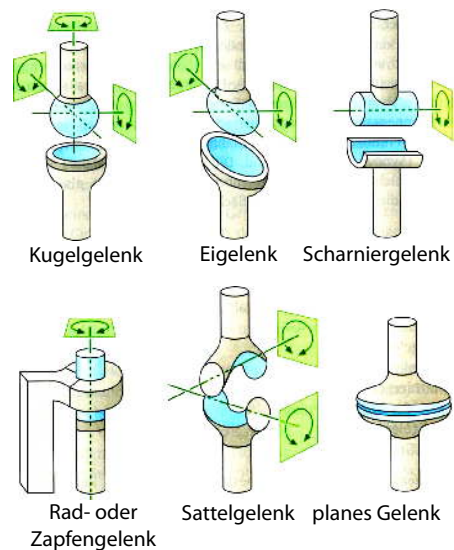


Abbildung 2.110: Gelenktypen des menschlichen Körpers.

Als Beispiel für die mechanischen Grenzen des menschlichen Körpers können die verschiedenen Gelenktypen dienen, mit denen unterschiedliche Stabilität und Bewegungsfreiheit verbunden sind. Im Laufe der Evolution wurden diese für unterschiedliche Gelenke und Randbedingungen entwickelt und optimiert. Kriterien sind hierbei z.B. Stabilität und Beweglichkeit. Abb. [2.110](#) zeigt schematisch die wichtigsten Typen.

2.9.2 Aufbau von Knochen

Knochen sind die wesentliche Voraussetzung dafür, dass höhere Organismen eine definierte Form aufweisen. Zusammen mit Muskeln und Sehnen ermöglichen sie die Fortbewegung sowie andere motorische Tätigkeiten. Außerdem haben sie eine schützende Funktion (z.B. Schädel für das Gehirn).

Das menschliche Skelett besteht aus rund 206 Knochen, man unterscheidet

- Lange Knochen : Röhrenknochen (Extremitäten)
- Kurze Knochen : Hand- und Fußwurzelknochen
- Unregelmäßige Knochen : Wirbel

- Flache Knochen : Schädelknochen, Schulterblatt, Rippen, Brustbein

Knochen sind stark strukturiert um ihre vielfältigen Aufgaben optimal erfüllen zu können. Eine Übersicht über den Aufbau von Knochen ist in der Abbildung 2.111 zu sehen.

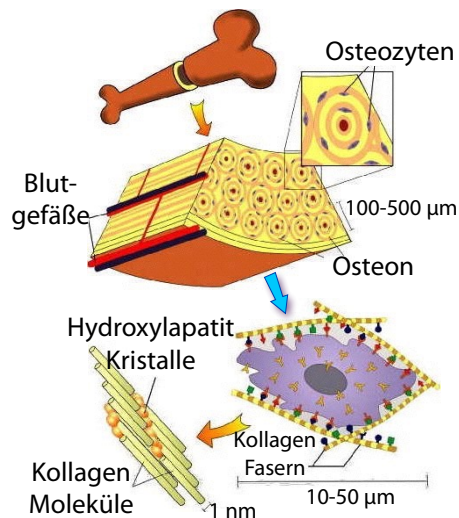


Abbildung 2.111: Aufbau von Knochen.

In einem typischen Röhrenknochen findet man ein System von röhrenartigen Strukturen, welche als Osteons bezeichnet werden. Diese bestehen aus einem Komposit-Material von kristallinem anorganischem Material und Proteinen, sowie aus lebenden Zellen. Das Ganze wird durch Blutgefäße mit Baustoffen und Sauerstoff versorgt.

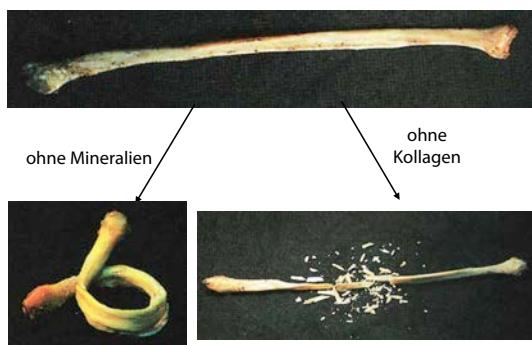


Abbildung 2.112: Knochen als Komposit-Material.

Knochen müssen unterschiedliche Kräfte auffangen können, welche sowohl als Dehnung, Stauchung,

Biegung, Torsion oder Scherung wirken können und müssen dementsprechend auf alle diese Belastungen angepasst sein. Die Kräfte können zudem kontinuierlich oder als Schläge wirken.

Knochen sind stark mineralisiert. Trotzdem ist der Bruchwiderstand 2 oder 3 Größenordnungen höher als der eines Kristalls, der aus dem reinen Mineral besteht.

Knochen enthalten lebende Zellen und bleiben dadurch anpassungsfähig. Belastungen führen zu entsprechenden Verstärkungsmechanismen: Werden Knochenzellen bei Belastungen um mehr als 0.15% gedehnt, so löst dies verstärkte Knochenbildung aus. Dies geschieht indem zusätzliches Calcium eingebaut wird. Umgekehrt können Knochen auch abgebaut werden: Bleibt die Dehnung dauerhaft unterhalb von 0.05%, so wird dies als Signal verstanden, dass der Knochen unnötig stabil ist und er wird abgebaut. Diese Anpassungen werden hormonell, sowie durch direkte Kommunikation zwischen den Knochenzellen kontrolliert.

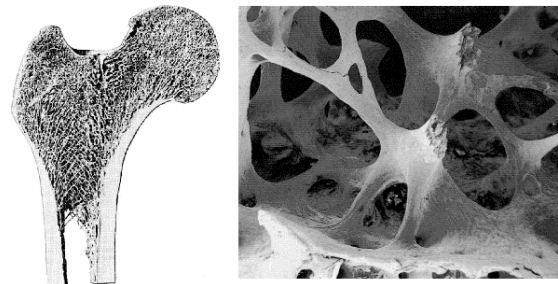


Abbildung 2.113: Knochen als Leichtbaustruktur

Die Fähigkeit, Kräfte aufnehmen und umleiten zu können, darf nicht mit einem zu hohen Gewicht bezahlt werden. Der Aufbau der Knochen ist deshalb vergleichbar mit Leichtbaukonstruktionen. Die äußeren Teile sind relativ dicht, im Inneren sind die Knochen meist mit mehr oder weniger großen Hohlräumen durchsetzt. Die Stützen und Stege sind so orientiert, dass sie die Lasten optimal ableiten. Diese Strukturierung erstreckt sich über eine weite Längenskala, vom *nm* bis in den *mm*-Bereich.

Technisch gesehen handelt es sich um eine "Nano-Komposit Struktur". Die Materialforschung versucht, vergleichbare Strukturen herzustellen. Aller-

dings wird es auf absehbare Zeit nicht möglich sein, dies bei einer Temperatur von 37° C in wässriger Lösung zu tun.

2.9.3 Extrazelluläre Matrix

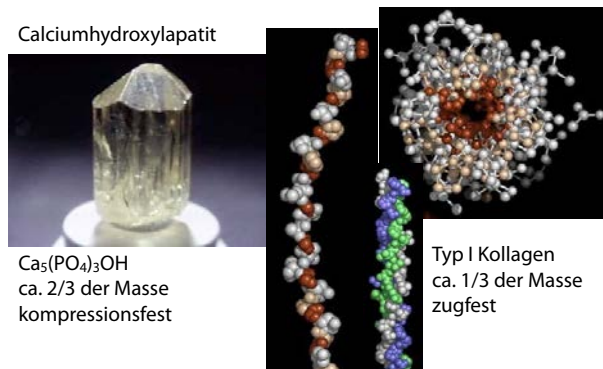


Abbildung 2.114: Bestandteile der extrazellulären Matrix.

Der größte Teil des Knochens besteht aus einer extrazellulären Matrix. Diese besteht zu ca. 2/3 aus Calciumhydroxylapatit ($\text{Ca}_5(\text{PO}_4)_3\text{OH}$). Dieses kristalline Material verleiht dem Knochen die Kompressionsfestigkeit. Der Rest der extrazellulären Matrix besteht zu 90% aus Typ I Kollagen. Dieses Protein ist vor allem für die Zugfestigkeit der Knochen verantwortlich, und für die Fähigkeit, die Energie von Schlägen aufzunehmen ohne dass sich dadurch größere Risse bilden.

Die Kollagen-Moleküle sind langkettige Polypeptide, die sich in 3er Gruppen zu einer Helix verbinden und in regelmäßigen Abständen miteinander verbunden sind.

Neuere Arbeiten zeigen, dass sich der organische Teil (=Kollagen) und der anorganische Teil (=Calciumapatit) gegenseitig beeinflussen: Sowohl die Morphologie der Apatitkristalle wie auch die Struktur der Proteine ist im Verband anders als in den reinen Komponenten. Insbesondere legen auch die Proteine die Kristallisationsrichtung der Apatitkristalle fest, so dass deren optimale Belastungsrichtung kontrolliert werden kann.

Als Modellobjekt für die Untersuchung derartiger Kompositmaterialien eignen sich unter anderem Mu-

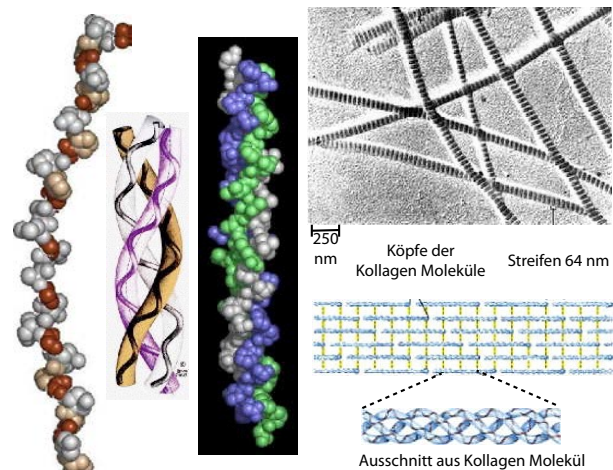


Abbildung 2.115: Struktur von Kollagen.

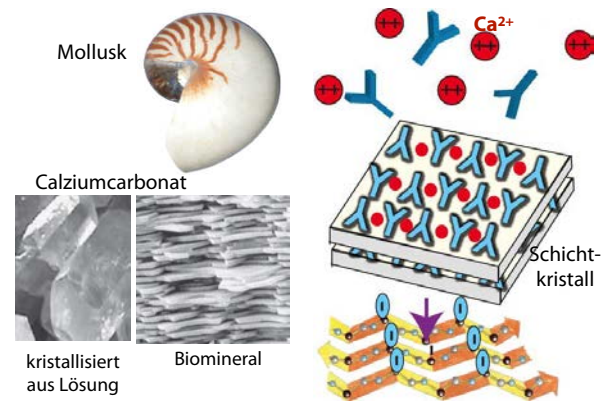


Abbildung 2.116: Knochen und Mollusken als Beispiele für Komposit-Materialien.

schelschalen sehr gut. Hier besteht der anorganische Teil aus Calciumcarbonat (CaCO_3). Da reines Calciumcarbonat (wie auch Calciumhydroxylapatit) sehr brüchig sind, hat die Natur den Trick des schichtweisen Wachstums (Epitaxie) erfunden, um die Bildung einer plättchenförmigen Modifikationen des CaCO_3 (Aragonit) zu erzwingen. Dabei dienen Filme aus dem Polysaccharid Chitin und negativ geladenen Proteinen als zweidimensionale Matrix. An dieser Oberfläche wächst das CaCO_3 in der Form von plättchenförmigen Kristallen. Es entsteht so ein schichtartig aufgebautes Keramik-Verbundmaterial mit außergewöhnlichen elastischen Eigenschaften. Obwohl es nur wenige Prozent an bio-organischem Material enthält, ist es einige 1000-mal resistenter

gegen Bruch als technische Keramiken. Die Ausbreitung von mikroskopisch kleinen Rissen wird durch den organischen Bestandteil behindert. Es gibt derzeit viele Bemühungen, die Prozesse der Biomineralisierung technisch nachzuahmen.

2.9.4 Mechanische Eigenschaften

Knochen sind darauf optimiert, bei geringem Gewicht Kräfte aufzunehmen und umzuleiten. Damit eine Kraft optimal aufgenommen werden kann, sollte der Knochen möglichst starr sein. Andererseits bedingt die Widerstandsfähigkeit gegen Stöße eine gewisse Elastizität, damit die Energie aufgenommen werden kann und nicht zu Brüchen führt. Tabelle 2.5 fasst die Elastizitätsmodule einiger Materialien zusammen. Die Anisotropie der elastischen Konstanten zeigt, dass sie auf die vorherrschende Belastung optimiert ist. Dies wird durch die anisotrope Struktur erreicht. Die Lamellenstruktur auf der Skala von einigen μm verhindert, dass Risse sich über diese Distanz hinaus ausbreiten (sofern die Belastung nicht zu hoch ist) und damit einen Bruch des Knochens.

Knochen und ähnliche vergleichbare Materialien sind hochgradig optimiert. Künstliche Materialien, welche ähnliche Eigenschaften erreichen, können nur mit aufwändigen Spezialverfahren hergestellt werden. Demgegenüber werden Knochen bei Temperaturen von 37° in wässriger Lösung hergestellt, mit sehr unterschiedlichen Formen. Diese Eigenschaften gelten allgemein für harte biologische Materialien und werden insbesondere an Muschelschalen untersucht. Man versucht, deren Eigenschaften auch in künstlichen Komposit-Materialien zu nutzen (siehe, z.B. [7]).

2.9.5 Kräfte im Beckenbereich

Die Morphologie (=Form) der Knochen ist dahingehend optimiert, dass die darauf wirkenden Kräfte optimal umgeleitet werden. Ein Beispiel für die Kräftezerlegung durch die Knochenform und Muskelfixierung ist in den folgenden Abbildungen für den Beckenbereich zu sehen.

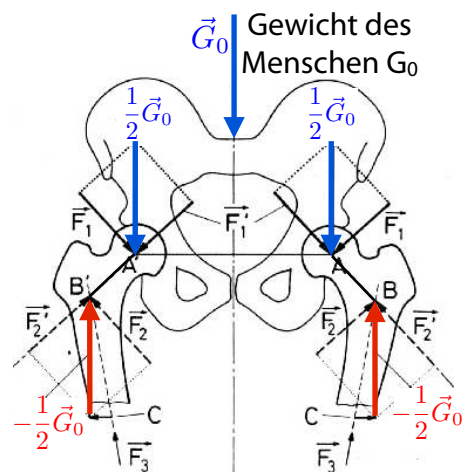


Abbildung 2.117: Kräfte im Beckenbereich.

Das Gewicht G_0 des Menschen wird im Becken auf die beiden Beine (im Schnitt) gleichmäßig aufgeteilt. Auf jedes Hüftgelenk muss somit eine Stützkraft von $-\frac{1}{2}G_0$ wirken.

In Gedanken zerlegen wir diese Kraft im Bereich des Hüftgelenkes wieder in 2 Komponenten: F_1 wirkt senkrecht, F_1' parallel zur Verbindungsrichtung AB. Damit das System im Gleichgewicht bleibt, müssen im Punkt B wiederum zwei Kräfte, F_2 und F_2' wirken, welche entgegengesetzt gleich zu F_1 und F_1' sind.

Die beiden Kräfte F_1' und F_2' erzeugen Druck, aber keine Beschleunigung und kein Drehmoment. F_1 und F_2 stellen dagegen ein Kräftepaar dar: sie erzeugen ein Drehmoment

$$T = 2|\vec{F}_1|\ell \sin\alpha, \quad (2.16)$$

welches durch die Muskeln und Sehnen kompensiert werden muss. Durch die beiden Kräftepaare erzeugen im Knochen sowohl Druck- wie auch Scherspannungen.

Der Oberschenkelknochen ist der größte Knochen des menschlichen Körpers. Er ist wie das Schien- und Wadenbein ein Röhrenknochen. Das bedeutet, dass er aus einem harten Mantel und einem weichen, mit Blutzellen gefüllten, Hohlraum besteht. Durch die abgewinkelte Verbindung werden Stöße auf das Becken abgemildert. Der Schenkelhals hat in diesem Sinne eine Stoßdämpfer-Funktion.

Material	Elastizitätsmodul E / GPa	Bruchfestigkeit $\sigma_B/10$ MPa	Bruchdehnung %
Al (rein, weich)	72	1.3	50
α -Eisen	218	10	50
CrV-Federstahl	212	155	5
Beton	40	5	
Hölzer (\perp)Maserung	15 (1.5)	5-20 (0.3-1)	
Knochen kompakt (spongiös)	18 (0.08)	12 (0.22)	
Knochen (\perp)	16	8.5 (1)	0.6 (0.2)
Sehnen (Bandscheiben)	0.7	6.5 (1.1)	
Menschenhaar	3.6		

Tabelle 2.5: Elastizitätsmodule und Bruchfestigkeit verschiedener Materialien.

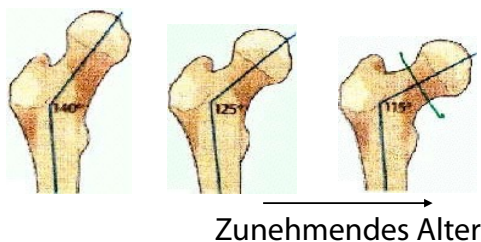


Abbildung 2.118: Änderung des Winkels des Oberschenkelhalsknochens mit zunehmendem Alter.

Auf den Oberschenkelhalsknochen erzeugt das Kräftepaar ein besonders großes Drehmoment und damit Biegekräfte. Der Winkel (CCD-Winkel) beträgt $180^\circ - \alpha$ und ändert sich im Laufe des Alters: Er beträgt bei Neugeborenen etwa 150° , bei Erwachsenen etwa $125 - 126^\circ$, und im Alter weniger als 120° . Der Winkel α steigt somit von 30° auf mehr als 60° . Laut Gleichung (2.16) steigt damit das Drehmoment und die Zug-/Druck Belastung des Knochens. Dadurch steigt mit zunehmendem Alter die Gefahr eines Schenkelhalsbruchs, besonders bei einer eventuell vorhandenen Osteoporose.

2.10 Belastung und Bruch

2.10.1 Belastung und Widerstand

Knochen müssen unterschiedlichen Belastungen standhalten; dies können statische oder dynamische Belastungen (Stoß, Sturz) sein. Der Organismus hat verschiedene Mechanismen entwickelt, um sicherzustellen, dass normale Belastungen normalerweise nicht zu einem Versagen, d.h. in diesem Fall zum Bruch des Knochens führen. Dabei wird jedoch nicht der Knochen einzeln optimiert (z.B. durch Verstärkung), sondern die Leistungsfähigkeit und das Überleben des gesamten Organismus. Dies beinhaltet z.B. dass die Knochen nicht beliebig schwer werden dürfen.

Wie bereits in Kapitel 2.9.2 dargestellt, reagiert der Körper auf Belastungen der Knochen indem die belasteten Bereiche verstärkt werden. Dadurch wird die Stärke der Knochen den bekannten Belastungen angepasst und gegen vergleichbare Belastungen in der Zukunft geschützt. Damit wird in erster Linie sichergestellt, dass der Knochen regelmäßige Belastungen aushalten kann. Durch eine erhebliche Sicherheitsreserve wird jedoch auch gegen stärkere, ähnliche Belastungen Vorsorge getroffen. Darüber hinaus wird durch die Strukturierung des Knochens auf der Nanometer- bis Mikrometerskala das Risiko für ein katastrophales Versagen reduziert. Im Gegen-

satz zu mechanischen Werkstücken sind Knochen in der Lage, kleinere Schäden zu reparieren.

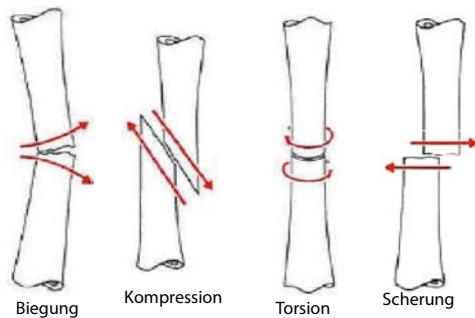


Abbildung 2.119: Unterschiedliche Belastungen eines Röhrenknochens und resultierende Knochenbrüche.

In Figur 2.119 sind unterschiedliche Belastungen dargestellt und die Art der daraus resultierenden Brüche eines Röhrenknochens (z.B. Schienbein). Wir betrachten zunächst einen relativ einfachen Fall, den Biegebruch.

2.10.2 Biegung

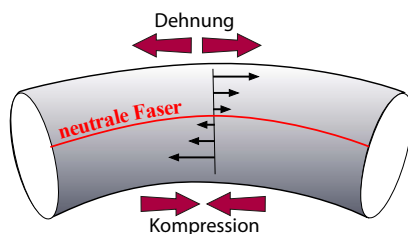


Abbildung 2.120: Neutrale Faser als Linie verschwindender Normalspannung.

Wird ein Objekt gebogen, so wird es auf der einen Seite gedehnt, auf der anderen Seite komprimiert. Da die Spannung im Inneren nicht springt muss es dazwischen einen Punkt geben, wo die Normalspannung verschwindet. Verbindet man alle diese Punkte entlang des Körpers, so erhält man die "neutrale Faser".

Ein fest eingespannter Stab der Dicke d , der Breite b und der Länge L biegt sich unter dem Einfluss einer Kraft F , die am nicht eingespannten Ende angreift.

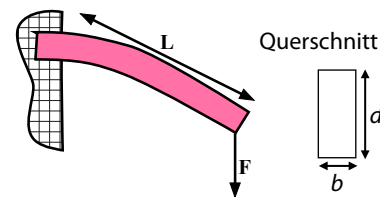


Abbildung 2.121: Biegung eines Balkens.

Die Spannung ist am größten am Einspannpunkt. Dort beträgt sie $\sigma = \frac{FL}{2\alpha d^2 b}$. Der Faktor α hängt ab vom Querschnitt des Stabes. Er beträgt 1/12 für einen rechteckigen Querschnitt, und 1/28 für einen kreisförmigen.



Abbildung 2.122: Biegebruch

Wenn $\sigma > \sigma_{Bruch}$ ist zerreißt der Stab aufgrund des Überschreitens der Bruchspannung. Die Tragfähigkeit ist proportional zu der Dicke und Breite, aber umgekehrt proportional zur Länge. Da die Spannung auf der Außenseite am größten ist und die meisten Materialien eine geringere Bruchspannung gegen Dehnung als gegen Kompression aufweisen beginnt der Bruch auf der Außenseite.

Sobald ein Riss entsteht, wird die Spannung an der Spitze des Risses stark vergrößert und die Wahrscheinlichkeit ist groß, dass der Riss sich mit zunehmender Geschwindigkeit senkrecht durch den Stab ausbreitet. Diese qualitative Überlegung kann sowohl durch analytische Rechnungen wie auch durch atomare Simulationsrechnungen verifiziert werden.

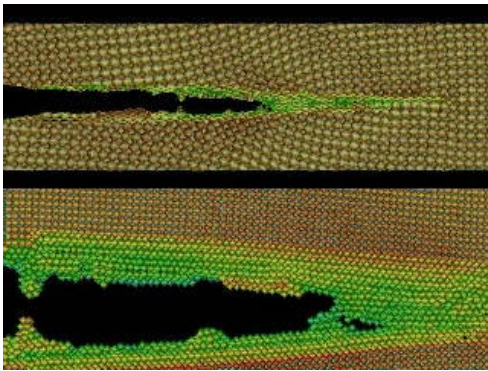


Abbildung 2.123: Atomare Simulation der Ausbreitung eines Risses.

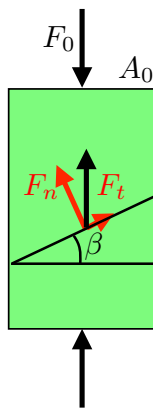


Abbildung 2.124: Normalkraft \vec{F}_n und Tangentialkraft \vec{F}_t bezüglich einer schiefen Ebene.

2.10.3 Richtungsabhängige Spannungen

Wir betrachten die Kräfte in einem Block aus homogenem Material, das mit einer Kraft F_0 auseinandergezogen (oder gestaucht) wird. Bezüglich einer Ebene, deren Normale gegen die Krafrichtung um den Winkel β geneigt ist, sind die Normal- und Tangentialkraft

$$F_n = F_0 \cos \beta \quad F_t = F_0 \sin \beta,$$

wie in Abb. 2.124 gezeigt. Die Fläche, auf die diese Kräfte wirken, ist

$$A = \frac{A_0}{\cos \beta}.$$

Somit haben die Normalspannung σ , resp. Schubspannung τ die Winkelabhängigkeit

$$\sigma = \frac{F_0}{A_0} \cos^2 \beta \quad \tau = \frac{F_0}{A_0} \cos \beta \sin \beta .$$

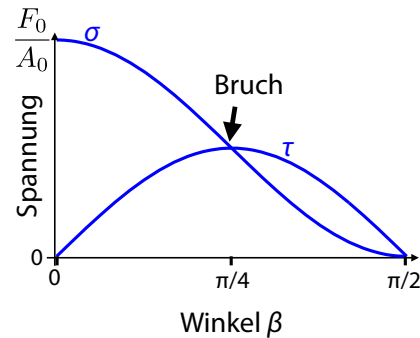


Abbildung 2.125: Winkelabhängigkeit für Druck- und Scherspannung.

Die Druckspannung nimmt deshalb kontinuierlich ab mit zunehmendem Winkel β , während die Schubspannung über ein Maximum läuft. Da Schubspannungen eher zu Brüchen führen als Druckspannungen, findet man bei isotropen Materialien häufig, dass der Bruch entlang einer Ebene verläuft, die um 45° gegenüber der Achse gekippt ist.

2.10.4 Torsion

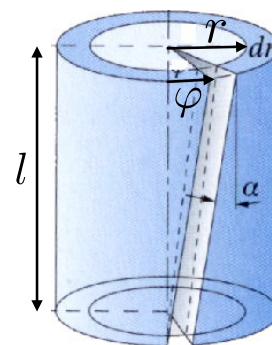


Abbildung 2.126: Torsion eines Zylinders.

Abb. 2.126 zeigt als Beispiel für eine Torsionsbelastung einen Zylinder der Höhe l , der um einen Winkel φ verdrillt wird, d.h. die Oberseite ist gegenüber der Unterseite um diesen Winkel gedreht. Im Inneren

entsteht dadurch eine inhomogene Spannungsverteilung, welche von innen nach außen linear zunimmt.

In einem dünnen Hohlzylinder mit Radius r ist die Scherspannung homogen. Der Scherwinkel beträgt $\alpha = r\varphi/\ell$. Gemäß der Definition des Schubmoduls G entspricht diesem Scherwinkel eine Scherspannung

$$\tau = G\alpha = G\frac{r\varphi}{\ell}. \quad (2.17)$$

Aus der Schubspannung können wir das Drehmoment $M = Fr$ berechnen ($F =$ Kraft, $r =$ Abstand von der Drehachse), welches diese Torsion erzeugt. Für den betrachteten Hohlzylinder mit Radius r und Dicke dr beträgt die Fläche, an der die Schubspannung angreift, $dA = 2\pi r dr$ und die darauf wirkende Kraft

$$dF = \tau dA = \tau 2\pi r dr = G\frac{r\varphi}{\ell} 2\pi r dr.$$

Für einen Vollzylinder ergibt sich das Drehmoment durch Integration über die Beiträge aller Hohlzylinder. Diese betragen

$$dM = r dF(r).$$

Integration ergibt

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R r dF(r) = \frac{2\pi G\varphi}{\ell} \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{\ell} \varphi. \end{aligned}$$

Aufgelöst nach dem Drillwinkel φ als Funktion des Drehmomentes ergibt das

$$\varphi = \frac{2M}{\pi G R^4} \ell.$$

Setzt man diesen Wert in den Ausdruck (2.17) für die Scherspannung τ ein, so erhält man die Scherspannung τ als Funktion des Drehmomentes M :

$$\tau = G\frac{r\varphi}{\ell} = G\frac{r}{\ell} \frac{2M}{\pi G R^4} \ell = \frac{2Mr}{\pi R^4}.$$

Die Scherspannung nimmt somit mit dem Abstand von der Achse zu und erreicht den maximalen Wert τ_m am Rand, für $r = R$:

$$\tau_m = \frac{2M}{\pi R^3}.$$

Überschreitet dieser Wert die Bruchspannung, dann erfolgt ein **Torsionsbruch**, der an der Peripherie beginnt.

Wie beim Biegebruch steigt die Spannung an der Spitze eines sich entwickelnden Risses stark an und dieser hat deshalb die Tendenz, sich mit zunehmender Geschwindigkeit auszubreiten. Um das zu vermeiden muss die Natur

- Eine genügende Sicherheitsreserve einbauen.
- Den Knochen so strukturieren, dass kleine, sich entwickelnde Risse aufgefangen und abgelenkt werden, so dass die Spannung die Bruchspannung nicht übersteigt.

2.10.5 Widerstandsmoment

Wie stark sich ein mechanisches Element unter dem Einfluss einer äußeren Kraft verformt, hängt neben den Elastizitätsmodulen von seiner geometrischen Form ab. Man quantisiert dies mit Hilfe der Widerstandsmomente. Im Fall einer Biegespannung spricht man vom axialen Widerstandsmoment, bei einer Torsion vom polaren Widerstandsmoment. Dieses ist gleich der Summe aus den axialen Widerstandsmomenten für Biegungen in zwei senkrecht zueinander stehende Richtungen.

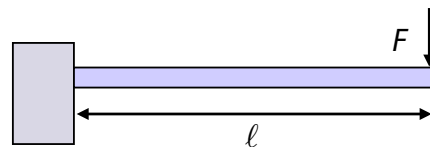


Abbildung 2.127: Einseitig eingespannter Balken mit Punktbelastung am freien Ende.

Ein einfaches Beispiel ist das eines eingespannten Stabes. Dessen Biegung wird erzeugt durch die Biegemomente $M_B = \sum_i F_i \ell_i$. Hier ist ℓ_i der Hebelarm der Kraft F_i .

Das Widerstandsmoment W ist eine rein geometrische Größe, welche als Proportionalitätskonstante zwischen dem Biegemoment und der Biegespannung B definiert ist;

$$B = \frac{M_B}{W} \quad W = \frac{J}{e_R}.$$

Hier stellt

$$J = \int z^2 dA$$

das axiale Flächenträgheitsmoment und e_R den Abstand der Randfaser von der neutralen Faser dar. Das Flächenträgheitsmoment errechnet sich als Integral über alle Flächenelemente, gewichtet mit dem Quadrat des Abstandes z von der neutralen Faser. Das Widerstandsmoment gibt an, wie gut der Stab eine Last aufnehmen kann. Es hat die Dimension eines Volumens. Dies lässt sich qualitativ leicht verstehen: Je größer der Querschnitt, desto geringer die Spannung bei gegebener Kraft. Zusätzlich führt ein großer Abstand von der neutralen Faser zu einem günstigen Hebelverhältnis.

Ein Beispiel ist das Flächenträgheitsmoment und das Widerstandsmoment für ein Rohr mit Radius R . Die Wandstärke sei $b \ll R$ und die neutrale Faser liege im Zentrum des Rohrs. In diesem Fall ist $z = R \cos \phi$ und das Flächenträgheitsmoment

$$\begin{aligned} J &= \int d\phi (R \cos \phi)^2 b R \\ &= R^3 b \int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 \phi = \pi R^3 b. \end{aligned}$$

Damit wird das Widerstandsmoment

$$W = \frac{J}{R} = \pi R^2 b.$$

Offenbar ist die Dimension des Widerstandsmoments ein Volumen,

$$[W] = \text{m}^3.$$

Tabelle 2.6 listet Widerstandsmomente für einige unterschiedliche Querschnitte. Interessant ist z.B. dass ein Hohlzylinder ein fast gleich großes Widerstandsmoment aufweist wie ein Vollzylinder, bei deutlich kleinerem Gewicht. So ist z.B. bei $r = 0.5 R$ das Gewicht 25 % geringer, aber das Widerstandsmoment nur 6 % geringer. Aus diesem Grund sind menschliche Knochen meist als Röhrenknochen gebaut.

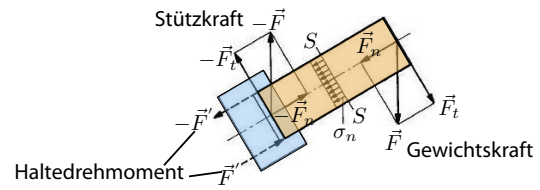


Abbildung 2.128: Homogener Stab als Modell für die Wirbelsäule.

2.10.6 Belastungen der Wirbelsäule

Die Wirbelsäule muss sehr unterschiedlichen Belastungen standhalten.

Abb. 2.128 zeigt ein einfaches Modell für die Wirbelsäule: sie wird als homogener elastischer Stab betrachtet, welcher im Becken eingespannt und gegenüber der Vertikalen geneigt ist. Das Gewicht (oder Gewicht plus zusätzliche Last) \vec{F} wirkt vertikal und wir fassen die verteilten Kräfte in einem Ansatzpunkt zusammen. Diese Gewichtskraft \vec{F} muss durch eine Stützkraft $-\vec{F}$ kompensiert werden, welche in unserem Modell am Becken angreift. Die Last \vec{F} und die Stützkraft können in eine Normalkraft \vec{F}_n und eine Transversalkraft \vec{F}_t zerlegt werden. Wie in Abb. 2.128 dargestellt, ergibt die Normalkraft eine homogene Druckbelastung über den Querschnitt der Wirbelsäule.

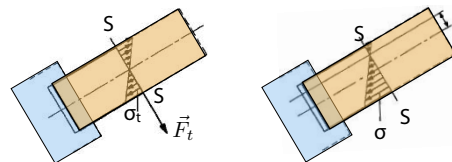


Abbildung 2.129: Spannungsverteilung im Modell für die Wirbelsäule. Links: Effekt von F_t ; rechts: Effekt von $\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_t$.

Das Kräftepaar $\vec{F}_t, -\vec{F}_t$ erzeugt ein Drehmoment und damit eine Biegebelastung, welche in Abb. 2.129 links dargestellt ist. Durch die Überlagerung der beiden Spannungen wird die Zugspannung reduziert (was günstig ist), aber die Druckspannung am unteren Rand der Wirbelsäule erhöht. Abb. 2.129 zeigt die entstehende Spannungsverteilung. Die linke Figur stellt den Effekt des Kräftepaars $\pm F_t$ dar, die

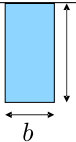
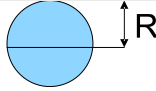
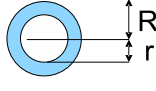
Form		Widerstandsmoment W	Querschnittsfläche A	$\frac{W}{A}$
Rechteck		$\frac{1}{6}bh^2$	bh	$\frac{1}{6}h$
Vollzylinder		$\frac{\pi}{4}R^3$	πR^2	$\frac{1}{4}R$
Hohlzylinder		$\frac{\pi}{4} \frac{R^4 - r^4}{R} = \frac{\pi}{4} R^3 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$	$\pi(R^2 - r^2)$	$\frac{1}{4} \frac{R^2 + r^2}{R}$

Tabelle 2.6: Axiale Widerstandsmomente für unterschiedliche Querschnitte und Belastung in vertikaler Richtung.

rechte berücksichtigt zusätzlich die Normalspannung F_n . In diesem Fall ist die Zugbelastung günstiger, aber die Schubspannung größer.

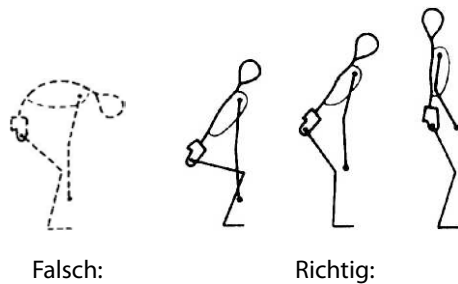


Abbildung 2.130: Ungünstige, resp. günstige Haltung beim Anheben von Lasten.

Zu hohe Druckspannungen können unter Anderem dazu führen, dass die Bandscheiben zwischen den Wirbeln beschädigt werden. Solche Belastungen, insbesondere transversale Kräfte \vec{F}_t sollten deshalb gering gehalten werden, indem die Last möglichst entlang der Wirbelsäule gerichtet wird. Dies kann z.B. durch eine aufrechte Haltung beim Heben von Lasten erreicht werden, wie in Abb. 2.130 gezeigt.

2.10.7 Energieaufnahme

Bei Sprüngen können für kurze Zeiten sehr hohe Belastungen auftreten, wobei es sich in erster Linie um

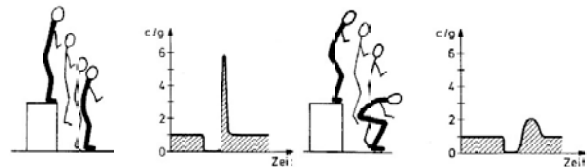


Abbildung 2.131: Belastung beim Sprung.

Normalspannungen handelt. Springt man aus einer Höhe h , so hat man beim Auftreffen auf den Boden eine Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$, welche auf 0 reduziert werden muss. Dies kann entweder durch eine hohe Beschleunigung und damit starke Kräfte auf einem kurzen Weg geschehen, oder auf einem längeren Weg mit entsprechend geringeren Kräften. Praktisch kann man die Spitzenbelastung gering halten, wenn man sie mit Hilfe der Beinmuskulatur abfedert. Das Integral der Belastung ist konstant: die Dauer der verschwindenden Belastung in Abb. 2.131 ist durch die Dauer des freien Falls gegeben und muss durch das Integral der positiven Spitze kompensiert werden. Eine niedrigere Spitze kann somit durch eine längere Dauer erreicht werden.

Knochen sind nicht rein elastisch, sie haben auch viskoelastische Eigenschaften. Dies bedeutet, dass ihre elastischen Parameter davon abhängigen, wie schnell die Spannung angelegt wird. Wie in Abb. 2.132 gezeigt, kann dies dadurch modelliert werden, dass zusätzlich zum Hooke'schen Term ein Dämpf-

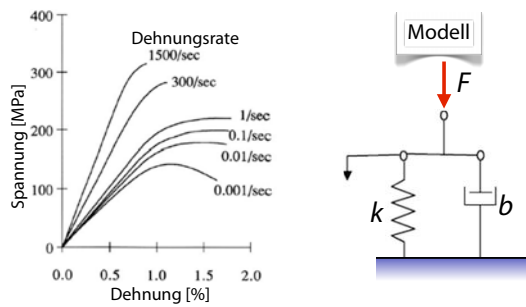


Abbildung 2.132: Viskoelastische Eigenschaften von Knochen. Links: Dehnungs-Spannungs Diagramme für unterschiedliche Dehnungsraten. Rechts: vereinfachtes Modell mit einem Hooke'schen Term und einem geschwindigkeitsabhängigen Dämpfungsterm.

fungsterm eingebaut wird, welcher nicht vom Ort, sondern von der Geschwindigkeit abhängt.

2.11 Mechanik in bewegten Bezugssystemen

2.11.1 Galilei'sche Relativität

Die Beschreibung einer Bewegung hängt ab vom verwendeten Bezugssystem: Wenn jemand in einem Eisenbahnwagen einen Ball aufwirft, so hängt die Form der Bahnkurve davon ab, ob der Betrachter ebenfalls in der Eisenbahn sitzt oder auf dem Bahnsteig steht.

Man ist grundsätzlich frei in der Wahl des Bezugssystems, d.h. man kann auswählen welches Bezugssystem man verwendet, um die beobachteten Phänomene zu beschreiben. Im oben genannten Beispiel unterscheiden sich die beiden Bezugssysteme lediglich um die Anfangsgeschwindigkeit in der Bewegungsrichtung der Eisenbahn. Es gibt meist ein Bezugssystem, welches eine besonders einfache Beschreibung ermöglicht. Vor allem aber ist nicht garantiert, dass in jedem Bezugssystem die Newton'schen Axiome erfüllt sind. Ist dies der Fall, so

bezeichnet man das System als Inertialsystem. Es gibt beliebig viele unterschiedliche Inertialsysteme.

Jedes ortsfeste Inertialsystem kann man in ein anderes transformieren, wenn man eine Translation oder Rotation vornimmt. Außerdem kann man das Bezugssystem immer mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber einem Inertialsystem verschieben und erhält ein weiteres Inertialsystem. Die Tatsache, dass alle diese Systeme gleichwertige Möglichkeiten für die Beschreibung der beobachteten Phänomene darstellen, bedeutet, dass absolute Geschwindigkeit keine Bedeutung hat. Ähnlich bedeutet die Tatsache, dass der Ursprung des Koordinatensystems frei wählbar ist, dass absolute Position keine Bedeutung hat. Aus der (experimentell verifizierten) Tatsache, dass die physikalischen Gesetze gültig bleiben bei einer beliebigen (konstanten) Bewegung des Bezugssystems kann man u. a. die Erhaltung des linearen Impulses herleiten.

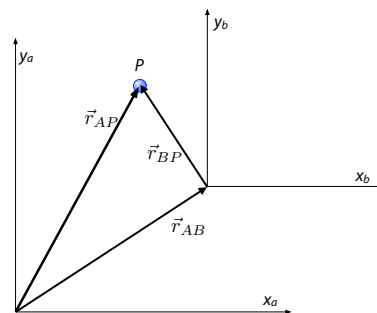


Abbildung 2.133: Ortsvektor \vec{r} eines Punktes P in 2 unterschiedlichen Bezugssystemen A, B .

Wir betrachten zunächst die beiden Bezugssysteme von Abb. 2.133, welche gegeneinander in Ruhe sind, aber einen unterschiedlichen Ursprung besitzen. Ist der Ursprung des Systems B im System A am Ort \vec{r}_{AB} , und der Ortsvektor des Punktes P im System B \vec{r}_{BP} , so ist offenbar der Ortsvektor \vec{r}_{AP} im System A

$$\vec{r}_{AP} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP}.$$

2.11.2 Relativgeschwindigkeit

Man verwendet nicht immer ruhende Bezugssysteme. Abb. 2.134 zeigt einen Fall, bei dem sich das

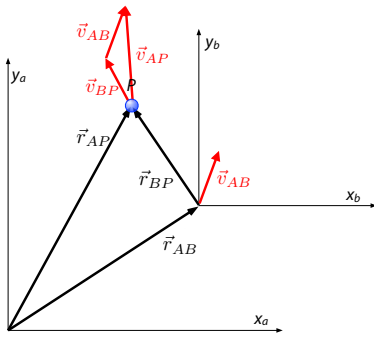


Abbildung 2.134: Bewegte Bezugssysteme.

System B gegenüber dem System A mit der konstanten Geschwindigkeit \vec{v}_{AB} bewegt. Ist die Position des Bezugssystems B relativ zu A zum Zeitpunkt $t = 0$ $\vec{r}_{AB}(0)$, so gilt offenbar zur Zeit t

$$\vec{r}_{AB}(t) = \vec{r}_{AB}(0) + \vec{v}_{AB}t.$$

Für einen Punkt P , der sich gegenüber dem System B mit der konstanten Geschwindigkeit \vec{v}_{BP} bewegt,

$$\vec{r}_{BP}(t) = \vec{r}_{BP}(0) + \vec{v}_{BP}t$$

gilt somit

$$\begin{aligned} \vec{r}_{AP}(t) &= \vec{r}_{AB}(t) + \vec{r}_{BP}(t) = \\ &= \vec{r}_{AB}(0) + \vec{r}_{BP}(0) + \vec{v}_{AB}t + \vec{v}_{BP}t \\ &= \vec{r}_{AP}(0) + \vec{v}_{AP}t, \end{aligned}$$

wobei die Geschwindigkeit \vec{v}_{AP} des Punktes P gegenüber dem System A durch die Vektorsumme

$$\vec{v}_{AP} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BP}$$

gegeben ist. Die Geschwindigkeit im Bezugssystem A ist somit gegeben durch die Summe aus der Geschwindigkeit im Bezugssystem B und der Relativgeschwindigkeit der beiden Bezugssysteme.

2.11.3 Gleichförmig beschleunigte Bezugssysteme

Die Relativgeschwindigkeit zwischen zwei Bezugssystemen ist nicht immer konstant. Typische Beispiele sind Aufzüge oder Eisenbahnen beim Anfahren oder Abbremsen oder Flugzeuge beim Start. Hier

sollen nur gleichförmige Beschleunigungen diskutiert werden, d.h. $a = \text{konstant}$. Deren Behandlung ist zunächst analog zur Behandlung von Bezugssystemen, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen. Wir betrachten hier nur den einfachen Fall, dass die beiden Systeme zum Zeitpunkt $t = 0$ identisch sind, das System B gegenüber dem System A jedoch gleichförmig beschleunigt wird mit \vec{a}_{AB} . In beiden Systemen gilt die übliche Kinematik. Für den Punkt P , der gegenüber System B mit \vec{a}_{BP} beschleunigt wird, findet man im System A in Analogie zur obigen Herleitung für die Geschwindigkeiten die Beschleunigung

$$\vec{a}_{AP} = \vec{a}_{AB} + \vec{a}_{BP}.$$

Für Geschwindigkeit und Ort gilt für $\vec{r}_{AB}(0) = 0$, $\vec{v}_{AB}(0) = 0$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{AP} &= \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BP} = \vec{a}_{AB}t + \vec{v}_{BP}, \\ \vec{r}_{AP} &= \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP} = \vec{a}_{AB}\frac{t^2}{2} + \vec{r}_{BP}. \end{aligned}$$

Anders sieht es aus bei der Dynamik. Da die Beschleunigung in den beiden Bezugssystemen unterschiedlich ist, können Newton's Axiome nicht in beiden Systemen gelten. Gelten sie z.B. im System A und ist die resultierende Kraft auf den Körper

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}_{AP}}{dt} = m\vec{a}_{AP} = m(\vec{a}_{AB} + \vec{a}_{BP}),$$

so können wir im Bezugssystem B schreiben

$$m\vec{a}_{BP} = m(\vec{a}_{AP} - \vec{a}_{AB}) = \vec{F} - m\vec{a}_{AB}.$$

Der zusätzliche Term $-m\vec{a}_{AB}$ in der Bewegungsgleichung kann als scheinbare Kraft, als Trägheitskraft interpretiert werden. Wir spüren sie z.B. beim Anfahren eines Aufzugs: beschleunigt der Aufzug nach oben, so drückt uns eine Kraft nach unten, welche proportional zur Beschleunigung und zu unserer Masse ist. In einem Bezugssystem, welches mit der Erdbeschleunigung g nach unten beschleunigt wird, verschwindet scheinbar die Schwerkraft.



Abbildung 2.135: Links: Fallturm in Bremen. Rechts: Kapsel im Fallturm.

2.11.4 Schwerelosigkeit

Dies wird z.B. im Fallturm Bremen ausgenutzt. Wie in Abb. 2.135 gezeigt, werden dort Experimente in der Schwerelosigkeit durchgeführt, die sonst nur im Weltraum möglich sind. So können für Kurzzeitexperimente die hohen Kosten einer Weltraumexpedition eingespart werden. In dem 110 m hohen Rohr des Turms wird eine Fallkapsel hochgezogen und losgelassen.

Während des freien Falls von knapp fünf Sekunden herrscht in der Kapsel Schwerelosigkeit. Das Fallrohr wird luftleer gepumpt, um Störungen durch Luftreibung zu vermeiden.

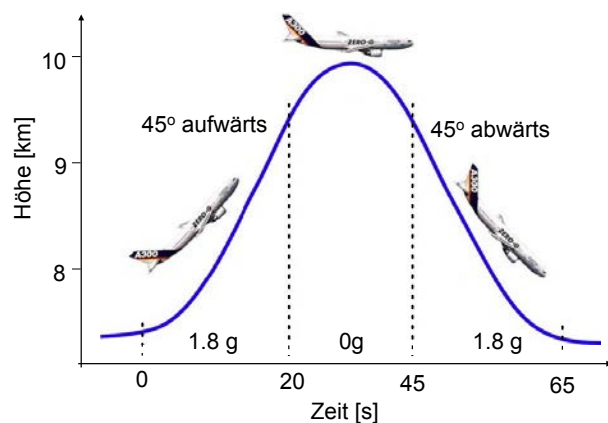


Abbildung 2.136: Prinzip des Parabelflugs.

Längere Zeiten von Schwerelosigkeit kann man in Spezialflugzeugen von NASA und ESA erleben,

oder bei der Firma "Go Zero g". Wie in Abb. 2.136 gezeigt, fliegen diese Flugzeuge steil nach oben und folgen dann für ca. 25 s einer Parabel. Dieser Teil der Flugbahn entspricht einer Wurfparabel, d.h. das Flugzeug fliegt mit konstanter Horizontalgeschwindigkeit und einer vertikalen Beschleunigung nach unten von $9,81 \text{ ms}^{-2}$. Während dieser Zeit sind Passagiere und Ausrüstung praktisch schwerelos, wie in Abb. 2.137 gezeigt.



Abbildung 2.137: Schwerelosigkeit beim Parabelflug.

Während Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft von der Wahl des Bezugssystems abhängen, gilt dies nicht für Abstände oder Geschwindigkeitsdifferenzen: diese sind im Rahmen der klassischen Mechanik nicht von der Wahl des Bezugssystems abhängig.

Benötigt man Schwerelosigkeit für längere Zeit, so steht heute dafür die ISS³ zur Verfügung. Auch diese führt eine beschleunigte Bewegung durch, welche in guter Näherung einer Kreisbewegung entspricht.

2.11.5 Kreisbewegung

Ein Spezialfall der Bewegung in zwei (oder drei) Dimensionen ist die Kreisbewegung (→ Kap. 2.6.1).

Häufig genügt es, wenn man die Kreisbewegung mit einer einzigen Koordinate beschreibt, dem Winkel ϕ bezüglich der x -Achse, gemessen vom Zentrum des Kreises (→ Abb. 2.138). Die entsprechende Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\phi/dt$ entspricht dann ebenfalls einer skalaren Größe. In drei Dimensionen wird

³International Space Station

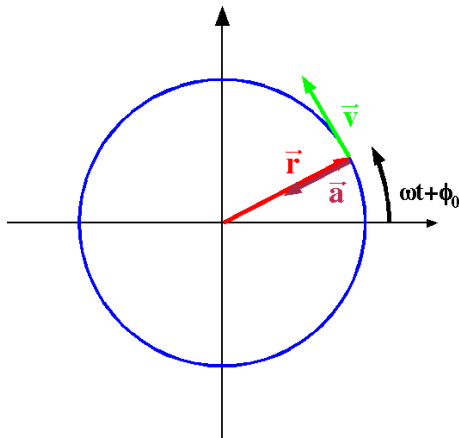


Abbildung 2.138: Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung für einen Massenpunkt bei einer Kreisbewegung.

sie als Vektor dargestellt, der senkrecht auf dem Kreis steht und mit der Drehbewegung zusammen eine Rechtsschraube bildet.

In 2 Dimensionen kann der Ortsvektor eines Punktes, welcher im drehenden Koordinatensystem in Ruhe ist, geschrieben werden als

$$\vec{r} = r_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \phi_0) \\ \sin(\omega t + \phi_0) \end{pmatrix}.$$

Somit beträgt die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega r_0 \begin{pmatrix} -\sin(\omega t + \phi_0) \\ \cos(\omega t + \phi_0) \end{pmatrix}$$

und die Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \omega^2 r_0 \begin{pmatrix} -\cos(\omega t + \phi_0) \\ -\sin(\omega t + \phi_0) \end{pmatrix},$$

d.h. sie wirkt in radialer Richtung nach innen.

Offenbar ist eine Kreisbewegung eine beschleunigte Bewegung. Beschreibt man die Bewegung von Objekten in einem rotierenden Koordinatensystem, so haben deshalb die Newton'schen Axiome keine Gültigkeit, sondern es treten zusätzliche Kräfte auf, sogenannte Scheinkräfte.

2.11.6 Bewegungsgleichung im rotierenden Bezugssystem

Wir versuchen jetzt, die Bewegungsgleichungen für eine allgemeine Bewegung im rotierenden System

herzuleiten. Wir beschränken uns auf eine Ebene, die senkrecht zur Rotationsachse steht. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da die Bewegung parallel zur Achse durch die Rotation nicht beeinflusst wird.

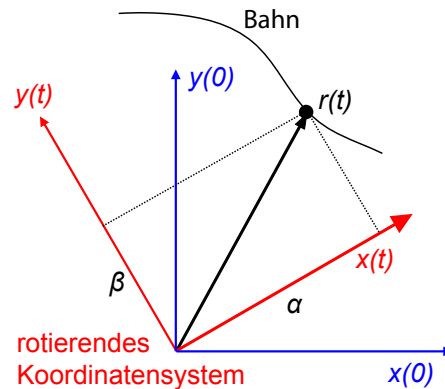


Abbildung 2.139: Bewegung in einem rotierenden Koordinatensystem.

Abb. 2.139 zeigt ein Koordinatensystem $\vec{x}(t), \vec{y}(t)$, welches sich um die z-Achse dreht und einen Massenpunkt, der sich entlang einer Bahn $\vec{r}(t)$ bewegt. Im rotierenden Koordinatensystem lautet der Ortsvektor des Massenpunktes

$$\vec{r} = \alpha(t)\vec{x}(t) + \beta(t)\vec{y}(t).$$

Sowohl die Koordinaten $\alpha(t), \beta(t)$ wie auch die Achsen $\vec{x}(t), \vec{y}(t)$ sind hier im Allgemeinen zeitabhängig. Die Geschwindigkeit erhält man wie üblich durch Ableiten:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}[\alpha(t)\vec{x}(t) + \beta(t)\vec{y}(t)].$$

Die Rotation der Koordinatenachsen kann beschrieben werden als

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{x}(0) \cos \omega t + \vec{y}(0) \sin \omega t \\ \vec{y}(t) &= \vec{y}(0) \cos \omega t - \vec{x}(0) \sin \omega t. \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit des Massenpunktes ist demnach

$$\vec{v}(t) = \dot{\alpha}(t)\vec{x}(t) + \dot{\beta}(t)\vec{y}(t) + \alpha(t)\dot{\vec{x}}(t) + \beta(t)\dot{\vec{y}}(t).$$

Die zeitlichen Ableitungen der Koordinatenachsen sind

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= -\vec{x}(0)\omega \sin(\omega t) + \vec{y}(0)\omega \cos(\omega t) \\ &= \omega \vec{y}(t). \\ \dot{\vec{y}}(t) &= -\vec{y}(0)\omega \sin(\omega t) - \vec{x}(0)\omega \cos(\omega t) \\ &= -\omega \vec{x}(t).\end{aligned}$$

Demnach ist

$$\vec{v}(t) = \dot{\alpha}(t)\vec{x}(t) + \dot{\beta}(t)\vec{y}(t) + \omega[\alpha(t)\vec{y}(t) - \beta(t)\vec{x}(t)].$$

Der erste Term besitzt die gleiche Form wie in einem Inertialsystem. Der zusätzliche zweite Term berücksichtigt die Zeitabhängigkeit der Basisvektoren. Er tritt auch dann auf, wenn $\alpha(t) = \alpha(0)$ und $\beta(t) = \beta(0)$, d.h. wenn sich der Punkt gegenüber dem rotierenden Koordinatensystem nicht bewegt.

2.11.7 Scheinkräfte im rotierenden Koordinatensystem

Nach dem gleichen Verfahren können wir die Beschleunigung berechnen:

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \\ \frac{d}{dt} \left\{ \dot{\alpha}(t)\vec{x}(t) + \dot{\beta}(t)\vec{y}(t) + \omega[\alpha(t)\vec{y}(t) - \beta(t)\vec{x}(t)] \right\} \\ &= \ddot{\alpha}(t)\vec{x}(t) + \omega\dot{\alpha}(t)\vec{y}(t) + \ddot{\beta}(t)\vec{y}(t) - \omega\dot{\beta}(t)\vec{x}(t) \\ &\quad + \omega[\dot{\alpha}(t)\vec{y}(t) - \dot{\beta}(t)\vec{x}(t)] \\ &\quad + \omega^2[-\alpha(t)\vec{x}(t) - \beta(t)\vec{y}(t)] \\ &= \ddot{\alpha}(t)\vec{x}(t) + \ddot{\beta}(t)\vec{y}(t) + 2\omega[\dot{\alpha}(t)\vec{y}(t) - \dot{\beta}(t)\vec{x}(t)] \\ &\quad + \omega^2[-\alpha(t)\vec{x}(t) - \beta(t)\vec{y}(t)].\end{aligned}$$

Der gleiche Sachverhalt kann auch etwas kompakter geschrieben werden wenn wir die Vektoren

$$\begin{aligned}\vec{r}^r &= (\alpha, \beta, 0), \\ \vec{v}^r &= (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, 0), \\ \vec{a}^r &= (\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, 0),\end{aligned}$$

einführen, d.h. Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung im rotierenden Koordinatensystem, sowie den Winkelgeschwindigkeitsvektor

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega).$$

Damit wird

$$\vec{a} = \vec{a}^r + 2\vec{\omega} \times \vec{v}^r - \omega^2 \vec{r}^r.$$

Wir können diese Gleichung natürlich auch nach der Beschleunigung im rotierenden Koordinatensystem auflösen:

$$\vec{a}^r = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}^r + \omega^2 \vec{r}^r. \quad (2.18)$$

Der erste Term entspricht der Beschleunigung im Inertialsystem. Für ein kräftefreies System verschwindet er nach dem Grundgesetz der Mechanik. Beschreibt man die Bewegung eines kräftefreien Körpers im Inertialsystem, so verschwindet die Beschleunigung und der entsprechende Punkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit tangential vom Kreis weg.

Die beiden anderen Terme in (2.18) beschreiben eine Beschleunigung im rotierenden Koordinatensystem, welche nicht von äußeren Kräften bestimmt wird; sie werden deshalb als Scheinkräfte bezeichnet. Der mittlere Term ist proportional zur Geschwindigkeit \vec{v}^r des Massenpunktes im rotierenden Koordinatensystem und zur Rotationsgeschwindigkeit des Systems. Der dritte Term ist proportional zum Quadrat der Winkelgeschwindigkeit, und zum Abstand \vec{r}^r von der Drehachse.

2.11.8 Zentrifugalkraft

Der letzte Term entspricht der Zentrifugalbeschleunigung (resp. Zentrifugalkraft). Sie muss durch eine gleich große Zentripetalkraft kompensiert werden wenn der Massenpunkt im rotierenden Koordinatensystem am Ort bleiben soll. Der Betrag ist

$$|F| = m|a| = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r}.$$

Die Zentrifugalkraft kann auch experimentell gemessen werden, wie in Abb. 2.140 gezeigt. Man lässt

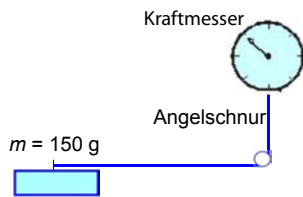


Abbildung 2.140: Messung der Zentrifugalkraft auf eine rotierende Masse.

dazu ein Gewicht um einen Punkt rotieren und misst, über eine Umlenkung, die Kraft, mit der das Gewicht an der Schnur nach außen zieht.

Im Experiment wurden folgende Werte gefunden:

Radius cm	Kraft N	Periode s	ω s^{-1}	$m\omega^2 r$ ms^{-2}
31,5	0,15	3,6	1,75	0,14
33	0,3	2,7	2,33	0,27
38,8	0,75	1,7	3,7	0,8

Offenbar stimmen die gerechneten Werte in der letzten Spalte im Rahmen der Messgenauigkeit mit den gemessenen Werten in der zweiten Spalte überein.

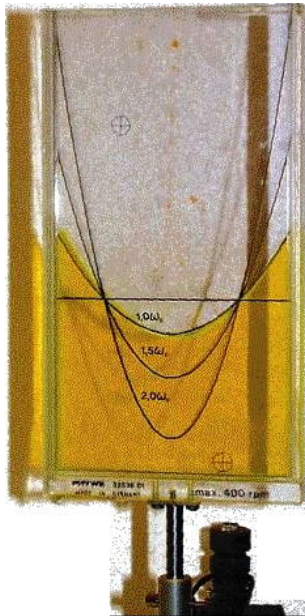


Abbildung 2.141: Zentrifugalküvette.

Die Beschleunigungskräfte können auch in Flüssigkeiten gemessen werden. Abb. 2.141 zeigt als Bei-

spiel eine rotierende Küvette, in der die eingeschlossene Flüssigkeit eine Parabelform annimmt, wenn die Küvette um die vertikale Achse rotiert wird.

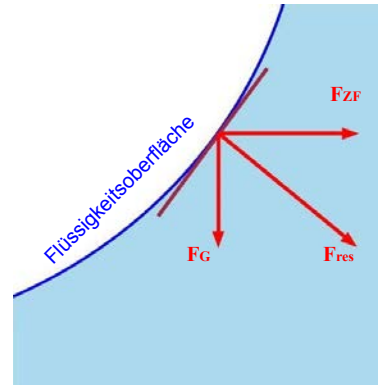


Abbildung 2.142: Kräftegleichgewicht an der Flüssigkeitsoberfläche.

Abb. 2.142 erläutert den Effekt. Die Oberfläche der Flüssigkeit wird durch die Gleichgewichtsbedingung definiert, dass die Kraft auf die Moleküle an der Oberfläche senkrecht zur Oberfläche sein muss (\rightarrow Kapitel 2.12.3). Sie setzt sich zusammen aus der Gewichtskraft (unabhängig vom Abstand von der Rotationsachse) und der Zentrifugalkraft ($\sim r^2$). Somit ist die Steigung der Oberfläche proportional zur Zentrifugalkraft. Damit erhält man folgende Form für die Oberfläche:

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Offenbar bildet die Oberfläche eine Parabel. Dies kann im Experiment gut bestätigt werden. Außerdem können wir die Abhängigkeit von der Rotationsgeschwindigkeit semi-quantitativ verifizieren.

2.11.9 Beispiele

Die Zentrifugalkraft wirkt auf alle Körper proportional zu ihrer Masse. Sie wird u.a. dazu verwendet, um Suspensionen zu trennen, indem man diese in eine Zentrifuge lädt. Ultrazentrifugen erzeugen Kräfte bis zu 10^6 g.

In der Kernspinresonanz (NMR) verwendet man ebenfalls sehr schnelle Drehungen: Man rotiert Proben mit bis zu 120 kHz um ihre eigene Achse, um

ausgemittelte Spektren zu erhalten. Bei typischen Zahlen von $\nu_r = 12 \text{ kHz}$, $d = 5 \text{ mm}$ erhält man

$$a_{ZF} = (2\pi \cdot 1,2 \cdot 10^4)^2 s^{-2} 2mm = 1,1 \cdot 10^7 m/s^2 = 1,2 \cdot 10^6 g,$$

also mehr als 1 Million mal die Erdbeschleunigung.

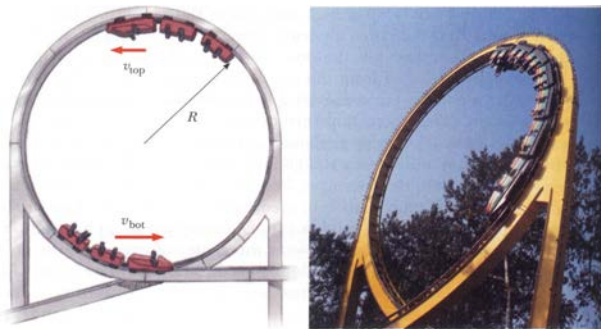


Abbildung 2.143: Loopingbahn.

Die Zentrifugalkraft wird auch in vielen spielerischen Anwendungen genutzt, wie z.B. bei einer Achterbahn wie in Abb. 2.143 und 2.144. In Experiment von Abb. 2.144 kann man messen, wie schnell ein Fahrzeug durch den Looping fahren muss um nicht herunterzufallen. Dafür muss am höchsten Punkt die Zentrifugalkraft gerade die Erdanziehung kompensieren. Somit muss die Zentrifugalbeschleunigung $a = R\omega^2 = v^2/R$ an der obersten Stelle größer oder gleich der Schwerebeschleunigung $a = g$ sein,

$$\frac{v^2}{R} \geq g.$$

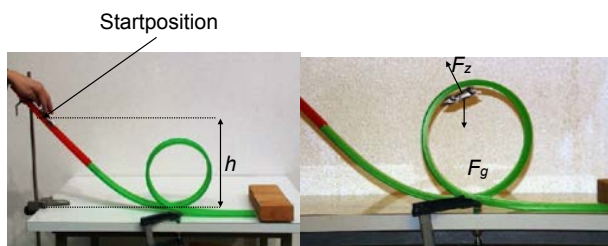


Abbildung 2.144: Experiment zur Loopingbahn: fällt der Wagen herunter?

Die Geschwindigkeit ergibt sich aus dem Vergleich zwischen potenzieller und kinetischer Energie,

$$\frac{v^2}{2} = g(h - 2R)$$

mit h als Starthöhe des Wagens. Einsetzen ergibt

$$2(h - 2R) \geq R \Rightarrow h \geq \frac{5}{2}R.$$

Der Startpunkt muss somit um mindestens $R/2$ oberhalb des Umkehrpunktes liegen. Im Experiment ist ein etwas höherer Startpunkt erforderlich, da Reibung zu einer etwas niedrigeren Geschwindigkeit führt.



Abbildung 2.145: Eisschnellläufer in einer Kurve.

Abb. 2.145 zeigt eine Sportart, bei der die Zentrifugalkraft die Geschwindigkeit beschränkt. Die Zentrifugalbeschleunigung kann hier direkt gemessen werden an der Neigung der Sportler: Die Summe aus Gewichtskraft und Zentrifugalkraft muss entlang der Körperachse wirken, damit die Läufer stabil um die Kurve fahren.

Wir betrachten als Beispiel eine sich drehende Scheibe, auf der ein Körper liegt. So lange sich dieser mit der Scheibe dreht, führt er offenbar eine beschleunigte Bewegung durch. In einem Koordinatensystem, welches an die Scheibe gekoppelt ist, ist er jedoch in Ruhe, d.h. nach Newton's Axiom dürfte keine Kraft auf ihn wirken. Lässt man ihn los, so dreht sich das Bild: im Ruhesystem ist er jetzt kräftefrei und führt deshalb eine gradlinige Bewegung

durch (tangential zur Scheibe). Im rotierenden Koordinatensystem beginnt er zunächst, sich radial nach außen zu bewegen und führt dann eine gekrümmte Bewegung aus; gemäß Newtons Axiom müssen somit Kräfte auf den Körper wirken. Die Bewegung im rotierenden Koordinatensystem wird aufgezeichnet, indem man die Kugel über ein Kohlepapier rollen lässt.

2.11.10 Corioliskraft

Wenn ein Körper sich auf einer rotierenden Scheibe bewegt, so wird er durch die Zentrifugalkraft nach außen beschleunigt. Er folgt jedoch keiner geradlinigen Bahn, sondern diese ist gekrümmt. Verantwortlich dafür ist die zweite Scheinkraft, die als Corioliskraft bezeichnet wird, nach dem französischen Physiker Gaspard Gustave de Coriolis (1792-1843). Die Corioliskraft kann geschrieben werden als

$$\vec{F}_C = 2\vec{p} \times \vec{\omega},$$

wobei der Impuls sich auf das rotierende Koordinatensystem bezieht. Er führt dazu, dass die Bewegung von reibungsfreien Körpern in einem rotierenden Koordinatensystem gekrümmt ist, falls die Bewegung eine Komponente senkrecht zur Rotationsachse aufweist.

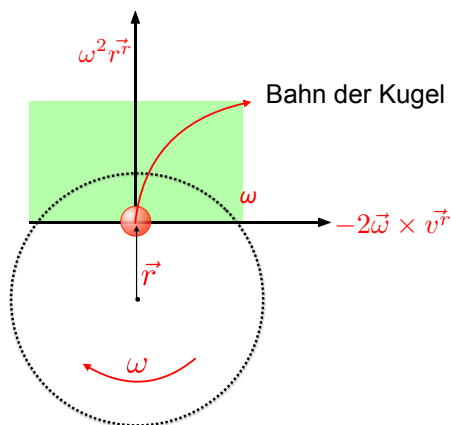


Abbildung 2.146: Zentrifugal- und Corioliskraft im Drehstuhl.

Abb. 2.146 zeigt die Richtung der beiden Scheinkräfte für eine Kugel, die zu Beginn radial nach außen rollt. Die Corioliskraft ist proportional zur

Geschwindigkeit des bewegten Körpers und zur Winkelgeschwindigkeit des Systems, wobei nur die senkrechte Komponente beiträgt. Wenn der Körper aufgrund der Zentrifugalkraft nach außen beschleunigt wird, setzt auch die Corioliskraft ein, welche proportional zur Geschwindigkeit ist und senkrecht zur Geschwindigkeit wirkt, d.h. die Bahn biegt. Der Effekt der beiden Kräfte ist eine spiralförmige Bewegung nach außen.

Die gleichen Kräfte treten z.B. auch bei Bewegungen auf der Erdoberfläche auf. Hier ist die Corioliskraft z.B. für die Ablenkung der Windsysteme verantwortlich. Gäbe es keine Erdrotation so würden die Winde direkt in Richtung des Zentrums eines Tiefdruckgebietes blasen. Aufgrund der Erdrotation wird bewegte Luft jedoch abgelenkt. Die Richtung wird durch das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{\omega}$ bestimmt. Der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ zeigt auf der Erde nach Norden. Auf der Nordhalbkugel werden die Winde nach rechts abgelenkt. Dies ist der Grund für die dominanten Westwinde in unseren Breitengraden: es handelt sich um Luft, die aus den Hochdruckgebieten im Bereich der Sahara nach Norden fließt und dabei durch die Corioliskraft nach Osten abgelenkt wird.

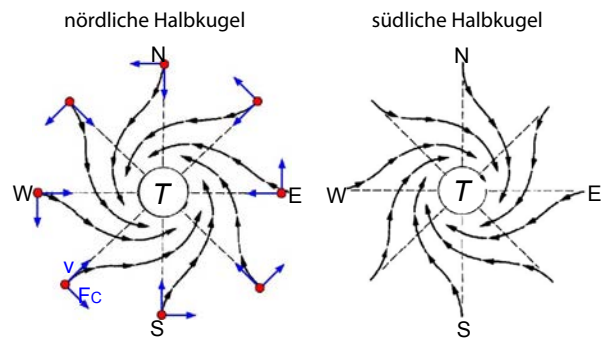


Abbildung 2.147: Windrichtung von Tiefdruckgebieten auf der nördlichen, resp. südlichen Hemisphäre.

Gleichzeitig führt die Corioliskraft dazu, dass Luft nicht gerade in ein Tiefdruckgebiet hinein fließt, sondern sich im Gegenuhrzeigersinn darum dreht. Auf der Südhalbkugel wechselt das Vorzeichen von $\vec{v} \times \vec{\omega}$, die Winde werden nach links abgelenkt und drehen sich im Uhrzeigersinn um die Tiefdruckge-

biete. Abb. 2.147 zeigt die Situation für beide Fälle.

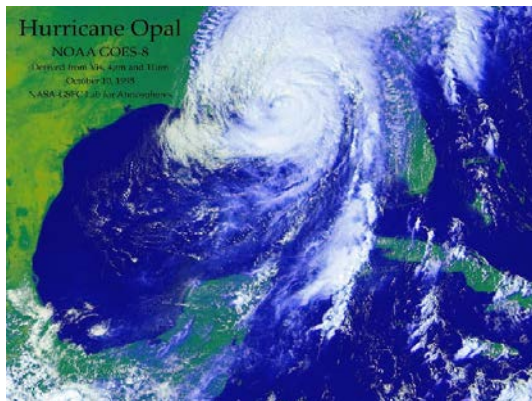


Abbildung 2.148: Hurrikan.

Die resultierende Drehung der Tiefdruckgebiete ist praktisch in jeder Wetterkarte sichtbar. Abb. 2.148 zeigt als Beispiel einen Hurrikan über dem südöstlichen Teil der USA.

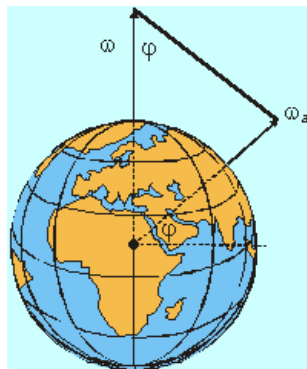


Abbildung 2.149: Das Foucault'sche Pendel.

Ebenso kann die Drehung der Pendelebene beim Foucault'schen Pendel als Effekt der Coriolis-Kraft verstanden werden. Die Geschwindigkeit der Pendelmasse ist näherungsweise parallel zur Erdoberfläche, während der Rotationsvektor $\vec{\omega}$ parallel zur Süd-Nord Achse der Erde steht. Die Projektion des Vektorprodukts $\vec{v} \times \vec{\omega}$ in die Horizontale hat den Betrag

$$F_C = -2m\omega v(t) \sin \varphi,$$

wobei φ die geographische Breite darstellt. Somit variiert die Präzessionsgeschwindigkeit mit $\sin \varphi$.

An den Polen dreht sich dadurch die Schwingungsebene in 24 Stunden einmal um 360° . In Dortmund dauert eine Rotation gegenüber dem terrestrischen Bezugssystem rund 30,67 Stunden.

2.11.11 Die Einstein'sche Relativitätstheorie

Nach der Galilei'schen Relativitätstheorie erhält man unterschiedliche Messresultate für die Geschwindigkeit eines Körpers, wenn man sie in unterschiedlichen Bezugssystemen misst, welche sich gegeneinander bewegen. Galilei versuchte als einer der ersten, die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht zu messen. Er verwendete dafür Laternen und eine Messstrecke von 15 km. Um diese Distanz zweimal zurück zu legen, benötigt Licht rund 10^{-4} Sekunden. Seine Messung konnte deshalb nur eine untere Grenze liefern. Die erste erfolgreiche Messung wurde von Ole Römer 1676 durchgeführt, indem er die Verdunkelungsperioden der Jupitermonde maß. Er fand einen Wert von 240000 km/s. Die erste rein terrestrische Messung wurde 1849 von Fizeau durchgeführt; er verwendete ähnlich wie Galilei eine Messstrecke, die von Licht zweimal durchlaufen wurde, aber anstelle von Menschen ein schnell drehendes Zahnrad.

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts versuchte man, die Lichtgeschwindigkeit in unterschiedlichen Bezugssystemen zu messen. Damals ging man davon aus, dass Licht sich in einem Medium namens Äther ausbreitet, welches sowohl im Vakuum wie auch in optisch transparenten Materialien vorhanden sei. Messungen der Lichtgeschwindigkeit sollten deshalb Informationen darüber liefern, wie sich z.B. die Erde gegenüber dem Äther bewegt. Es wurden entsprechend sorgfältige Messungen durchgeführt, z.B. von Michelson und Morley ab 1881. Die Resultate zeigten jedoch keine messbare Richtungsabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit. Zum Beispiel ist die Geschwindigkeit des Lichts von einem Stern unabhängig davon, ob sich die Erde auf den Stern zu- oder wegbewegt. In einer 1905 veröffentlichten Arbeit beschrieb Albert Einstein die Konsequenzen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Sie sind Gegenstand der "speziellen Relativitätstheorie" und weicht in einigen Punkten ab von der Galilei'schen Theorie. Insbesondere die folgenden Grundvoraussetzungen

der Galilei'schen Theorie gelten nur noch im Grenzfall niedriger Geschwindigkeiten:

- Die Zeit ist absolut und unveränderlich und hängt nicht von der Bewegung und dem Ort ab.
- Es gibt einen "absoluten Raum", d.h. ein absolut ruhendes System, in dem alle Bewegungsabläufe stattfinden.
- Die Eigenschaft "Masse" eines Körpers geht nie verloren oder entsteht aus dem Nichts. Masse ist unabhängig vom Bewegungszustand und bleibt erhalten.

Die Grundannahme der speziellen Relativitätstheorie ist, dass die Lichtgeschwindigkeit

$$c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

in allen möglichen Bezugssystemen konstant ist. Im Rahmen der Galilei'schen Relativitätstheorie ist dies nicht möglich.

2.11.12 Die Lorentz-Transformation

Um diese Grundannahmen Einsteins erfüllen zu können, müssen die Transformationsgleichungen zwischen den Koordinatensystemen modifiziert werden. Die entsprechenden Gleichungen wurden von Woldemar Voigt (1887), Hendrik Antoon Lorentz (1895, 1899, 1904), Joseph Larmor (1897, 1900) und Henri Poincaré (1905) hergeleitet und werden seit Poincaré als Lorentz-Transformation bezeichnet. Für eine Relativgeschwindigkeit v in x -Richtung lauten die entsprechenden Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Hier stellen x', y', z', t' die Koordinaten im bewegten System dar,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

den Lorentz-Faktor und

$$\beta = \frac{v}{c}$$

ist das Verhältnis zwischen der Relativgeschwindigkeit v und der Lichtgeschwindigkeit c . Für $v \ll c$, d.h. $\beta \ll 1$ und $\gamma \rightarrow 1$ geht die Lorentz-Transformation in die Galilei-Transformation über.

Die spezielle Relativitätstheorie kann im Wesentlichen folgende Effekte erklären:

Lorentzkontraktion: In zwei gegeneinander bewegten Bezugssystemen erscheinen⁴ die im jeweils anderen System ruhenden Maßstäbe verkürzt.

Zeitdilatation: In zwei gegeneinander bewegten Bezugssystemen erscheint die Zeit des jeweils anderen Systems verlangsamt.

Relativistischer Dopplereffekt: Das Licht von Sternen, die sich von uns entfernen, erscheint rotverschoben.

Relativistische Massenzunahme: Die Lichtgeschwindigkeit kann von Körpern mit Masse nicht erreicht werden. Bei gleicher Kraft ist die Beschleunigung um so kleiner, je größer die Geschwindigkeit ist. Dies kann als Zunahme der Masse gedeutet werden: $m = m_0\gamma$.

Myonenzerfall: Myonen sind Elementarteilchen ähnlich den Elektronen, aber sie sind schwerer und nicht stabil. Ihre mittlere Lebensdauer liegt bei 2,2 μs . Myonen entstehen in ca. 20 km Höhe durch den Zerfall von Pionen, die wiederum durch den Eintritt der kosmischen Strahlung (hauptsächlich Protonen) in die Atmosphäre entstehen. In 2,2 μs legen Teilchen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, eine Distanz von 660 m zurück. Sie sollten somit niemals die Erdoberfläche erreichen. Trotzdem werden sie am Erdboden in großer Zahl nachgewiesen. Der Grund dafür ist, dass die Lebensdauer der Myonen sich aufgrund der Zeitdilatation um einen Faktor γ vergrößert. In einem Bezugssystem, welches sich mit den Myonen bewegt, ist die Zerfallszeit 2,2 μs , aber die Strecke zum Erdboden ist Lorentzkontrahiert.

⁴"erscheint" ist hier nicht im Sinn einer Täuschung gemeint, sondern es handelt sich um messbare Tatsachen.

Zwillingsparadoxon: Ein Zwilling begibt sich auf einen Raumflug, der andere bleibt auf der Erde. Man kann nachrechnen, dass der Raumfahrer bei seiner Rückkehr weniger gealtert ist als der andere Zwilling. Dies wurde 1971 mit Atomuhren bestätigt, die auf Linienflugzeugen mitgenommen wurden.

Die 1916 von Einstein vorgestellte "allgemeine Relativitätstheorie" ist eine Beschreibung der Gravitation als Raumkrümmung in der Umgebung von Massen und beruht auf der Äquivalenz von schwerer und träger Masse.

2.12 Hydrostatik

2.12.1 Aggregatzustände

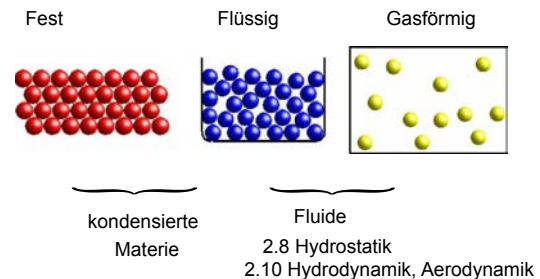


Abbildung 2.150: Die drei wichtigsten Aggregatzustände.

Die drei wichtigsten Aggregatzustände sind Festkörper, Flüssigkeiten und Gase (→ Abb. 2.150). Die wesentlichsten Unterscheidungsmerkmale sind, dass Festkörper eine Gestalt haben; diese kann unter dem Einfluss einer äußeren Kraft ändern, so lange diese Kraft nicht zu groß wird kehrt der Körper jedoch nach Nachlassen der äußeren Kraft in die ursprüngliche Form zurück; man nennt dies Formgedächtnis. Eine Flüssigkeit besitzt keine bestimmte Form, sie nimmt jedoch ein definiertes Volumen ein. Unter dem Einfluss einer äußeren Kraft kann dieses Volumen kleiner werden; nach Entfernen der Kraft dehnt sich die Flüssigkeit wieder aus bis sie das ursprüngliche Volumen wieder einnimmt. Man bezeichnet dies als Volumengedächtnis. Ein Gas füllt im Gegensatz dazu immer das gesamte verfügbare Volumen.

Man fasst Festkörper und Flüssigkeiten unter dem Begriff "kondensierte Materie" zusammen; Flüssigkeiten und Gase werden unter dem Begriff "Fluide" zusammengefasst.

Diese Eigenschaften sind jedoch nicht absolut scharf: Auch Eis, oder sogar Steine, die üblicherweise als Festkörper bezeichnet werden, haben die Tendenz, unter hohem Druck und über lange Zeiten zu fließen. Außerdem gibt es eine Reihe von Substanzen, die sich nur schlecht in dieses Schema einordnen lassen: Granulare Medien (z.B. Zucker, Sand) bestehen aus vielen festen Körpern, aber als gesamte Medien zeigen sie typisches Fließverhalten. Gläser sind unterkühlte Flüssigkeiten, die sich für viele

Belange wie Festkörper verhalten.

2.12.2 Spannung

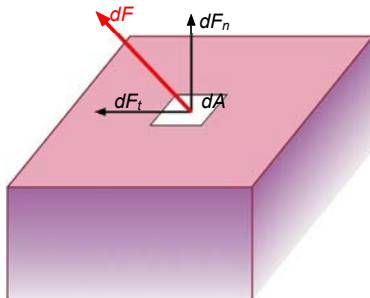


Abbildung 2.151: Spannung als Quotient aus Kraft und Fläche; Zerlegung in Normal- und Schubspannung.

Spannung ist definiert als Kraft pro Fläche,

$$S = \frac{dF}{dA} \quad [S] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} = \text{Pascal.}$$

Wie in Abb. 2.151 gezeigt, kann eine allgemeine Spannung zerlegt werden in eine Normalspannung σ und eine Tangential- (Schub-) Spannung τ :

$$\vec{S} = S_{\perp} + S_{\parallel} = \sigma + \tau = \frac{dF_n}{dA} + \frac{dF_t}{dA}.$$

Die Normalspannung wirkt senkrecht zur Fläche, die Schubspannung parallel dazu. Liegt z.B. ein Körper mit einer Fläche A auf einer horizontalen Unterlage, so wirkt die Normalspannung

$$S_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{mg}{A}.$$

Mit Hilfe dieser Klassifizierung kann man den Unterschied zwischen Fluiden und Festkörpern so formulieren: Bei Fluiden verschwindet der Schermodul, es treten also (im statischen Grenzfall) keine Scherspannungen auf.

2.12.3 Flüssigkeitsoberfläche

Die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit ist immer senkrecht zu der Richtung der auf sie wirkenden Kraft, wie in Abb. 2.152 gezeigt. Würde sich

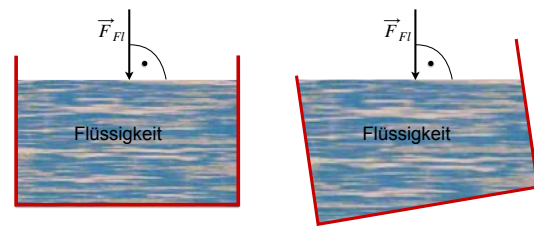


Abbildung 2.152: Die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit ist immer senkrecht zu der Richtung der auf sie wirkenden Kraft.

ein Flüssigkeitshügel bilden, dann hätte er eine höhere potentielle Energie als seine Umgebung. Um sie zu minimieren, versuchen alle Flüssigkeitsvolumina die tiefst-möglichen Positionen einzunehmen. Dies ist erfüllt, wenn die Oberfläche eine horizontale Ebene bildet. Bei Festkörpern wird dieses „Zerfließen“ durch Reibung oder innere Kräfte verhindert.

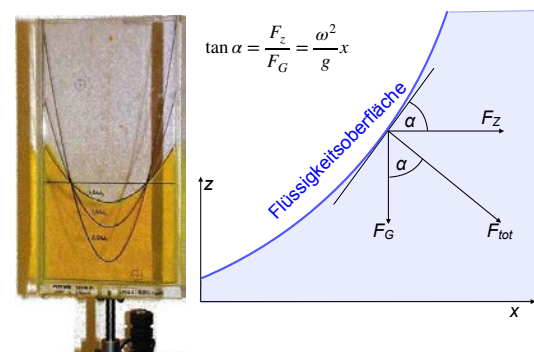


Abbildung 2.153: Flüssigkeitsoberfläche in einer rotierenden Kuvette.

Dies kann auch zur Messung der Kraft verwendet werden. Abb. 2.153 zeigt als Beispiel die Flüssigkeitsoberfläche in einer rotierenden Kuvette. Für die Berechnung der Oberfläche verwendet man die Bedingung, dass die resultierende Kraft auf ein Flüssigkeitselement immer senkrecht zur Oberfläche steht. Die Kraft auf ein Volumenelement ist gegeben durch die Vektorsumme aus Schwerkraft

$$F_G = mg$$

und Zentrifugalkraft

$$F_Z = mx\omega^2.$$

Die Zentrifugalkraft wirkt in radialer Richtung (x im Koordinatensystem) und die Schwerkraft in vertikaler Richtung. Damit bildet die resultierende Kraft mit der Vertikalen einen Winkel α , gegeben durch

$$\tan \alpha = \frac{F_z}{F_G} = \frac{\omega^2}{g} x.$$

Die Steigung nimmt somit mit dem Abstand x von der Drehachse zu und die Oberfläche selber folgt der Funktion

$$h(x) = \int_0^x \tan \alpha dx = \int_0^x \frac{\omega^2}{g} x dx = \frac{\omega^2}{2g} x^2,$$

also einer Parabel.

2.12.4 Hydrostatischer Druck

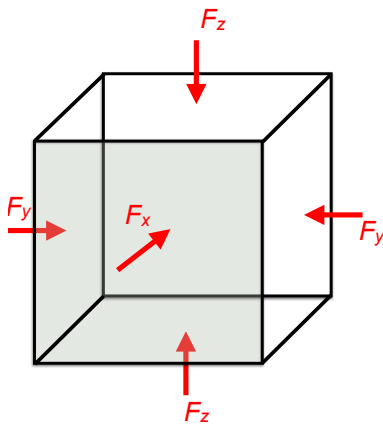


Abbildung 2.154: Hydrostatischer Druck.

Man spricht von hydrostatischem Druck, wenn die Normalspannung aus allen Raumrichtungen gleich ist und die Scherspannung verschwindet. Wie in Abb. 2.154 gezeigt sind dann die Kräfte auf die Seiten eines infinitesimalen Würfels alle gleich groß, $F_x = F_y = F_z$. Man verwendet dann anstelle von Spannungen die skalare Größe Druck und verwendet das Symbol p . Spannungen allgemein und damit auch der Druck werden im SI System in der Einheit Pascal = N/m² gemessen. Normaldruck, d.h. der mittlere Luftdruck auf Meereshöhe, (1 atm) entspricht ca. 10⁵ N/m². Nach DIN ist der Normaldruck 101325 Pa (=760 mm Hg), ebenso in der Medizin, nach IUPAC 100000 Pa.

Ist die vertikale Ausdehnung eines Systems von Rohren klein, so herrscht innerhalb im Gleichgewicht überall derselbe Druck. Dies kann man u.A. für die Übertragung und Umwandlung von Kräften verwenden.

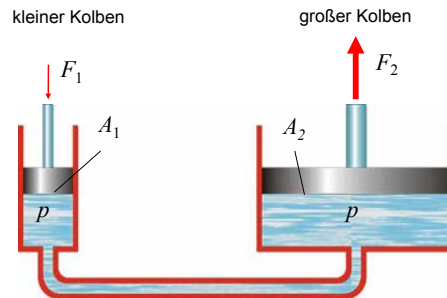


Abbildung 2.155: Hydraulische Presse.

Damit gilt für die beiden Kolben in Abb. 2.155

$$\frac{F_1}{A_1} = p = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}.$$

Somit lassen sich auch kleine Kräfte F_1 in sehr große Kräfte F_2 umwandeln, sofern das Flächenverhältnis A_2/A_1 entsprechend gewählt wird. Die Wege, die dabei zurückgelegt werden, verhalten sich genau entgegengesetzt.

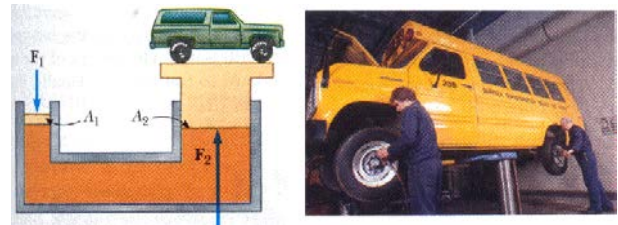


Abbildung 2.156: Hydraulischer Lift.

Auf diese Weise werden z.B. mit hydraulischen Pressen große Kräfte erzeugt (→ Abb. 2.156).

2.12.5 Schweredruck

Bei tiefen Flüssigkeiten und Gasen tritt ein Schweredruck auf: zusätzlich zum Außendruck wirkt an jeder Stelle die Gewichtskraft der darüber liegenden Flüssigkeit. Die Gewichtskraft einer Flüssigkeitssäule mit Querschnittsfläche A , Dichte ρ und

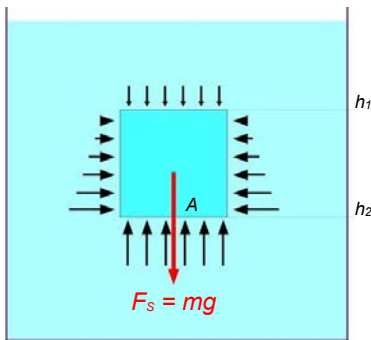


Abbildung 2.157: Berechnung des Schweredrucks.

Höhe $h = h_1 - h_2$ (\rightarrow Abb. 2.157) beträgt

$$F_S = mg = V \rho g = A h \rho g.$$

Wenn sich das in Abb. 2.157 markierte Volumenelement im Gleichgewicht befindet, muss diese Gewichtskraft F_S durch eine entsprechende Kraft kompensiert werden, welche auf die Unterseite des Volumenelements wirkt, zusätzlich zur Kraft, welche diejenige auf die Oberseite kompensiert. Der Druckunterschied zwischen oben und unten muss somit

$$p_S = \frac{F_S}{A} = h \rho g$$

sein. Dieser Druckbeitrag wird als Schweredruck bezeichnet.

Der gesamte hydrostatische Druck $p(z)$ ist demnach

$$p(z) = p_a + z \rho g, \tag{2.19}$$

wobei p_a den Außendruck an der Oberfläche darstellt und z die Distanz zur Oberfläche. Der Druck ist somit nur abhängig von der Dichte der Flüssigkeit und von der Höhe der Flüssigkeitssäule. Für den Fall von Wasser gilt

$$\begin{aligned} \rho_w g &= 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}^2} \\ &= 0,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \approx 0,1 \frac{\text{atm}}{\text{m}}, \end{aligned}$$

d.h. der Druck nimmt pro 10 m Tiefe um 1 atm ($\approx 10^5 \text{ N/m}^2$) zu. Innerhalb des Systems ist der Druck

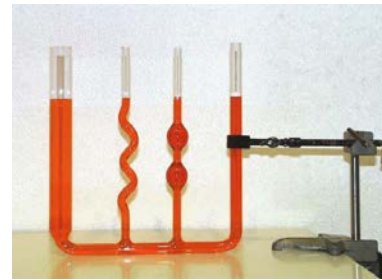


Abbildung 2.158: Kommunizierende Röhren.

nur von der Höhe abhängig, nicht vom (horizontalen) Ort. Dieses Prinzip gilt für alle unbewegten Fluide.

Eine Konsequenz davon ist, dass die Flüssigkeit in einem System von verbundenen (=“kommunizierenden”) Röhren überall bis zur gleichen Höhe aufsteigt, unabhängig vom Querschnitt und Form der Röhre. Abb. 2.158 zeigt dies für ein System von verbundenen Glasgefäßen.

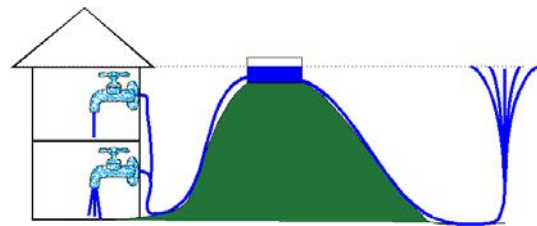


Abbildung 2.159: Druckverteilung im Wasserrohrnetz.

Die gleichmäßige Verteilung des Drucks in einem System von Röhren wird verwendet, um den Wasserdruck in der städtischen Wasserversorgung sicherzustellen: Wie in Abb. 2.159 gezeigt, muss das Reservoir mindestens so hoch liegen wie das höchste Haus. Eine Erweiterung dieses Prinzip ist, dass man - in einer gewissen Näherung - die Röhre auch weglassen darf: Eine Fontäne erreicht die Höhe des Wasserspiegels im Reservoir.

Es ist jedoch auch möglich, einen Springbrunnen zu bauen, dessen Fontäne höher steigt als die Wasseroberfläche des Reservoirs. Wie in Abb. 2.160 gezeigt, wird dafür auf einem Teil der Strecke der Druck nicht durch Wasser übertragen, sondern durch Luft. Der Schweredruck der Luft ist fast tausendmal geringer als derjenige des Wassers und kann deshalb

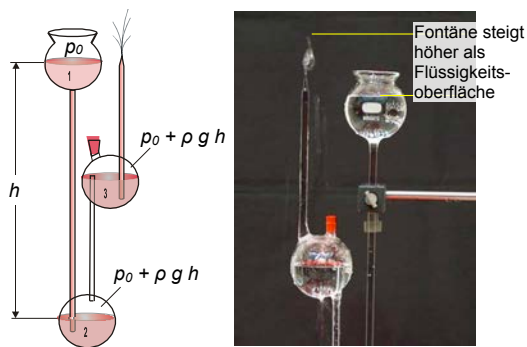


Abbildung 2.160: Hero's Springbrunnen.

praktisch vernachlässigt werden. Dadurch steigt die Fontäne entsprechend höher. Das Prinzip wurde von Heron von Alexandria (wahrscheinlich 1. Jh. nach Chr.).

2.12.6 Hydrostatischer Druck in Gasen

Im Falle von Gasen ist die Dichte abhängig vom Druck. Die Druckzunahme ist deshalb nicht mehr proportional zur Höhe der Gas-Säule. Für die Berechnung der Höhenabhängigkeit des Druckes in der Atmosphäre betrachtet man zunächst eine Schicht, welche so dünn ist, dass die Dichte noch als konstant betrachtet werden kann. Die Druckänderung durch diese Schicht ist dann wie bei einer Flüssigkeit

$$dp = -\rho g dh,$$

wobei h nach oben zunimmt und somit der Druck abnimmt. Für ein ideales Gas gilt bei konstanter Temperatur:

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \text{ (Boyle – Mariotte Gesetz),}$$

mit p_0 als Referenzdruck und ρ_0 als Referenzdichte. Damit wird

$$dp = -\rho_0 \frac{p}{p_0} g dh.$$

Trennung der Variablen und Integration ergibt

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int_0^h dh = \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} gh$$

oder

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0} gh\right),$$

d.h. der Druck nimmt mit zunehmender Höhe exponentiell ab.

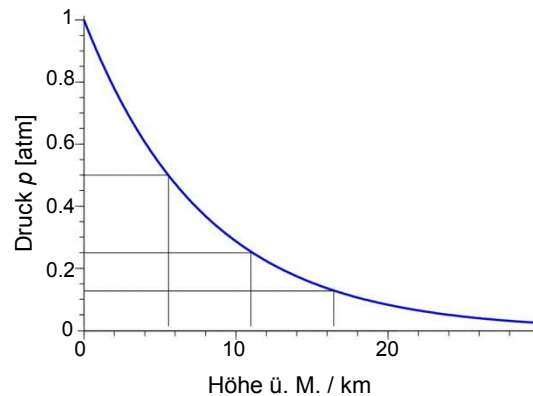


Abbildung 2.161: Atmosphärischer Druck als Funktion der Höhe.

Numerische Werte für diese Parameter sind für Normalatmosphäre ($T = 0^\circ\text{C}$, $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$) $\rho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$. Damit hat das Produkt $\rho_0 g / p_0$ den numerischen Wert $1,254 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ oder

$$p = p_0 e^{-h/8\text{km}}.$$

Interessant dabei ist, dass die Druckabnahme mit der Höhe rein aus Messungen an der Erdoberfläche berechnet werden kann. Abb. 2.161 zeigt den Druck als Funktion der Höhe. Er fällt pro 8 km Höhe auf $1/e$ oder pro 5,5 km auf die Hälfte ab. In Wirklichkeit variieren sowohl die Temperatur wie auch die Zusammensetzung der Erdatmosphäre mit der Höhe. Die obige Formel gibt aber eine gute Näherung für das tatsächliche Verhalten.

2.12.7 Das Prinzip von Archimedes

Ein Effekt des Schweredruckes ist, dass das scheinbare Gewicht eines Körpers in einer Flüssigkeit geringer ist als im Vakuum. Dies wird als Auftrieb bezeichnet. Typische Anwendungen davon sind Schiffe oder andere Körper, welche auf dem Wasser schwimmen.

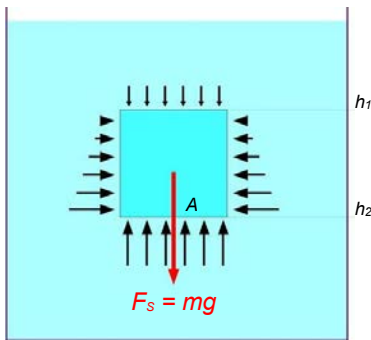


Abbildung 2.162: Auftrieb: der Druck auf die untere Fläche ist größer als auf die obere Fläche.

Dieser Effekt lässt sich relativ leicht am Beispiel eines Kubus in einer Flüssigkeit berechnen (→ Abb. 2.162). Der Druck auf die beiden Seitenflächen ist der gleiche; in horizontaler Richtung heben sich die Druckkräfte somit auf. Der Druck auf den Boden ist aber aufgrund des Schweredruckes größer als auf die obere Fläche. Damit erhält man eine resultierende Druckkraft auf den Körper, die nach oben wirkt. Die resultierende Kraft kann direkt aus der Druckdifferenz berechnet werden, welche durch den Schweredruck (2.19) erzeugt wird:

$$\begin{aligned}
 F_A &= F_2 - F_1 = A(p_2 - p_1) \\
 &= A\rho_{f1}g(h_2 - h_1) = \rho_{f1}gV \\
 &= m_{\text{verdrängt}}g = F_{G,\text{verdrängt}} \cdot
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$



Abbildung 2.163: Archimedes von Syrakus (287 - 212 v. Chr.).

Gleichung (2.20) beschreibt das Prinzip von Archi-

medes:

Die Auftriebskraft entspricht der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.

Dieses Resultat wurde hier für einen Kubus hergeleitet. Das Resultat ist aber allgemein gültig, unabhängig von der Form des Körpers. Dieses Gesetz wurde zuerst von Archimedes (→ Abb. 2.163) formuliert und wird deshalb als Prinzip von Archimedes bezeichnet. Es ist eines der ältesten immer noch gültigen physikalischen Gesetze.

2.12.8 Auftriebsmessungen

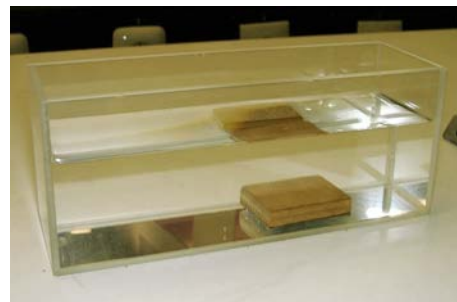


Abbildung 2.164: Der Holzblock klebt am Boden des Wassertanks.

Man kann die Kraft auf die Unterseite eliminieren, indem man den Körper so auf dem Boden drückt, dass keine Flüssigkeit darunter bleibt. Abb. 2.164 zeigt einen Holzblock, der am Boden des mit Wasser gefüllten Glasgefäßes klebt. Weil unter dem Körper kein Wasser ist, wirkt dort kein hydrostatischer Druck, der Körper erfährt keinen Auftrieb. Erst nach einer gewissen Zeit gelangt Wasser wieder darunter und erzeugt Auftrieb.

Der Auftrieb reduziert das Gewicht des schwimmenden Körpers. Dabei steigt jedoch der Flüssigkeitsspiegel und damit der Schweredruck, der auf den Boden des Gefäßes wirkt. Die Gewichtskraft des schwimmenden Körpers wird somit auf den Boden des Gefäßes übertragen. Dies kann man z.B. mit der Wasserglaswippe nachweisen: Hier werden 2 teilweise mit Wasser gefüllte Bechergläser auf einer Waage im Gleichgewicht gehalten. Taucht man einen Finger in

eines der Bechergläser, so steigt dessen Wasseroberfläche und es wird schwerer als das auf der Gegenseite.

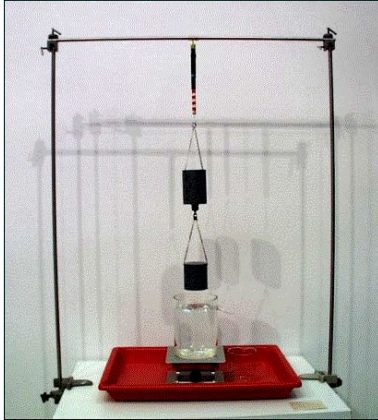


Abbildung 2.165: Messung des Auftriebs.

Der Auftrieb kann experimentell gemessen werden, indem man die Reduktion der Gewichtskraft misst, wenn der Körper in eine Flüssigkeit eingetaucht wird (→ Abb. 2.165). Die verdrängte Flüssigkeitsmenge wird dadurch gemessen, dass sie in einem Becherglas aufgefangen wird. Wird sie anschließend in den oberen Behälter gegossen, welcher am gleichen Federkraftmesser hängt wie der Aluminiumblock, so misst man wieder die gleiche Kraft wie ohne die Wirkung des Auftriebs.

Eine Messung des Auftriebs kann auch dazu verwendet werden, um die Dichte eines Körpers zu bestimmen. Misst man sein Gewicht ohne Auftrieb, so ist es gegeben durch

$$F_G = mg = g\rho V.$$

Misst man das Gewicht mit Auftrieb in einer Flüssigkeit der Dichte ρ_{Fl} , so erhält man

$$F_{G,A} = g(\rho - \rho_{Fl})V.$$

Das Verhältnis ist

$$\frac{F_{G,A}}{F_G} = \frac{\rho - \rho_{Fl}}{\rho}.$$

Somit ist die Dichte des Körpers

$$\rho = \frac{\rho_{Fl}}{1 - F_{G,A}/F_G}.$$

Der Legende nach nutzte Archimedes dies, um die Dichte des Metalls in der Krone von König Hieron II von Syrakus zu bestimmen. Beispiel: Das Gewicht betrage in Luft 13,5 N und in Wasser 12,214 N. Dies ergibt

$$\rho = \frac{1000}{1 - 12,214/13,5} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 10498 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Dies passt gut zur Dichte von Silber ($\rho = 10,49 \text{ g/cm}^3$).

Ein wichtiges Beispiel ist Eis in Wasser. Die Dichte von Eis liegt bei etwa $0,92 \text{ g/cm}^3$. Deshalb schwimmt es auf dem Wasser, wobei rund 92% des Volumens eines Eisblocks unter Wasser sind.

Im Fall der cartesischen Taucher kann man die Dichte der Körper über den Druck steuern: Sie enthalten Luftkammern, welche bei entsprechendem Druck komprimiert werden. Durch die Verkleinerung des Volumens steigt die Dichte und die Taucher sinken ab.

2.12.9 Auftrieb in Luft



Abbildung 2.166: Ballonflug.

Nicht nur in Flüssigkeiten, sondern auch in Luft und anderen Gasen existiert dieser Auftrieb. Dies ist z.B. die Grundlage für den Ballonflug (→ Abb. 2.166), kann aber auch anhand eines einfachen Laborexperimentes nachgewiesen werden.

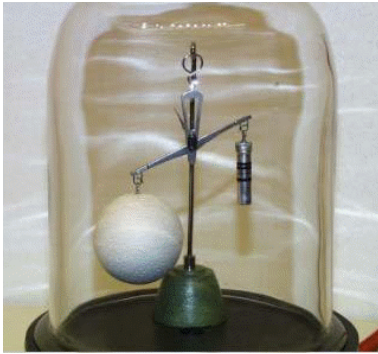


Abbildung 2.167: Auftriebswaage.

Man kann den Effekt u.a. nachweisen, indem man die Luft entfernt (siehe Abb. 2.167). Im Experiment wird der Auftrieb für 2 Körper gemessen, welche in der Atmosphäre gleich schwer sind. Der eine davon besteht aus Blei, der andere aus Styropor.

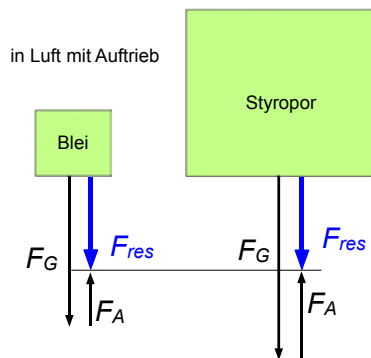


Abbildung 2.168: Gleichgewicht in Luft.

In Luft sind die beiden Körper im Gleichgewicht. Wie in Abb. 2.168 gezeigt, ist die Summe F_{res} aus Schwerkraft F_G und Auftrieb F_A ist für beide gleich. Wird die Luft abgepumpt, so verschwindet der Auftrieb. Da dieser für den größeren Körper erheblich größer ist, als für den kleinen Körper sinkt er ab.

Der Auftrieb für den eingetauchten Körper bedeutet umgekehrt, dass das Gefäß, welches die Flüssigkeit enthält, entsprechend schwerer wird. Man kann dies dadurch verstehen, dass die Flüssigkeitssäule, welche auf den Boden des Gefäßes drückt, entsprechend dem verdrängten Volumen höher geworden ist.

2.12.10 Kompressibilität

Unter dem Einfluss des Druckes ändert jedes reale Medium sein Volumen um ΔV . In linearer Näherung ist die Volumenänderung proportional zum Volumen V und zur Druckänderung Δp :

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \Delta p = \frac{\Delta p}{K}, \quad [\kappa] = \text{m}^2 \text{N}^{-1},$$

wobei die Proportionalitätskonstante κ als Kompressibilität bezeichnet wird. Sie ist das Inverse des Kompressionsmoduls K .

Die Dichte eines Mediums ist definiert als Masse pro Volumen; da das Volumen mit zunehmendem Druck abnimmt, steigt somit die Dichte an. Für infinitesimale Änderungen gilt

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V} = \kappa \Delta p.$$

Diese Gleichungen gelten sowohl für Flüssigkeiten wie auch für Gase; bei Flüssigkeiten ist die Kompressibilität jedoch sehr viel geringer als bei Gasen. Typische Werte für die Kompressibilität von Flüssigkeiten sind rund zwei Größenordnungen höher als bei Festkörpern. Einige Beispiele sind (bei 20 °C, 1 atm):

Flüssigkeit	κ
Quecksilber	$0,4 \cdot 10^{-10} \text{m}^2/\text{N}$
Wasser	$5 \cdot 10^{-10} \text{m}^2/\text{N}$
Benzol	$10 \cdot 10^{-10} \text{m}^2/\text{N}$
Äthanol	$10 \cdot 10^{-10} \text{m}^2/\text{N}$

Für ein ideales Gas ist die Kompressibilität $\kappa_{ig} = 1/p$, bei Normaldruck also $10^{-5} \text{m}^2/\text{N}$ und damit um rund 4 Größenordnungen über dem entsprechenden Wert für eine typische Flüssigkeit. Die Größenordnung der Kompressibilität ist somit, neben der Dichte, das wesentliche Kriterium, welches Flüssigkeiten von Gasen unterscheidet.

Man kann damit z.B. die Kompression von Wasser in einer Tiefe von 4000 m (=mittlere Meerestiefe) ausrechnen. Hier beträgt der Druck $4 \cdot 10^7 \text{N/m}^2$ und die entsprechende Volumenänderung etwa

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa p = -5 \cdot 10^{-10} \cdot 4 \cdot 10^7 = -0,02 = -2\%.$$

Eine Volumenänderung wird auch durch eine Temperaturänderung erzeugt:

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T \quad [\gamma] = \frac{1}{K}.$$

Die Proportionalitätskonstante wird als Volumenausdehnungskoeffizient bezeichnet. Wie bei der Kompressibilität ist der Volumenausdehnungskoeffizient für Flüssigkeiten sehr viel kleiner als für Gase. Für ideale Gase ist $\gamma = 1/T$ ($\sim 1/300\text{K}$ bei Raumtemperatur).

2.13 Grenzflächeneffekte

2.13.1 Oberflächenspannung

An Grenzflächen treten besondere Effekte auf, welche im Volumen nicht beobachtbar sind. Die molekulare Grundlage dafür sind Kohäsionskräfte, d.h. Kräfte zwischen gleichartigen Atomen / Molekülen. In den meisten Flüssigkeiten dominieren dabei van der Waals Kräfte. Sie erniedrigen die Energie des Moleküls gegenüber einem Molekül im Vakuum und sind damit die Ursache dafür, dass sich Flüssigkeiten überhaupt bilden. Eng verwandt damit sind Adhäsionskräfte: diese wirken zwischen Molekülen verschiedener Stoffe, also z.B. zwischen einem Molekül in der Flüssigkeit und einer festen Oberfläche.

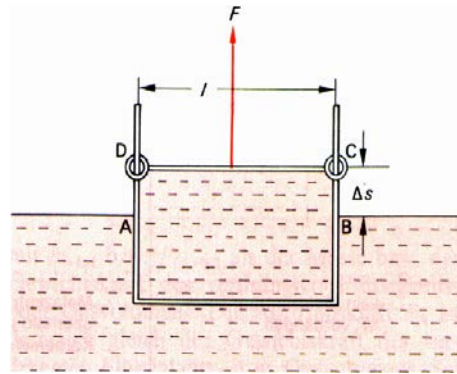


Abbildung 2.169: Berechnung der Oberflächenspannung.

Befindet sich ein Molekül an der Oberfläche einer Flüssigkeit so ist es weniger Kohäsionskräften ausgesetzt und seine Energie ist höher als im Innern der Flüssigkeit. Auf solche Moleküle wirkt deshalb eine Kraft $\vec{F}_{\text{resultierend}}$ nach innen. Mit einer Oberfläche ist deshalb eine potenzielle Energie verbunden, die "Oberflächenenergie". Diese ist in guter Näherung proportional zur Oberfläche. Somit erhält man eine universelle Beschreibung, wenn man die spezifische Oberflächenenergie, also den Quotienten aus Energie und Oberfläche betrachtet:

$$\sigma_A = \frac{dW}{dA} = \frac{F}{b} \quad [\sigma_A] = \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Diese Größe wird auch als Oberflächenspannung bezeichnet. Die Energie dW muss dem System als Arbeit zugeführt werden, um die Oberfläche um dA zu

vergrößern (\rightarrow Abb. 2.169). Im Gegensatz zu Spannungen im Volumen handelt es sich hier aber um eine Kraft pro Längeneinheit. Dies ist mit einem Blick auf Abb. 2.169 auch nachvollziehbar: je länger der Bügel, desto mehr Kraft muss aufgewendet werden.

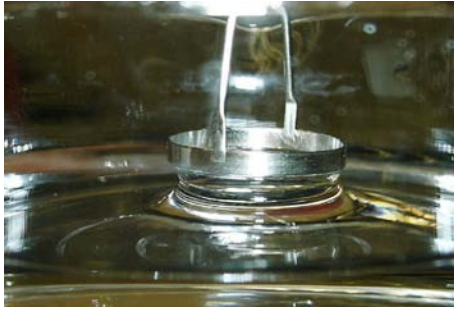


Abbildung 2.170: Messung der Oberflächenspannung.

Die Grenzflächenspannung kann gemessen werden, indem man an einem Bügel zieht, an den eine Lamelle anschließt. Wie in Abb. 2.170 gezeigt, wird dabei die Oberfläche der Lamelle vergrößert, wobei der Oberflächenzuwachs auf beiden Seiten der Lamelle erfolgt. Bei einem Radius r des Kreises wird die Oberfläche der Lamelle um den Betrag

$$\Delta A = 2 \Delta h \ell = 2 \Delta h 2\pi r$$

vergrößert, wobei $\ell = 2\pi r$ den Umfang des Bügels darstellt und Δh die Höhenänderung. Der Faktor 2 berücksichtigt, dass die Flüssigkeitslamelle zwei Oberflächen besitzt. Die Kraft, welche für die Vergrößerung der Oberfläche benötigt wird, lässt sich berechnen aus der Änderung der Oberflächenenergie W_S pro Weegelement Δh :

$$F = \frac{W_S}{\Delta h} = \sigma_A \frac{\Delta A}{\Delta h} = 4\pi r \sigma_A.$$

Im Experiment hat der Ring einen Radius von 1 cm. Man misst eine Kraft von ca. 10 mN, was einer Oberflächenspannung von

$$\sigma_A = \frac{F}{4\pi r} = \frac{0,01 \text{ N}}{4\pi \cdot 0,01 \text{ m}} = 0,08 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

entspricht, in guter Übereinstimmung mit dem Literaturwert von 0.072 N/m (Wasser bei 20 °C).



Abbildung 2.171: Wasserläufer.

Die Oberflächenspannung wird häufig von kleinen Tieren wie z.B. Wasserläufern durchgeführt (\rightarrow Abb. 2.171): Sie können auf dem Wasser gehen, weil Ihre Körpergewichte so klein ist, dass die Kraft auf die Wasseroberfläche kleiner ist als die Kraft, welche benötigt würde, um ein Loch in der Wasseroberfläche zu drücken und damit die Oberfläche zu vergrößern.

Oberflächenspannungen kann es sowohl zwischen festen Körpern und Gasen wie zwischen Flüssigkeiten und Gasen oder zwischen zwei Flüssigkeiten geben.

Am größten sind die Oberflächenspannungen bei Metallen. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die Metallatome eine sehr starke Wechselwirkung untereinander besitzen. Wasser besitzt im Vergleich mit anderen Flüssigkeiten ebenfalls eine relativ hohe Oberflächenspannung. Dies ist ein Hinweis auf die relativ starken intermolekularen Kräfte in Wasser, welche auch für den relativ hohen Siedepunkt (im Vergleich zu gleich schweren Molekülen) verantwortlich sind.

2.13.2 Minimalflächen

Im Gleichgewicht besitzt ein System die niedrigste mögliche Energie. Dazu gehört offenbar, dass die Oberflächen möglichst klein sind. Oberflächen sind deshalb Minimalflächen.

In Abb. 2.172 wird dies anhand von Einzelbildern beim Abfallen eines Wassertropfens gezeigt: Zunächst findet man ein Gleichgewicht von Oberflächenspannung und Schwerkraft; erst wenn die Flüssigkeitsmenge groß genug wird überwiegt die

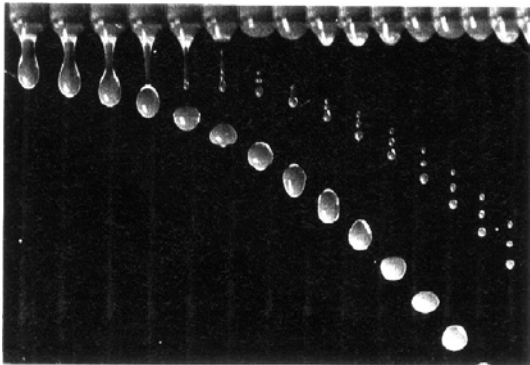


Abbildung 2.172: Entstehung eines Wassertropfens.

Schwerkraft und der Tropfen reißt ab. Der Tropfen nimmt darauf Kugelform (eine Minimalfläche) an, wobei transiente Schwingungen um die Gleichgewichtsform beobachtet werden können.

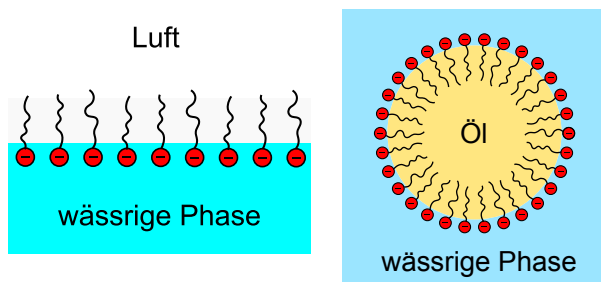


Abbildung 2.173: Tenside an unterschiedlichen Grenzflächen.

Die Oberflächenspannung kann durch Zusatzstoffe stark variiert werden. Die geschieht z.B. durch sogenannte Tenside. Das sind Moleküle, die sich an der Grenzfläche einordnen und sowohl mit der wässrigen, wie auch mit der anderen Phase (Luft oder Öl) eine anziehende Wechselwirkung haben, wie in Abb. 2.173 gezeigt. Solche Moleküle werden z.B. in Waschmitteln verwendet, und sie spielen in vielen biologischen Systemen eine wichtige Rolle, z.B. in der Lunge, wo sie eine wesentlich effizientere Atmung ermöglichen. Im Experiment nehmen Äthermoleküle in Wasser diese Funktion. Sie reduzieren die Oberflächenspannung. Dadurch werden beim Abtropfen aus einem Glasrohr kleinere Tropfen erzeugt, was z.B. über die Zunahme der Tropffrequenz gemessen werden kann.

Minimalflächen kann man z.B. erzeugen, indem

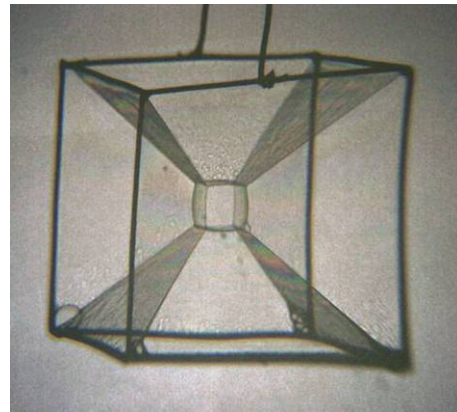


Abbildung 2.174: Minimalfläche in einem Würfel.

man Seifenlamellen aufspannt. Je nach Randbedingung (Drähte) erzeugen die Seifenlamellen diejenigen Oberflächen, welche die Größe der Lamelle minimieren. Abb. 2.174 zeigt ein Beispiel.

2.13.3 Seifenblasen

Ein Beispiel wo keine Drähte benötigt werden, ist die Seifenblase. Hier ist das Volumen durch die eingeschlossene Gasmenge vorgegeben. Die Minimalfläche bei gegebenem Volumen ist eine Kugel. Durch die Seife wird die Oberflächenspannung reduziert auf 30 mN/m. Wir untersuchen folgende Fragen:

- Wie hoch ist der Druck im Innern der Seifenblase im Vergleich zum Außendruck?
- Was passiert, wenn eine große und eine kleine Seifenblase zusammenkommen?

Wir berechnen zunächst die Arbeit, welche benötigt wird, um den Radius der Kugel von r auf $r + dr$ zu vergrößern. Die Kraft ist gegeben durch das Produkt aus Druckdifferenz p und Oberfläche A . Der zurückgelegte Weg ist gegeben durch die Änderung dr des Radius. Damit wird die Arbeit

$$dW = F dr = pA dr = p4\pi r^2 dr,$$

Diese Arbeit wird benötigt, um die Oberflächenenergie zu vergrößern,

$$\begin{aligned} dW &= \sigma dA = \sigma[4\pi(r + dr)^2 - 4\pi r^2] \\ &= \sigma[4\pi r^2 + 8\pi r dr - 4\pi r^2] = \sigma 8\pi r dr, \end{aligned}$$

wobei wie üblich der Term $\propto dr^2$ (quadratisch in einer infinitesimalen Größe) weggelassen wurde. Gleichsetzen der beiden Terme ergibt

$$p4\pi r^2 dr = \sigma 8\pi r dr \rightarrow p = 2\frac{\sigma}{r}. \quad (2.21)$$

Für eine Seifenblase mit einem Radius von $r = 1.8$ cm erhält man z.B. einen Überdruck von $p = 3.33$ N/m².

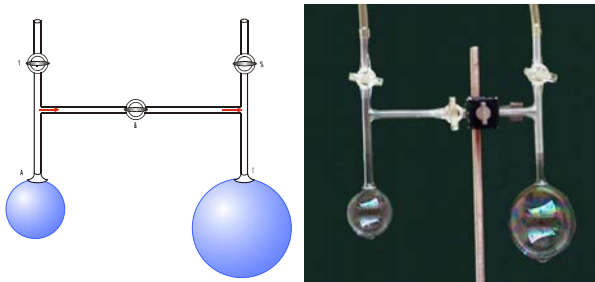


Abbildung 2.175: Druckausgleich zwischen 2 Seifenblasen.

Der Druck ist indirekt proportional zum Radius, d.h. in größeren Seifenblasen ist der Druck kleiner. Werden zwei Seifenblasen durch ein Rohr so verbunden (\rightarrow Abb. 2.175), dass Gas aus der einen in die andere fließen kann, so pumpt die kleinere die größere auf. Die resultierende gemeinsame Seifenblase besitzt wiederum eine minimale Oberfläche.

Die Abhängigkeit (2.21) des Drucks vom Durchmesser der Seifenblase hat wichtige Konsequenzen, z.B. für unsere Lunge. Zweck der Atmung ist es, Sauerstoff aus der Luft in die Blutbahn zu überführen und CO₂ aus dem Blut in die Luft. Damit dieser Austausch effektiv stattfindet, benötigt die Lunge eine große Oberfläche von rund 100 m². Damit diese im Brustkorb Platz findet, wird sie auf kleine Lungenbläschen aufgeteilt: diese besitzen ein großes Oberflächen/Volumen Verhältnis. Der Nachteil ist, dass damit laut Gleichung (2.21) ein sehr hoher Druck entsteht, den unser Atemsystem nicht überwinden könnte. Die Natur hat dieses Problem mit Hilfe von oberflächenaktiven Substanzen gelöst, welche die Oberflächenspannung und damit den benötigten Druck reduzieren.

2.13.4 Oberflächenspannung und Laplace-Druck

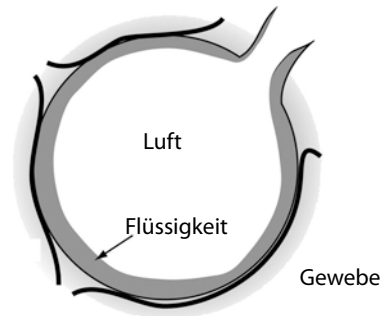


Abbildung 2.176: Einzelne Alveole.

Die Wände der Alveolen (\rightarrow Abb. 2.176) bestehen im Wesentlichen aus einem nahezu kugelförmigen Flüssigkeitsfilm. Dieser besitzt eine Oberflächenspannung

$$\sigma = \frac{dF}{d\ell} = \frac{dW}{dA}.$$

Hier stellt F die Kraft und ℓ eine Länge dar, an der die Kraft angreift. Gleichzeitig ist die Oberflächenspannung die Arbeit W , die aufgebracht werden muss, um die Oberfläche A zu vergrößern. Ihre Einheit ist somit

$$[\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^2}.$$

Der Wert für Wasser bei Körpertemperatur beträgt etwa 72 mN/m.

Die Oberflächenenergie ist proportional zur Oberfläche. Sie kann somit reduziert werden, wenn die Blase kleiner wird. Dabei wird eine Energie σdA frei. Damit die Lungenblase nicht zusammenfällt, sondern das System im Gleichgewicht ist, muss der Innendruck der Blase höher sein als der Außendruck. Die nötige Druckdifferenz Δp erhält man aus der Bedingung, dass das System im Gleichgewicht ist, dass es also bei einer Vergrößerung (oder Verkleinerung) keine Energie gewinnt (oder verliert). Dazu muss die Volumenarbeit, die bei der Vergrößerung um dV frei wird, in die gleiche Menge an Oberflächenenergie umgewandelt werden, welche für die Vergrößerung der Oberfläche um dA benötigt wird:

$$\Delta p dV = \sigma dA.$$

Für eine Kugel ist $dV = 4\pi r^2 dr$ und $dA = 8\pi r dr$.
Somit ist

$$\Delta p 4\pi r^2 dr = \sigma 8\pi r dr.$$

Auflösen nach der Druckdifferenz ergibt

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}. \quad (2.22)$$

Diese Gleichung für den Innendruck einer Flüssigkeitsblase wird als Laplace-Gleichung bezeichnet und der Druck als Laplace-Druck.

Beispiel: Für einen minimalen Durchmesser von $50 \mu\text{m}$ und mit der Oberflächenspannung von Wasser ($\sigma_{\text{H}_2\text{O}} = 0,072 \text{N/m}$) beträgt der notwendige Innendruck

$$p_i = \frac{2\sigma}{r} = \frac{2 \cdot 0,072 \text{N/m}}{25 \mu\text{m}} = 5,6 \text{kPa}.$$

2.13.5 Anpassung der Oberflächenspannung

Ein Druck von $5,6 \text{kPa}$ wäre höher als was unser Atmungssystem aufbringen kann, und rund einen Faktor 10 höher als der experimentell gemessene Druck von $0,5 \text{kPa}$.

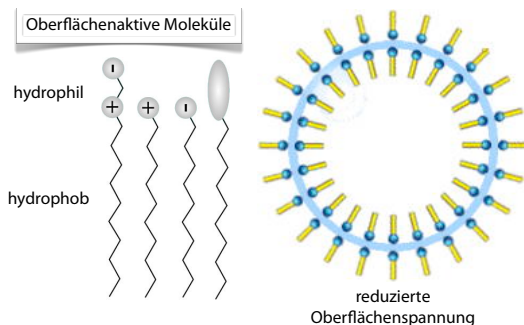


Abbildung 2.177: Tenside reduzieren die Oberflächenspannung in den Alveolen.

Der Grund ist, dass die Alveolenwände nicht aus reinem Wasser bestehen, sondern zusätzlich Tenside (oberflächenaktive Moleküle, surfactants) enthalten, welche die Oberflächenspannung reduzieren. Wie in Abb. 2.177 gezeigt, sind sie somit mit Seifenblasen vergleichbar. Fehlen diese Tenside, so wird die Atmung entsprechend erschwert. Dies tritt vor allem

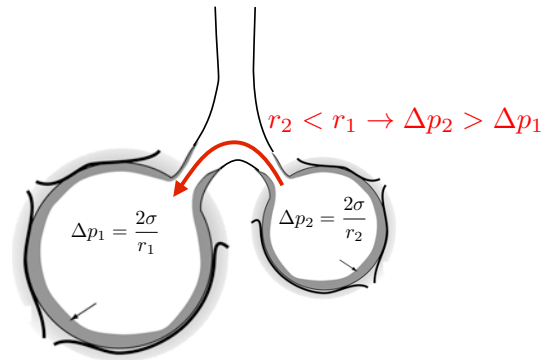


Abbildung 2.178: Druckausgleich bei zwei verbundenen Alveolen mit unterschiedlichem Radius.

bei zu früh geborenen Kleinkindern oder bei Rauchlungen auf.

Laut Gleichung (2.22) ist der Druck indirekt proportional zum Radius der Blase. Verbindet man zwei Blasen, so wie in Abb. 2.178, dass sich der Druck ausgleichen kann, fließt somit Gas aus der kleineren in die größere Blase. Dadurch wird der Unterschied zwischen den Radien noch größer und dadurch auch der Druckunterschied verstärkt. Der Prozess beschleunigt sich und die kleinere Blase kollabiert.

In der Lunge variiert der Durchmesser der Alveolen. Aus der Gleichung (2.22) für den Laplace-Druck folgt somit, dass die kleineren Alveolen in der Lunge kollabieren müssen.

Dies findet nicht statt, weil die oberflächenaktiven Substanzen, welche die Oberflächenspannung in den Alveolen bestimmen, dafür sorgen, dass bei einer Kompression die Oberflächenspannung weiter abnimmt, wie in Abb. 2.179 gezeigt. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass bei größerem Durchmesser, aber konstanter Zahl der oberflächenaktiven Moleküle der Wasseranteil an der Oberfläche zunimmt und damit die Oberflächenspannung steigt. Dadurch werden die Alveolen stabilisiert.

Bei wechselwarmen Tieren, wie Amphibien und Reptilien ist der Sauerstoffbedarf wesentlich geringer. Sie benötigen deshalb eine geringere Lungenoberfläche. Deshalb können die Alveolen einen rund 10 mal größeren Durchmesser haben als beim Men-

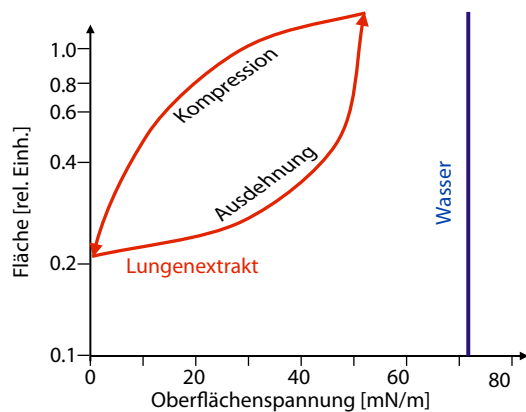


Abbildung 2.179: Änderung der Oberflächenspannung mit der Fläche für Wasser und Lungenflüssigkeit.

sehen. Der größere Durchmesser reduziert den benötigten Druck um eine Größenordnung, so dass die Alveolen nicht unter dem Einfluss der Oberflächenspannung kollabieren. Dadurch benötigen diese Tiere in ihren Lungen keine oberflächenaktiven Substanzen.

Die oberflächenaktiven Substanzen können durch verschiedene Krankheiten reduziert werden, oder durch Rauchen. Dadurch kann die Atmung schwer gestört werden.

2.13.6 Benetzung

Befinden sich Flüssigkeiten auf Oberflächen, so existieren drei verschiedene Arten von Grenzflächen (fest-flüssig, fest-gas und flüssig-gas). Dadurch kommt es zu einem Wettbewerb zwischen Kohäsionskräften und Adhäsionskräften. Adhäsionskräfte erniedrigen die Energie eines Moleküls, welches in Kontakt ist mit einer festen Oberfläche.

Ist die Adhäsion stärker als die Kohäsion, wird die Kontaktfläche zwischen Flüssigkeit und Oberfläche vergrößert. Dies ist z.B. für Wasser auf Glas der Fall. Man quantifiziert das Verhältnis von Kohäsion zu Adhäsion über den Randwinkel α (\rightarrow Abb. 2.180). Dieser stellt sich als Gleichgewichtswert dadurch ein, dass die drei Grenzflächenspannungen (fest-flüssig, fest-gasförmig und flüssig-gasförmig)

Benetzung	keine Benetzung
Adhäsionskraft > Kohäsionskraft	Adhäsionskraft < Kohäsionskraft
Ausbreitung der Flüssigkeit auf der Oberfläche	Flüssigkeit zieht sich tropfenförmig zusammen

Abbildung 2.180: Benetzung und Definition des Kontaktwinkels.

gleichzeitig minimiert werden müssen. Ist der Benetzungswinkel kleiner als 90° so spricht man von Benetzung; liegt er bei 0° so handelt es sich um vollständige Benetzung. Bei $\alpha > 90^\circ$ liegt eine nicht benetzende Flüssigkeit vor.

Einige Beispiele für Benetzungswinkel:

Grenzfläche	α
Wasser auf fettfreiem Glas	$\approx 0^\circ$
Wasser auf Paraffin	105-110
Quecksilber auf Glas	140
Quecksilber auf Stahl	154

Quecksilber ist ein typisches Beispiel einer nicht benetzenden Flüssigkeit. In diesem Fall sind die Kohäsionskräfte stärker als die Adhäsionskräfte. Das System verkleinert deshalb die Kontaktfläche. Diese Eigenschaft ist eine Folge der hohen Oberflächenspannung von Quecksilber.

2.13.7 Kapillarkräfte

Grenzflächeneffekte erzeugen auch die so genannten Kapillarkräfte: Die Energie, welche ein System durch die Vergrößerung der Kontaktfläche gewinnt, kann dazu verwendet werden, um die Flüssigkeit auf eine größere Höhe anzuheben.

Die Kraft, welche die Flüssigkeit in der Kapillare nach oben zieht, kann in erster Näherung berechnet werden, wenn man die Oberfläche in der Kapillare als Halbkugel annähert, was etwa dem in Abb. 2.181

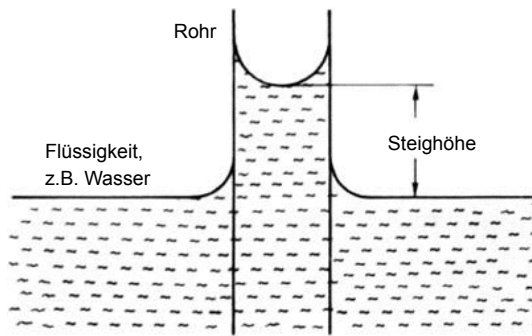


Abbildung 2.181: Kapillarkräfte.

gezeigten Fall entspricht. Dann ist die Druckdifferenz gegeben durch Gleichung (2.21) und die Kraft, welche die Flüssigkeitssäule nach oben zieht, als das Produkt aus Druckdifferenz und Querschnittsfläche A :

$$F_{\uparrow} = A \frac{2\sigma_A}{R},$$

wobei R den Krümmungsradius der Oberfläche bezeichnet (\rightarrow Abb. 2.181). Wird die Kapillare vollständig benetzt (Kontaktwinkel $\alpha \approx 0^\circ$) so ist dieser Krümmungsradius gerade gleich dem Radius r der Kapillare. Diese Kraft muss gerade die Gewichtskraft der Flüssigkeit in der Kapillare kompensieren, welche

$$F_G = mg = \rho Ahg$$

beträgt. Offenbar ist das Gleichgewicht erreicht wenn die beiden Kräfte gleich sind, $F_{\uparrow} = F_G$. Dies wird bei der Höhe

$$h = \frac{2\sigma_A}{\rho r g}$$

erreicht. Die Steighöhe ist somit proportional zur Oberflächenspannung und invers proportional zum Radius der Kapillare. Für Wasser ($\sigma_A = 0.072 \text{ N/m}$) in einer Kapillare von 0.1 mm Radius erhält man somit eine Steighöhe von $0.144 \text{ m} \sim 14 \text{ cm}$.

Man kann dies auch mit Hilfe von Glasplatten zeigen. Wie in Abb. 2.182 links dargestellt, stehen zwei Glasplatten unter einem spitzen Winkel, so dass der keilförmige Bereich dazwischen unterschiedliche Kapillardurchmesser darstellt. Man findet eine

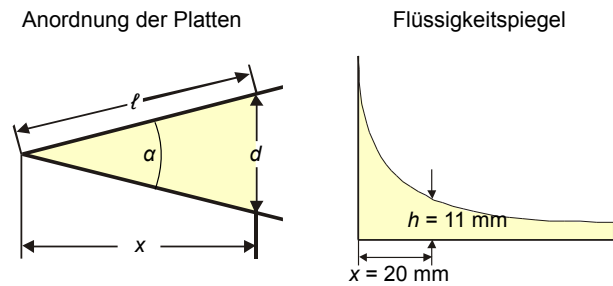


Abbildung 2.182: Kapillarkräfte zwischen 2 Glasplatten. Links blickt man von oben auf die Anordnung, rechts von der Seite.

hyperbolische Abhängigkeit der Steighöhe von der Position und damit vom Abstand der Platten.

Ist die Benetzung nicht vollständig (d.h. der Kontaktwinkel $\alpha > 0^\circ$), so fällt der Effekt entsprechend geringer aus.

$$h = \frac{2\sigma_A}{\rho r g} \cos \alpha.$$

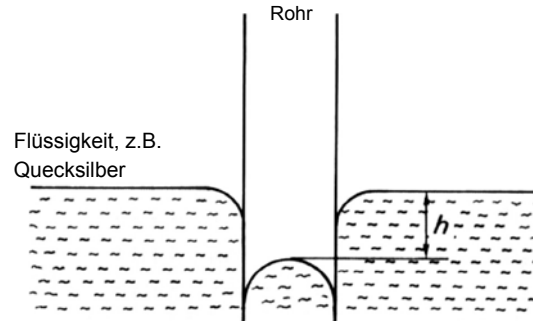


Abbildung 2.183: Kapillardepression.

Auch hier kann der umgekehrte Fall eintreten, dass die Kohäsionskräfte stärker sind. In diesem Fall ist $\alpha > 90^\circ$ und $\cos \alpha < 0$: es kommt also zu einer Kapillardepression, d.h. die Flüssigkeitsoberfläche im Innern der Kapillare ist tiefer als außen, wie in Abb. 2.183 gezeigt.

2.14 Hydrodynamik und Aerodynamik

Genau wie die Hydrostatik behandelt die Hydrodynamik, respektive die Aerodynamik, Fluide. Im Gegensatz zur Hydrostatik, wo sich das Medium im stationären Gleichgewicht befindet, wird hier jedoch ein bewegtes Medium behandelt. Durch die Bewegung kommen 2 Aspekte dazu, welche bei der Hydrostatik nicht diskutiert wurden:

- In bewegten Fluiden existieren Scherspannungen auf Grund der endlichen Viskosität. Diese innere Reibung ist proportional zum Geschwindigkeitsgradienten.
- Bewegte Fluide besitzen kinetische Energie. Es findet deshalb eine Umwandlung von potenzieller (Höhe, Druck) in kinetische Energie (und umgekehrt) statt.

Der wichtigste Unterschied zwischen strömenden Flüssigkeiten und strömenden Gasen ist, dass man bei Flüssigkeiten meist davon ausgehen kann, dass die Volumenänderungen der Flüssigkeit gering sind, d.h., dass es sich um ein inkompressibles Medium handelt. Im Falle der Aerodynamik (bei Gasen) muss die Kompressibilität berücksichtigt werden.

2.14.1 Stromlinien und Geschwindigkeitsfelder

Um ein strömendes Medium zu beschreiben, gibt es verschiedene Methoden. Die Lagrange-Methode entspricht einer zeitlichen Verfolgung der Masselemente δm . Einfacher ist die Euler-Methode bei der zu einem beliebigen Zeitpunkt die Geschwindigkeitsvektoren der einzelnen Masselemente betrachtet werden.

Die Gesamtheit dieser Geschwindigkeitsvektoren wird als Geschwindigkeitsfeld bezeichnet. Zur Darstellung verwendet man meist Stromlinien (\rightarrow Abb. 2.184). Dabei handelt es sich um orientierte Kurven, welche den Weg der Flüssigkeitselemente verfolgen. Die momentane Tangente an diese Kurven ergibt jeweils die lokale Richtung der Strömungsgeschwindigkeit. Im Rahmen der Vorlesung werden die Stromlinien meist als stationär angenommen.

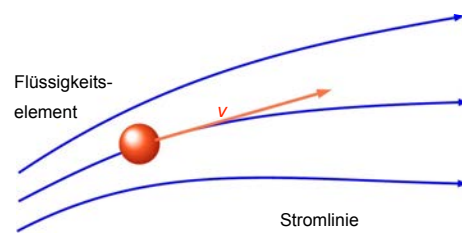


Abbildung 2.184: Darstellung eines Flussfeldes mit Flusslinien.

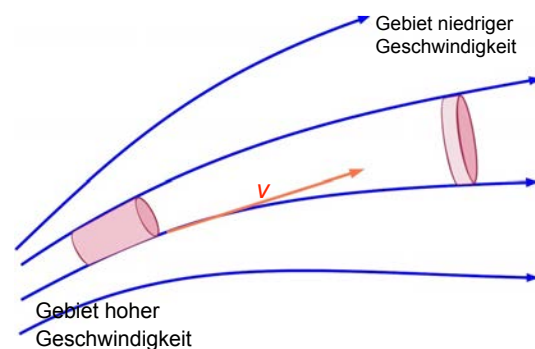


Abbildung 2.185: Stromliniendichte als Maß für die lokale Geschwindigkeit.

Die Dichte der Stromlinien ist ein Maß für den Betrag der Geschwindigkeit: Je größer die Anzahl der Stromlinien durch eine Fläche sind, desto größer ist die Stromdichte und damit die lokale Geschwindigkeit. Wie in Abb. 2.185 gezeigt kann man dies zeigen, indem man gleiche Volumina (rot eingezeichnet) betrachtet, welche durch Stromlinien eingeschlossen werden. Die Länge des Volumenelements entspricht der Verschiebung pro Zeiteinheit. Für inkompressible Fluide muss somit die Geschwindigkeit in einem Bereich hoher Stromliniendichte höher sein, als in einem Gebiet niedriger Stromliniendichte.

Diese Stromlinien können auch sichtbar gemacht werden; sie sind nicht nur ein theoretisches Konzept. Man injiziert dafür z.B. gefärbtes Wasser oder kleine Partikel in das fließende Medium.

In Abb. 2.186 werden die Stromlinien beim Umfließen eines Zylinders dargestellt. Sie zeigen, dass auf der Vorder- und Hinterseite ein Stau entsteht, also eine Region geringer Geschwindigkeit, und auf beiden Seiten eine Region hoher Geschwindigkeit.

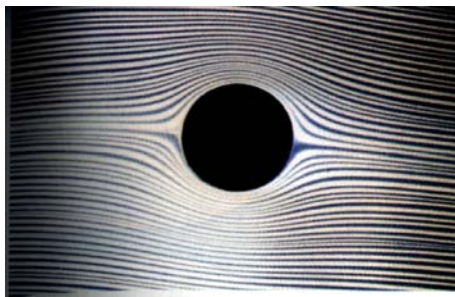


Abbildung 2.186: Laminare Strömung um einen Zylinder.

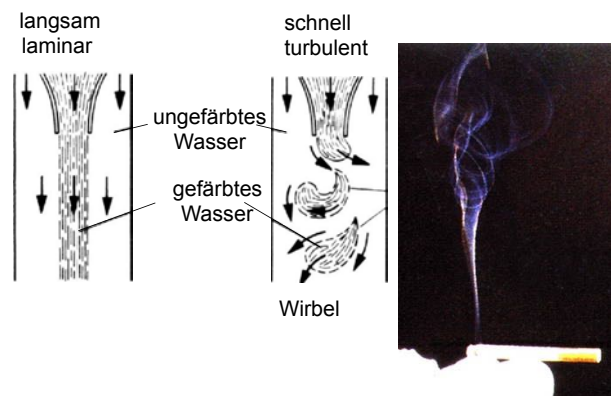


Abbildung 2.188: Laminare und turbulente Strömungen.

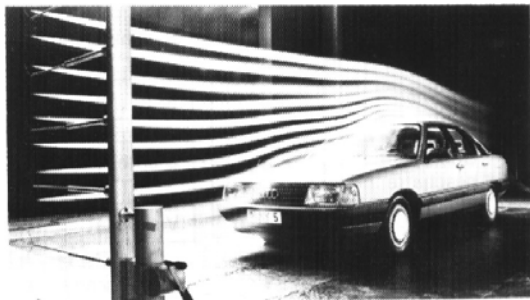


Abbildung 2.187: Automobil im Windkanal.

Abb. [2.187](#) stellt entsprechende Untersuchungen an einem Automobil in einem Windkanal dar. Die Strömungslinien werden sichtbar gemacht, indem Rauch in den Gasstrom geblasen wird. Solche Experimente spielen z.B. für den Entwurf von Fahrzeugen und Flugzeugen eine wichtige Rolle.

Strömungen werden als stationär bezeichnet, wenn die Stromlinien zeitlich konstant sind. Es gibt laminare und turbulente Strömungen.

In Abb. [2.188](#) geht die Strömung von laminar nach turbulent über. Dies geschieht z.B. bei höherer Geschwindigkeit. Die Charakterisierung von turbulenten Strömungen gehört ins Gebiet der nichtlinearen Dynamik und kann in diesem Zusammenhang nicht diskutiert werden.

2.14.2 Kontinuitätsgleichung

Geschwindigkeiten in bewegten Flüssigkeiten beschreiben den Transport von Materie. Lokal kann dieser Transport durch die Massenstromdichte

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

quantifiziert werden.

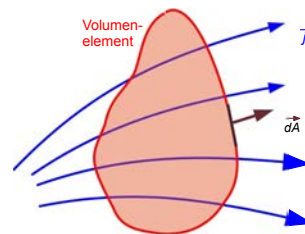


Abbildung 2.189: Massenbilanz für ein Volumenelement.

Wir betrachten die Änderung der Masse in einem Volumen V aufgrund der Zu- und Abflüsse (\rightarrow Abb. [2.189](#)). Der Anteil des Massenstroms dm/dt durch ein kleines Flächenelement $d\vec{A}$ ist

$$\frac{dm}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{A} = |\vec{j}| dA \cos \alpha,$$

wobei α den Winkel zwischen der Fließrichtung und der Oberflächennormalen darstellt. Integration über die geschlossene Oberfläche ergibt die gesamte Änderung der Masse im Volumen pro Zeiteinheit als

$$\dot{m} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \iint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0,$$

da Masse weder erzeugt noch vernichtet wird. Die Gleichung besagt einfach, dass die Summe der Zu- und Abflüsse verschwinden muss. Sie kann über den Satz von Gauß

$$\iint_O \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

(die Integralgrenzen sind $O =$ Oberfläche und $V =$ Volumen) auch geschrieben werden als

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

da die Gleichung für beliebige Volumina V gelten muss. Dies ist eine Bedingung für das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit: es enthält weder Quellen noch Senken.

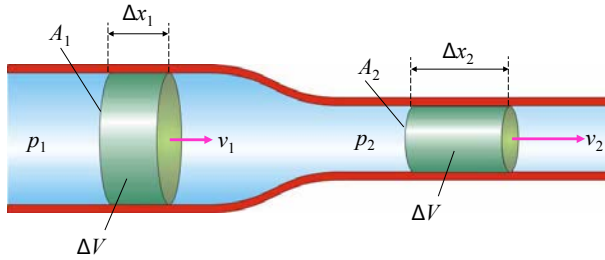


Abbildung 2.190: Transport eines Volumenelementes in einer laminaren Strömung.

Diese Aussage gilt für beliebige Körper. Wir können z.B. einen Flussschlauch betrachten, der auf der Außenseite von Flusslinien begrenzt wird ($\vec{v} \cdot \vec{dA} = 0$) und an den Stirnflächen von zwei Scheiben mit Flächen A_1 und A_2 (siehe Abb. 2.190). Da die Seitenwände durch Flusslinien gebildet werden, fließt kein Material durch diesen Teil der Oberfläche. Damit sind Ein- und Ausfluss gegeben durch die Durchflussmenge durch die beiden Flächen links und rechts.

Die Flüssigkeitsmenge, welche pro Zeiteinheit durch eine Stirnfläche fließt, ist proportional zum Produkt aus Querschnittsfläche und Fließgeschwindigkeit $v dm = \rho A v$, da die Geschwindigkeit senkrecht auf der Fläche steht. Bei konstanter Dichte kann die Massenbilanz somit geschrieben werden als

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \tag{2.23}$$

oder

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}.$$

Dies entspricht der Quantifizierung der oben gemachten Aussage, dass nahe beieinander liegende Stromlinien hohe Geschwindigkeiten markieren

und geringe Stromliniendichte einer langsamen Geschwindigkeit entspricht.

Für kompressible Flüssigkeiten muss die Gleichung um die Dichte erweitert werden:

$$v_1 \rho_1 A_1 = v_2 \rho_2 A_2.$$

Für wirbelfreie Strömungen kann man das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r})$ als Gradient eines Geschwindigkeitspotenzials $\phi(\vec{r})$ schreiben:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \operatorname{grad} \phi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \phi(\vec{r}).$$

Solche Strömungen werden deshalb auch als Potenzialströmungen bezeichnet.

2.14.3 Druck und kinetische Energie

Wir betrachten eine Strömung in einem Rohr, das sich verengt. Die Zunahme der Geschwindigkeit aufgrund der Verengung bedeutet laut Gleichung (2.23) für die Flüssigkeitselemente eine Beschleunigung. Die dafür notwendige Kraft stammt aus einer Druckdifferenz.

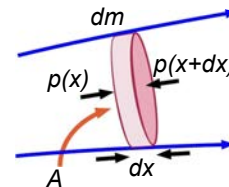


Abbildung 2.191: Druckkraft auf dünne Flüssigkeitsscheibe.

Wir betrachten eine dünne Scheibe der Flüssigkeit, wie in Abb. 2.191 gezeigt. Die Masse des Zylinders mit Querschnittsfläche A und Dicke dx beträgt

$$dm = \rho A dx.$$

Das Newton'sche Axiom für dieses Flüssigkeitselement lautet

$$dF = -A dp = a dm = (\rho A dx) \frac{dv}{dt}.$$

Hier bezeichnet $dp = p(x + dx) - p(x)$ die (infinitesimale) Druckdifferenz, a die Beschleunigung und

ρ die Dichte der Flüssigkeit. Offenbar ist die Beziehung unabhängig von der Querschnittsfläche:

$$-dp = \rho v dv.$$

Integration zwischen zwei Punkten 1 und 2 ergibt

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

oder

$$p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2.$$

Offenbar wird eine Zunahme der Geschwindigkeit (Zunahme der kinetischen Energie) durch eine Abnahme des Druckes (Reduzierung der potenziellen Energie) kompensiert.

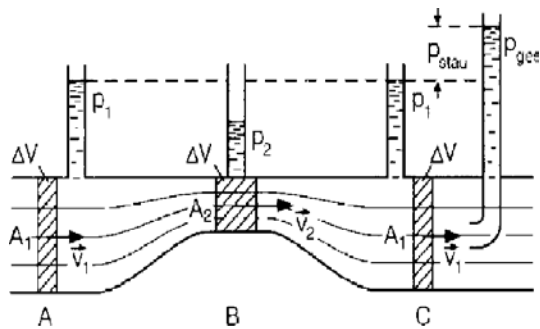


Abbildung 2.192: Herleitung der Bernoulli-Gleichung.

Abb. 2.192 zeigt die Verhältnisse für ein Rohr mit unterschiedlichen Querschnitten. Die Geschwindigkeit ist am Punkt B am höchsten und deshalb der Druck am niedrigsten.

Die Größe $\frac{1}{2}\rho v^2$ hat die Dimension einer Energiedichte

$$\left[\frac{\mathcal{E}}{V}\right] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = \frac{\text{Nm}}{\text{m}^3} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \left[\frac{F}{A}\right] = [p]$$

und gleichzeitig der des Druckes und wird als Staudruck bezeichnet. Offenbar ist die Summe aus statischem Druck und Staudruck für eine reibungsfreie Flüssigkeit konstant. Man bezeichnet dies als Gesamtdruck und schreibt

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_{ges}$$



Abbildung 2.193: Daniel Bernoulli (1700-1782).

für eine reibungsfreie Flüssigkeit.

Dies wird als die Bernoulli'sche Gleichung bezeichnet (nach Daniel Bernoulli, 1700-1782). Sie beschreibt im Wesentlichen die Erhaltung der mechanischen (potenzielle + kinetische) Energie und gilt nur so lange wie die Reibung vernachlässigt werden kann.

Der Staudruck kommt durch die Impulsänderung des Gases zustande. Er wird u.a. in Kraftwerken genutzt, wo der Staudruck auf die Turbinenschaufeln drückt. Der Effekt kann noch verstärkt werden, wenn das Wasser so umgeleitet wird, dass seine Geschwindigkeit v nicht auf 0 reduziert wird, sondern es nach rückwärts abgelenkt wird: $\Delta v = -v - v = -2v$. Dies wird z.B. bei der Pelton-Turbine genutzt, welche vor allem in Hochdruck-Wasserkraftwerken verwendet wird.

2.14.4 Druckänderung in einer Strömung

Die Voraussagen der Bernoulli Gleichung können experimentell leicht überprüft werden. Im Experimente von Abb. 2.194 verwendet man dafür ein Rohr, das in der Mitte verengt ist, an beiden Enden aber den gleichen (größeren) Querschnitt zeigt. In den beiden äußeren Rohren steigt das Wasser höher; an dieser Stelle ist offenbar der statische Druck höher als in der Mitte, wo das Wasser schneller fließt. Da die Strömung im Experiment nicht reibungsfrei ist findet man zusätzlich zum Staudruck auch einen linearen Druckabfall, welcher die Reibungsverluste enthält.

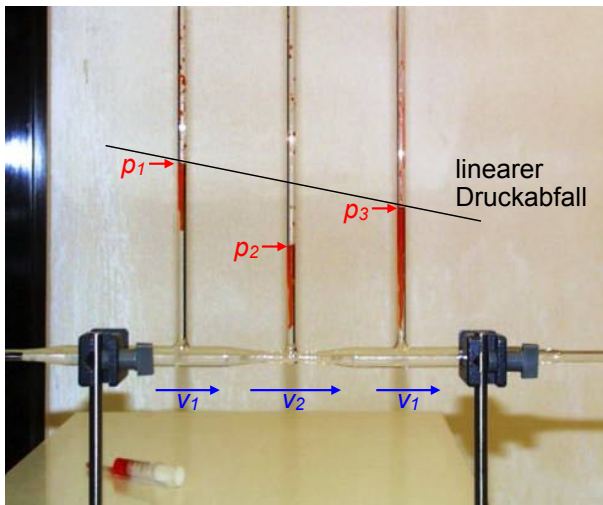


Abbildung 2.194: Experimentelle Verifizierung der Bernoulli-Gleichung.

Bezeichnung	Drucksonde	Pitot-Rohr	Prandtl'sches Staurohr
Aufbau			
Messgröße	statischer Druck	statischer Druck + Staudruck	Staudruck, Strömungsgeschwindigkeit

Abbildung 2.195: Messgeräte für unterschiedliche Arten von Druck.

Geeignete Druckmessgeräte können diese unterschiedlichen Beiträge messen, wie in Abb. 2.195 gezeigt. Die Drucksonde misst den statischen Druck, während das Pitot-Rohr den Gesamtdruck misst. Das Prandtl'sche Staurohr besitzt zwei Öffnungen für den statischen und den Gesamtdruck, welche auf unterschiedlichen Seiten der Flüssigkeit angeordnet sind. Die Höhendifferenz ist dann direkt proportional zum Staudruck.

Eine etwas allgemeinere Form der Bernoulli-Gleichung erhält man, wenn man zusätzlich den Schweredruck berücksichtigt. Dann ist der Gesamtdruck zusätzlich von der Höhe abhängig; er beträgt

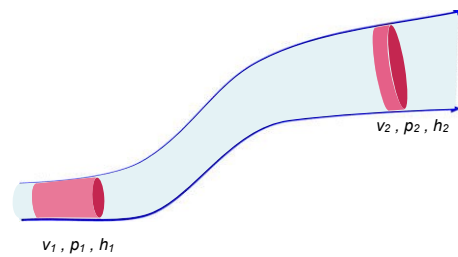


Abbildung 2.196: Beitrag des Schweredrucks zur Bernoulli-Gleichung.

dann

$$p_0 + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_{ges}.$$

Insgesamt sind beide Formen der Bernoulli-Gleichung Ausdrücke der Energieerhaltung: jeder Term stellt eine Energiedichte, d.h. Energie pro Volumen dar; der erste enthält die elastische Energie, der zweite die potenzielle Energie der Gravitation, der dritte die kinetische Energiedichte.

Eine weitere Konsequenz davon ist das Gesetz von Torricelli: Tritt Flüssigkeit aus einem kleinen Loch in einem Behälter aus, so ist seine Fließgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$, mit h der Distanz unterhalb der Flüssigkeitsoberfläche. Dies ist die gleiche Geschwindigkeit, die sie hätte, wenn sie von der Flüssigkeitsoberfläche frei gefallen wäre und entspricht der Umwandlung von potenzieller in kinetische Energie.

2.14.5 Demonstrationen zur Bernoulli-Gleichung

Einige interessante Konsequenzen können leicht demonstriert werden.

Bläst man durch ein Loch in einer Platte auf eine zweite Platte so dass das Gas zwischen den beiden Platten entweichen muss (\rightarrow Abb. 2.197), so erzeugt die hohe Geschwindigkeit des Gases zwischen den beiden Platten einen Unterdruck, welcher stark genug ist, das Gewicht der Platte zu halten und die Kraft zu überwinden, welche durch die Impulsänderung des strömenden Gases auf die freie Platte ausgeübt wird.

Bläst man auf einen Pingpong Ball schräg nach oben (\rightarrow Abb. 2.198), so fällt er nicht zu Boden, sondern

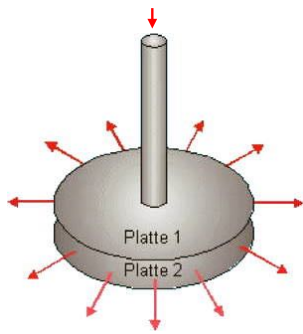


Abbildung 2.197: Strömung zieht Platte an.

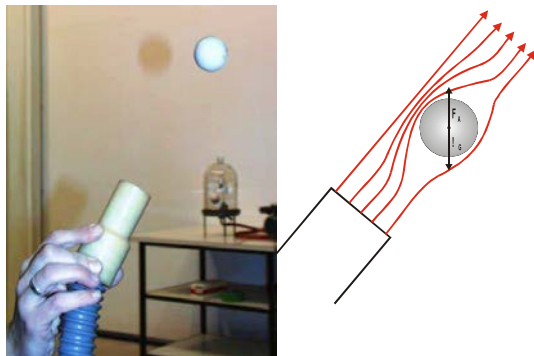


Abbildung 2.198: Tanzender Ping-Pong Ball.

gelangt in eine Gleichgewichtsposition etwas unterhalb der Mitte des Luftstrahls: an dieser Stelle ist die Geschwindigkeit des Gases oberhalb etwas größer als unterhalb, so dass eine Auftriebskraft wirkt, welche groß genug ist, die Gewichtskraft zu kompensieren.

Verwendet man einen Trichter, so kann man sogar nach unten auf den Ball blasen, wie in Abb. 2.199 gezeigt; da die Luft sich oberhalb des Balls schneller bewegt als unten, fällt er nicht zu Boden.



Abbildung 2.199: Ping-Pong Ball in einem Trichter.

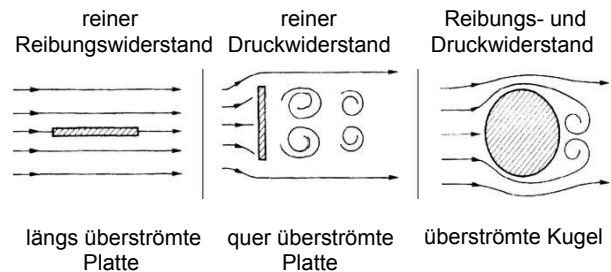


Abbildung 2.200: Widerstand in einer Flüssigkeit.

2.14.6 Viskosität

Eine Flüssigkeit bewegt sich nie widerstandsfrei.

Der Strömungswiderstand kommt aufgrund von Reibungswiderstand und Druckwiderstand zustande. Der zweite Effekt kann vor allem auf Verwirbelungen zurückgeführt werden. Abb. 2.200 zeigt typische Anordnungen, bei denen die beiden Effekte relevant sind.

Der Reibungswiderstand wirkt außerdem auch im Innern einer Flüssigkeit, wo keine Wände vorhanden sind. Er wird dann als innere Reibung bezeichnet. Abb. 2.201 zeigt eine typische Messanordnung: die zu untersuchende Flüssigkeit befindet sich zwischen 2 parallelen Platten. Eine davon wird fest gehalten, die andere mit einer konstanten Geschwindigkeit v nach oben bewegt. Direkt an der Oberfläche der beiden Platten ist die Flüssigkeit gegenüber der Platte in Ruhe. Dazwischen beobachtet man eine lineare Zunahme der Geschwindigkeit der Flüssigkeitsschichten. Für viele Substanzen kann er beschrieben werden als eine Kraft

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dx} \quad [\eta] = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \text{Pas.} \quad (2.24)$$

Diese ist proportional zur Fläche A , an der die Reibungskraft angreift, und zur Änderung dv/dx der Geschwindigkeit mit der Entfernung x von der Oberfläche. Gilt diese Beziehung nicht, so spricht man von nicht-Newton'schen Flüssigkeiten. Die Proportionalitätskonstante η zwischen Kraft und Fläche

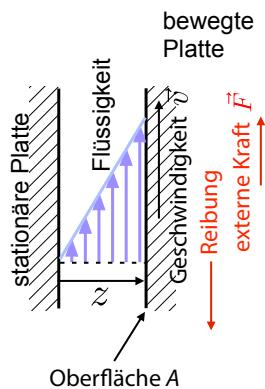


Abbildung 2.201: Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen Flüssigkeitsschichten.

mal Geschwindigkeitsgradient wird als Viskosität oder Zähigkeit bezeichnet. Neben der SI-Einheit $\text{N s} / \text{m}^2$ wird häufig auch noch die ältere Einheit Poise ($= 0.1 \text{ N s} / \text{m}^2$) verwendet. Sie stellt eine Materialeigenschaft dar, welche stark von der Temperatur abhängt.

Die Reibungskraft wirkt parallel zur Fläche A und ist somit eine Scherkraft, respektive eine Scherspannung. Während Scherkräfte in statischen Flüssigkeiten verschwinden, treten sie in der Form dynamischer Kräfte bei nicht verschwindender Viskosität auf. Diese quantifiziert somit die Scherkräfte in einem fluiden Medium. Bei sehr hoher Viskosität (Glas) verhält sich eine Flüssigkeit praktisch wie ein Festkörper.

Die Viskosität von Wasser und ähnlichen Flüssigkeiten liegt bei etwa $10^{-3} \text{ N s m}^{-2}$. Die Werte für Gase sind etwa hundertmal niedriger; da die Dichte von Luft etwa 1000 mal niedriger ist als die von Wasser, ist aber die Viskosität pro Masse bei Luft größer als bei Wasser. Die Viskosität wie in Gleichung (2.24) definiert wird auch als dynamische Viskosität bezeichnet, das Verhältnis η/ρ aus dynamischer Viskosität und Dicht als kinematische Viskosität.

Die Viskosität von Flüssigkeiten nimmt mit steigender Temperatur ab, da dann die molekularen Bindungen gegenüber der Bewegung der Moleküle an Bedeutung verlieren. Das Extrembeispiel dafür ist Glas, wo die Viskosität beim Abkühlen kontinuierlich um viele Größenordnungen zunimmt. Abb. 2.202 zeigt den Verlauf für unterschiedliche Flüssig-

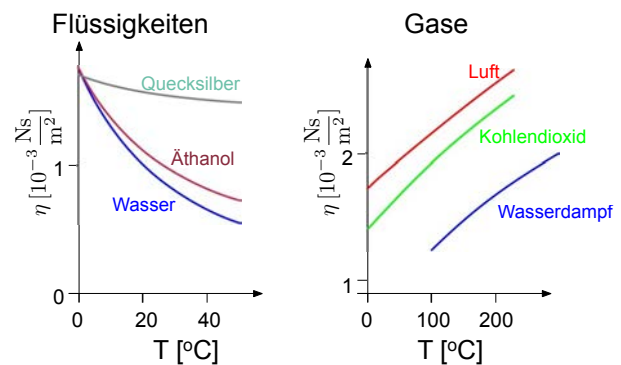


Abbildung 2.202: Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Flüssigkeiten und Gasen.

keiten (links) und Gase (rechts). Bei Gasen nimmt offenbar die Viskosität mit steigender Temperatur zu, da sie auf der Bewegung von Molekülen beruht, deren Geschwindigkeit mit der Temperatur zunimmt.

2.14.7 Reibungswiderstand in Flüssigkeiten

Die viskose Reibungskraft wirkt als Bremskraft für die Flüssigkeit und führt gleichzeitig dazu, dass strömende Flüssigkeiten eine Kraft auf den Behälter oder den umströmten Körper ausüben. Für einen Körper in einer Flüssigkeit oder einem Gas schreibt die resultierende Kraft als

$$F_R = -kv. \quad [k] = \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

In Übereinstimmung mit Gleichung (2.24) ist die Kraft proportional zur Geschwindigkeit. Die Proportionalitätskonstante k wird als Widerstandsbeiwert bezeichnet. Sie hängt sowohl von der Form des Körpers ab, wie auch von der Viskosität der Flüssigkeit. Für eine Kugel mit Radius r beträgt sie

$$k_K = 6\pi\eta r.$$

Dies wird als Stokes'sches Reibungsgesetz bezeichnet. Die Tatsache, dass die Kraft proportional ist zur Geschwindigkeit, führt z.B. dazu, dass ein fallender Körper in der Erdatmosphäre nach einer kurzen Beschleunigungsphase eine konstante Geschwindigkeit

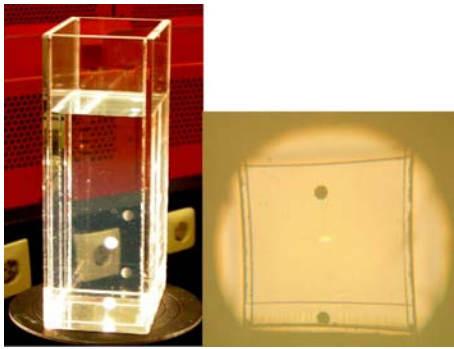


Abbildung 2.203: Freier Fall einer Kugel in Öl.

erreicht. Diese ist dadurch bestimmt, dass die Reibungskraft gerade die Gewichtskraft aufhebt.

Diese kann gemessen werden, indem man die Sinkgeschwindigkeit von Kugeln in einer viskosen Flüssigkeit misst. Abb. 2.203 zeigt ein Beispiel. Nach einer "Anlaufstrecke" erreicht die Kugel eine konstante Geschwindigkeit. Diese ist dadurch bestimmt, dass die Schwerkraft gerade gleich groß wie und entgegengesetzt gerichtet zur Reibungskraft ist:

$$\begin{aligned} F_G &= (m_K - m_{Fl})g = g(\rho_K - \rho_{fl})\frac{4\pi}{3}r^3 \\ &= F_R = 6\pi\eta rv. \end{aligned}$$

Hier ist m_K die Masse der Kugel und m_{Fl} die Masse der verdrängten Flüssigkeit, welche Auftrieb erzeugt. Wir schreiben diesen Ausdruck als

$$(\rho_K - \rho_{Fl})\frac{4\pi}{3}r^3 g = 6\pi\eta rv$$

und lösen auf nach der Geschwindigkeit v :

$$v = (\rho_K - \rho_{Fl})\frac{2g}{9\eta}r^2.$$

Größere Kugeln sollten also schneller fallen. Dies wird im Experiment bestätigt. Hier werden 2 Kugeln verglichen. Ihr Durchmesser beträgt 4 und 8 mm und die Dichte $1,42 \text{ g/cm}^3$. Die gemessenen Fallzeiten sind 110, respektive 25 s, was nahe beim erwarteten Verhältnis von 4 liegt. Man kann dies nutzen, um die Viskosität der Flüssigkeit zu bestimmen:

$$\eta = (\rho_K - \rho_{Fl})\frac{2g}{9v}r^2.$$

2.14.8 Turbulente Reibung und Luftwiderstand

Wenn Luft einen Körper umströmt, wird häufig Turbulenz erzeugt. Durch die Turbulenz wird kinetische Energie sehr effektiv dissipiert und der Widerstand wächst mit zunehmender Geschwindigkeit. Die Reibungskraft wird dadurch näherungsweise proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit:

$$F_R = dv^2.$$

Der Luftreibungskoeffizient d hängt von Form und Oberfläche des Körpers, aber auch von der Art des strömenden Mediums ab. Eine übliche Beschreibung verwendet den Widerstandsbeiwert c_w :

$$d = \frac{1}{2}c_w\rho A,$$

wobei ρ die Dichte des Mediums und A die Querschnittsfläche darstellt, während c_w in erster Linie von der Form des Gegenstands abhängt.

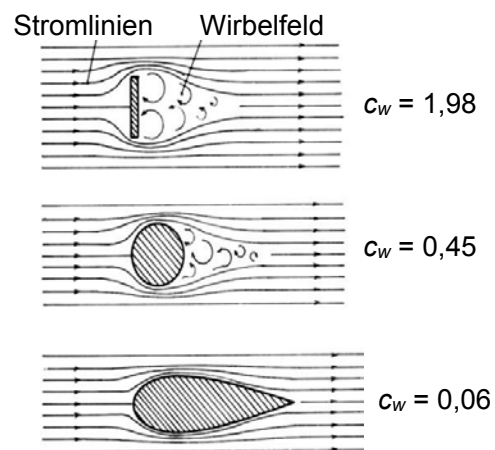


Abbildung 2.204: Widerstandsbeiwerte für unterschiedliche Körper.

Abb. 2.204 zeigt Stromlinienfelder für unterschiedliche Körper und die resultierenden Widerstandsbeiwerte. Der unterste Körper erzielt den geringsten Widerstand, indem er die Bildung von Wirbeln durch eine scharfe Kante auf der Windschattenseite vermeidet.

2.14.9 Rohrdurchfluss

In einem Rohr führt der Strömungswiderstand dazu, dass der Druck in einem System nicht gleichmäßig verteilt ist, sondern abfällt in Richtung der Strömung. Dieser Druckgradient wird benötigt, um die Reibungsverluste aufgrund der inneren Reibung zu kompensieren. Der Strömungswiderstand beschränkt deshalb auch den Durchfluss durch ein Rohr.

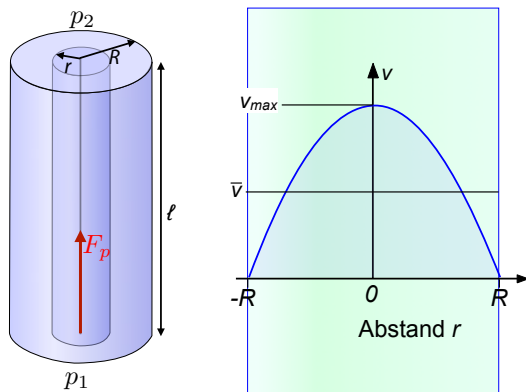


Abbildung 2.205: Durchfluss durch ein zylindrisches Rohr und resultierendes Geschwindigkeitsprofil.

Außerdem ist die Fließgeschwindigkeit nicht homogen, sondern das Geschwindigkeitsfeld bildet sich so, dass der Fließwiderstand minimal wird. Die Flüssigkeitskomponenten in der Nähe der Rohroberfläche werden durch die Reibung am stärksten gebremst und bewegen sich deshalb am langsamsten; die Komponenten in der Mitte werden am wenigsten gebremst und bewegen sich am schnellsten. Wie in Abb. 2.205 gezeigt, ist deshalb die Strömungsgeschwindigkeit im Zentrum am höchsten, in der Nähe der Rohrwand nimmt sie auf Null ab.

Um den Durchfluss zu berechnen, ist es sinnvoll, die rotationssymmetrischen Randbedingungen zu berücksichtigen. Diese führen dazu, dass die Geschwindigkeit nur vom Abstand r von der Zylinderachse abhängt. Man teilt deshalb das Flüssigkeitsvolumen in konzentrische Zylinder ein, wie in Abb. 2.205 gezeigt. Auf einen Flüssigkeitszylinder mit Radius r und Länge ℓ wirkt die Reibungskraft an sei-

ner Außenwand

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dr} = \eta 2\pi r \ell \frac{dv}{dr}.$$

Diese muss kompensiert werden durch eine Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_1$, welche von außen erzeugt werden muss, um die Strömung aufrecht zu erhalten. Die Druckkraft auf diesen Zylinder beträgt

$$F_p = -\Delta p \pi r^2.$$

Im dynamischen Gleichgewicht sind die beiden Kräfte entgegengesetzt und gleich groß, so dass

$$\eta 2\pi r \ell dv = \Delta p \pi r^2 dr$$

oder

$$dv = \frac{\Delta p}{2\eta \ell} r dr.$$

Die Randbedingung ist, dass die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Rohrs verschwindet, $v(r = R) = 0$. Damit ergibt die Integration

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta \ell} (r^2 - R^2).$$

Δp beschreibt hier die Druckänderung; da der Druck in Fließrichtung abfällt, ist die Druckänderung $\Delta p < 0$. Wie in Abb. 2.205 gezeigt, wird die Geschwindigkeit deshalb bei $r = 0$ maximal und fällt mit dem Abstand vom Zentrum des Rohr parabolisch ab.

2.14.10 Das Gesetz von Hagen-Poiseuille

Der Maximalwert der Geschwindigkeit beträgt (in der Mitte des Rohrs)

$$v_{max} = v(0) = -\frac{\Delta p}{4\eta \ell} R^2.$$

Sie ist somit positiv wenn Δp negativ ist, d.h. wenn der Druck in der Fließrichtung abnimmt, und sie wächst linear mit der Querschnittsfläche des Rohrs, respektive quadratisch mit dessen Radius R .

Die mittlere Geschwindigkeit über den Querschnitt erhält man, indem man über konzentrische Kreisringe mittelt. Integriert man die Geschwindigkeit über

den gesamten Querschnitt, so erhält man den Volumenfluss. Dividiert man diesen durch die Querschnittsfläche $A = \pi r^2$ so erhält man die mittlere Geschwindigkeit. Jeder Kreisring hat die Fläche $2\pi r dr$, mit r als innerem und $r + dr$ als äußeren Radius. Der Mittelwert ist somit

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \\ &= \frac{2}{R^2} \frac{\Delta p}{4\eta\ell} \int_0^R (r^2 - R^2) r dr \\ &= \frac{\Delta p}{2R^2\eta\ell} \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^2 R^2}{2} \right]_0^R \\ &= -\frac{\Delta p}{2R^2\eta\ell} \frac{R^4}{4} = -\frac{\Delta p R^2}{8\eta\ell} = \frac{v_{max}}{2}.\end{aligned}$$

Der gesamte Durchfluss durch das Rohr beträgt demnach

$$I = \bar{v}A = -\frac{\Delta p \pi R^4}{8\eta\ell}.$$

Dies ist bekannt als das Gesetz von Hagen-Poiseuille: Der Durchfluss durch ein gerades Rohr ist proportional zur vierten Potenz des Rohrradius, zum Druckabfall $\Delta p/\ell$ und invers proportional zur Viskosität η .

Im Experiment (\rightarrow Abb. 2.206) kann der konstante Wasserdruck dadurch erzeugt werden, dass bei sinkender Flüssigkeitssäule ein abnehmender Luftdruck über der Flüssigkeit steht: es wird nur soviel Luft nachgezogen, dass am unteren Ende des Rohres gerade der Druck p_0 , d.h. der atmosphärische Außendruck entsteht, unabhängig von der Höhe der Flüssigkeitsoberfläche. Es wird die Flüssigkeitsmenge gemessen, welche in 30 Sekunden durch jeweils ein Rohr mit gegebenem Querschnitt fließt. Das Verhältnis der beiden Rohr-Innendurchmesser beträgt $0.8 / 1.5$ mm; wir erwarten somit ein Verhältnis der Flüssigkeitsmengen von $(1.5/0.8)^4 = 12.4$. Experimentell finden wir ein Verhältnis von ca. 12.

Die Druckdifferenz, welche benötigt wird, um eine mittlere Geschwindigkeit durch das Rohr zu erzielen, beträgt

$$\Delta p = -\bar{v} \frac{8\eta\ell}{R^2},$$

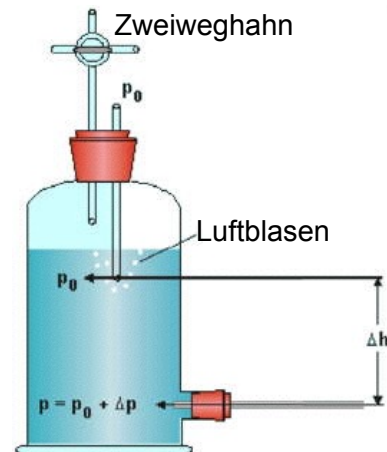


Abbildung 2.206: Verifizierung des Gesetzes von Hagen-Poiseuille. Die Anordnung stellt sicher, dass der Druck beim Ausfluss konstant ist, auch wenn die Flüssigkeitsoberfläche sinkt.

d.h. sie sinkt mit der Querschnittsfläche des Rohrs, während die Durchflussmenge ansteigt. Im statischen Grenzfall ($v \rightarrow 0$) verschwindet der Druckabfall, wir erhalten das hydrostatische Gleichgewicht.

Daraus können wir auch den Widerstandsbeiwert für die Strömung durch das Rohr berechnen als

$$k = -\frac{F_R}{\bar{v}} = -\Delta p \pi \frac{R^2}{\bar{v}} = 8\eta\ell\pi.$$

Er hängt somit nur von der Viskosität des Mediums und der Länge der Rohres ab, aber nicht vom Radius. Die zunehmende Oberfläche wird gerade kompensiert durch den kleineren Gradienten der Geschwindigkeit.

2.14.11 Ähnlichkeit von Strömungen

Die Viskosität spielt auch eine wichtige Rolle bei der Charakterisierung von Strömungen. So wird der Übergang von laminaren zu turbulenten Strömungen oder die Art des Strömungswiderstandes durch das Verhältnis aus kinetischer Energie zu Reibungsenergie beeinflusst. Ist dieses Verhältnis gleich, so spricht man von ähnlichen Strömungen.

Ob zwei Strömungen ähnlich sind, kann man einfach anhand der dimensionslosen Reynolds-Zahl (nach



Abbildung 2.207: Osborne Reynolds (1842 - 1912).

Osborne Reynolds, Abb. 2.207) bestimmen:

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} \quad [Re] = 1$$

Hier stellen ρ und η die Dichte und Viskosität des Mediums, v die Strömungsgeschwindigkeit und d eine typische Dimension des Körpers dar. Niedrige Reynolds-Zahlen findet man z.B. bei kleinen Dimensionen (z.B. Einzeller in Wasser) oder großen Dimensionen (z.B. Meeresströmungen).

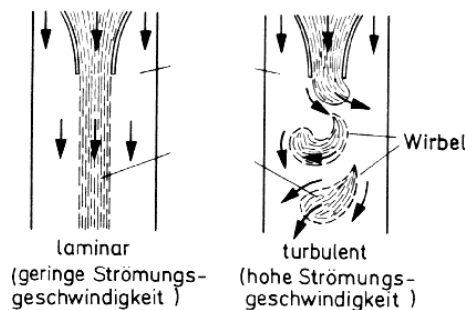


Abbildung 2.208: Einsetzen von Turbulenz.

Bei kleinen Geschwindigkeiten (und damit kleinen Reynolds-Zahlen) sind Strömungen laminar, bei großen Reynolds-Zahlen werden sie turbulent. Abb. 2.208 zeigt schematisch das unterschiedliche Verhalten. Im Bereich der turbulenten Strömung bilden sich Wirbel auf unterschiedlichen Längenskalen. Die kinetische Energie des strömenden Mediums wird dabei von großen auf kleinere Skalen übertragen, wo die Reibung sie effizient in Wärme umwandelt. Da hier mehr Energie dissipiert wird, steigt

der Strömungswiderstand stark an. Biologische Systeme, wie z.B. das Blut-Kreislaufsystem des Menschen, sind deshalb darauf optimiert, Turbulenz zu vermeiden.

Wirbel können auch an Unstetigkeiten in den Randbedingungen entstehen, wie z.B. an den Enden von Flugzeugflügeln. Unter bestimmten Bedingungen sind Wirbel recht stabil und können über längere Zeiten bestehen bleiben und dabei erhebliche Distanzen zurücklegen.

2.14.12 Strömende Gase (Aerodynamik)

Bei der Diskussion der Strömung von Gasen muss zusätzlich die Kompressibilität berücksichtigt werden. Qualitativ bleiben die bisher diskutierten Ergebnisse jedoch erhalten. Quantitative Ergebnisse sollen hier auch nicht erhalten werden.

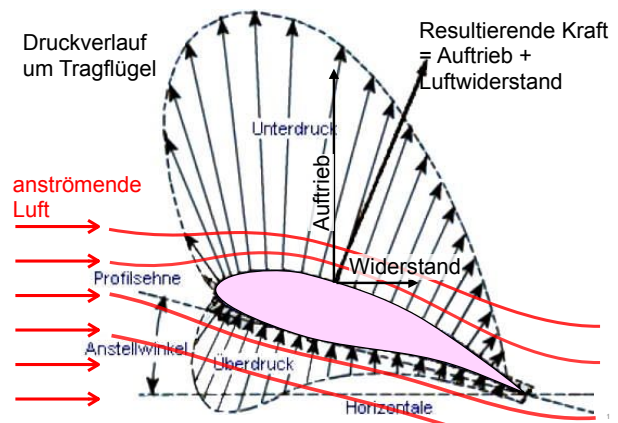


Abbildung 2.209: Auftrieb an einem Flugzeugflügel.

So kann z.B. der Auftrieb eines Flugzeugflügels mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung diskutiert werden. Abb. 2.209 stellt schematisch einen Flugzeugflügel dar, welcher von Luft umströmt wird. Auf der Oberseite ist die Geschwindigkeit höher und darum der Druck geringer als auf der Unterseite. Die gesamte am Flügel angreifende Kraft besteht aus der Auftriebskraft und der Widerstandskraft, welche mit Hilfe eines Motors oder Triebwerks überwunden wird.

Voraussetzung für diesen Effekt ist eine laminare Strömung. Macht man den Anstellwinkel zu groß,

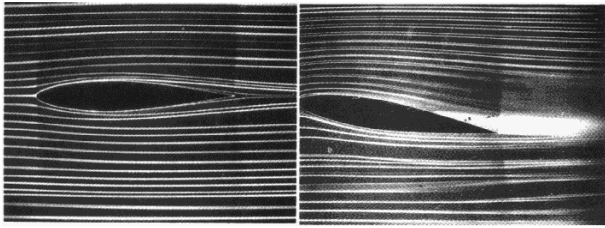


Abbildung 2.210: Strömungsabriss.

so wird die Strömung am hinteren Ende des Flügels turbulent, wie in Abb. 2.210 gezeigt. Damit wird die Geschwindigkeit geringer und der Druck höher, so dass der Auftrieb "abbricht". Man spricht vom Strömungsabriss.

Ähnliche Strömungsprofile findet man auch bei Segelbooten oder Windsurfern.

2.14.13 Der Magnus-Effekt

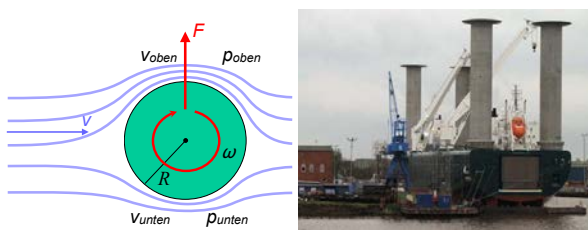


Abbildung 2.211: Links: der Magnus-Effekt. Rechts: Flettner-Rotor als Schiffsantrieb.

Eine etwas andere Anwendung des Bernoulli'schen Prinzips verwendet der Flettner-Rotor, der z.T. für Segelschiffe verwendet wurde. Das zu Grunde liegende Prinzip wird als Magnus Effekt bezeichnet. Das Schiff verwendet senkrecht stehende Zylinder, welche um ihre Achse rotieren (→ Abb. 2.211).

Von der Seite anströmende Luft fließt dann aufgrund der Oberflächenreibung bevorzugt in Drehrichtung um den Zylinder. Auf der Vorderseite ist deshalb die Strömungsgeschwindigkeit größer und der statische Druck geringer. Das Schiff erhält damit eine Kraft in Vorwärtsrichtung.

Die Geschwindigkeiten betragen

$$v_{oben} = v + \omega R; v_{unten} = v - \omega R,$$

mit R als Radius des Zylinders und v der Geschwindigkeit der Luft ohne den Rotor. Aus dem Bernoulli-Gesetz folgt, dass der Gesamtdruck, bestehend aus statischem plus Staudruck auf beiden -Seiten gleich sein muss:

$$p_{oben} + \frac{1}{2}\rho(v + \omega R)^2 = p_{unten} + \frac{1}{2}\rho(v - \omega R)^2.$$

Somit existiert eine Druckdifferenz

$$\Delta p = p_{oben} - p_{unten} = -\frac{1}{2}\rho(4\omega Rv) = -2\rho\omega Rv.$$

Diese Druckdifferenz ergibt eine antreibende Kraft

$$F = A_{eff}\Delta p = -2RL(2\rho\omega Rv) = -4R^2L\rho\omega v,$$

mit $A_{eff} = 2RL$ als Querschnittsfläche des Zylinders und L dessen Höhe.

Der Effekt kann in einem einfachen Experiment gezeigt werden. Dazu wird eine Kunststoffrolle wie ein Jo-Jo an einer Schnur fallengelassen, so dass sie sich dabei dreht. Dadurch erhält man die Kombination von Drehung und Relativgeschwindigkeit, welche für den Magnus-Effekt benötigt werden: die Rolle fällt in einem Bogen.

2.15 Der Blutkreislauf

Höhere Organismen benötigen ein System, um Nährstoffe zu den Zellen zu bringen und Abbauprodukte zu entfernen. Beim Mensch werden diese Aufgaben vor allem von Herz-Kreislauf System übernommen. Die Existenz des Blutkreislaufs wurde erst 1628 von Sir William Harvey⁵ (1578-1657) postuliert. Bis dahin war das auf Galen, (129 -216 n. Chr.) zurückgehende Bild vorherrschend, welches besagt, dass arterielles und venöses Blut unabhängig voneinander seien. Gemäss diesem Bild entsteht venöses Blut in der Leber und arterielles Blut im Herzen und wird von den Körperteilen verbraucht. Harvey postulierte die Existenz eines Blutkreislaufs: er mass, dass das Herz pro Stunde ca. 200 l Blut pumpt, woraus er folgerte, dass das Blut unmöglich versickern konnte sondern zum Herzen zurück gelangen musste.

⁵www.bartleby.com/38/3/

Leonhard Euler (1707-1783) stellte erstmalig Gleichungen für die Ausbreitung gepulster Wellen in Arterien auf.

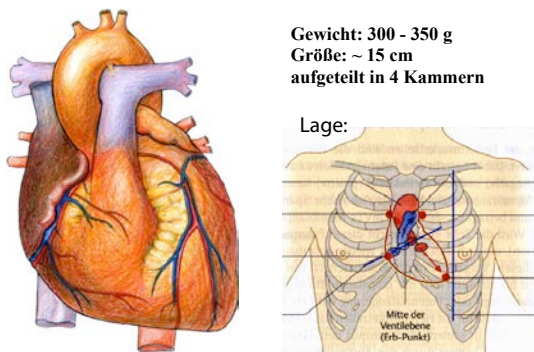
Die wichtigsten Aufgaben des Herz-Kreislauf Systems sind

- Die Versorgung der Zellen mit Sauerstoff und Nährstoffen
- Der Abtransport von Abfallstoffen (z.B. CO₂, Milchsäure, ...)
- Austausch von Botenstoffen
- Immunabwehr
- Wärmeaustausch

2.15.1 Aufbau

Das Herz-Kreislaufsystem umfasst die folgenden Bestandteile:

Herz



Gewicht: 300 - 350 g
Größe: ~ 15 cm
aufgeteilt in 4 Kammern

Lage:

Abbildung 2.212: Form und Lage des Herzens.

Das Herz ist ein hohles, muskuläres Organ, welches in einem festen Rhythmus Blut durch die Adern transportiert, indem es sich periodisch kontrahiert und entspannt. Es wiegt ca. 300-350 g (0,5% des Körpergewichts) und hat etwa die 1½-fache Größe einer Faust. Es liegt im Brustraum, leicht links von der Mitte.

Gefäßtyp	mittlerer Durchmesser	mittlere Wandstärke
Arterien	4 mm	1 mm
Kapillaren	8 µm	0,5 µm
Venen	5 mm	0,5 mm



Abbildung 2.213: Charakteristika der wichtigsten Gefäßtypen.

Gefäßsystem

Das Gefäßsystem besteht aus

- Arterien: Blutgefäße laufen vom Herzen weg; dicke Gefäßwände
- Kapillaren: Haargefäße in denen der Stoffaustausch stattfindet
- Venen: Blutgefäße führen zum Herz; dünnwandig
- Lymphgefäße: transportieren Flüssigkeit und Abwehrstoffe

Blut

Blut ist eine komplexe Flüssigkeit, bestehend aus dem Blutplasma und lebenden Zellen. Es trägt etwa 8% zum gesamten Körpergewicht bei, d.h. ein Mensch mit 80 kg Körpergewicht besitzt ca. 6.4 kg Blut. Die Produktion der Blutkörperchen erfolgt im Knochenmark.

Regelung

Das gesamte Herz-Kreislauf System wird durch eine Reihe von Regelmechanismen gesteuert, welche z.B. Herzfrequenz und Gefäßwiderstand dem aktuellen Bedarf anpassen. Die Regelungsmechanismen verwenden sowohl nervliche wie auch chemische Informationsübertragung.

2.15.2 Kreislauf: Übersicht

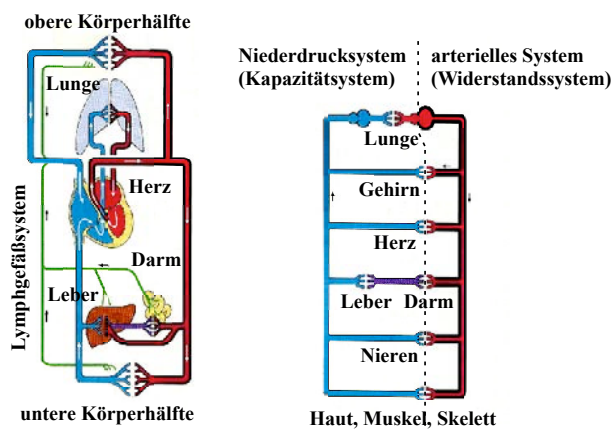


Abbildung 2.214: Überblick über arteriellen und venösen Kreislauf.

Abbildung 2.214 zeigt einen Überblick über das Herz- und Gefäßsystem. Sauerstoffgesättigtes, "arterielles" Blut ist rot gezeichnet, die Teilkreisläufe mit teilweise entsättigtem, "venösen" Blut sind blau gezeichnet. Das arterielle Blut ist zu rund 97% mit Sauerstoff gesättigt, das venöse zu rund 73%. Das Lymphsystem, ein zusätzliches Transportsystem des Körpers, ist grün eingefärbt. Auf Grund der starken Verzweigung der Blutgefäße ergibt sich eine Gesamtlänge von mehreren 10000 km.

Auf der rechten Seite der Abbildung ist das arterielle System mit relativ starken und relativ starren Wänden dicker eingezeichnet. Das venöse System besitzt relativ schwache und stark dehnbare Wände und wird als Niederdrucksystem zusammengefasst. Der Lungenkreislauf, auch kleiner Kreislauf genannt, liegt mit dem rechten Herzventrikel als Pumpe in Reihe mit dem großen Körper- oder Organkreislauf.

Abb. 2.215 zeigt die prozentuale Verteilung des Blutvolumens auf die einzelnen Organe und die Druckverhältnisse im Herz-Kreislaufsystem. Auf Grund des geringeren Druckes im Venensystem ist der Transport hier deutlich langsamer als im arteriellen Bereich. Dementsprechend befindet sich ein sehr viel größerer Anteil des Blutes ($\approx 85\%$) in den Venen, als in den Arterien ($\approx 15\%$).

Bei Jugendlichen pumpt das Herz pro Minute etwa

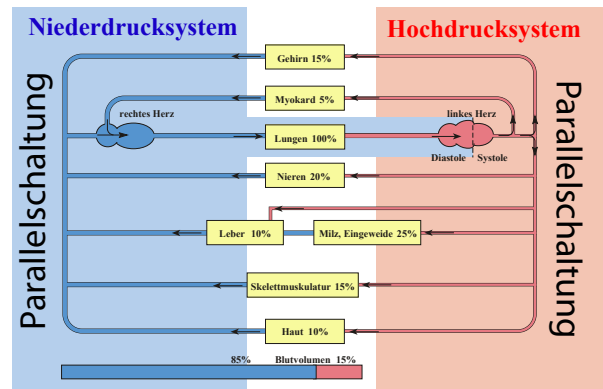


Abbildung 2.215: Schaltschema des Blutkreislaufs und Verteilung des Blutes auf die wichtigsten Organe.

5 l Blut, bei 70-jährigen sinkt diese Menge auf etwa 2.5 l.

2.15.3 Druckverteilung

Der Blutdruck im Körper variiert als Funktion von Zeit und Ort.

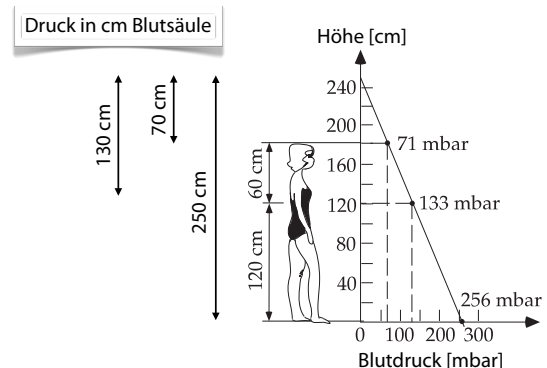


Abbildung 2.216: Druckverteilung im Körper.

Auf der Orts-Skala nimmt er linear mit der Höhe im Körper ab. Der hydrostatische Druck p hängt allgemein mit

$$p(h) = p_0 + \rho gh$$

von der Höhe h ab, mit ρ der Dichte der als homogen angenommenen Flüssigkeit und g der Erdbeschleunigung. Für Blut ($\rho \approx 1 \text{ g/cm}^3$) sinkt er damit um etwa 10^4 Pa/m , also um etwa 100 mbar pro Meter

(≈ 76 Torr). Im Kopf ist er deshalb, je nach Körpergröße, um 150-200 mbar geringer als in den Füßen. Abb. 2.216 zeigt die Variation des Drucks mit der Höhe für einen mittleren Druck von 133 mbar in der Höhe des Herzens.

Außerdem hängt der Druck vom Organ ab, vom Blutkreislauf, der Sauerstoffversorgung, und der Zeit. Im kleinen Kreislauf herrscht ein geringerer Strömungswiderstand, daher sind die systolischen/diastolischen Drücke gering (25/5 mm Hg), während sie im großen Kreislauf in Ruhe 120/80 mm Hg betragen (siehe Abbildung 2.217). Im Kreislaufsystem wird das Blut vom linken Ventrikel über Arterien, die sich in Arteriolen verzweigen, in die Kapillaren gepumpt. Die vom Herzen kommende Druckwelle wird in den Arteriolen und Kapillaren sehr stark gedämpft, weil dort der Strömungswiderstand hoch ist.

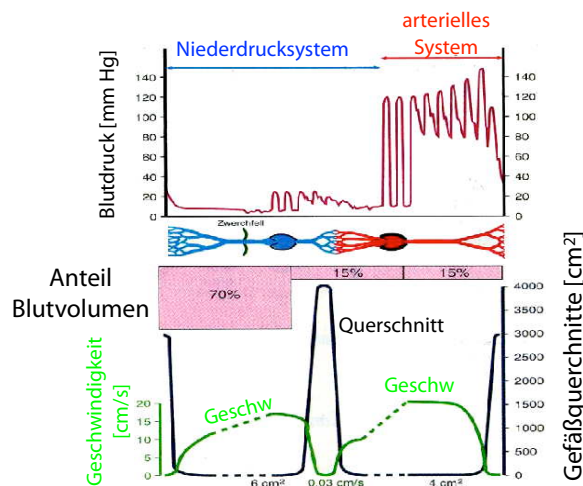


Abbildung 2.217: Druckverteilung, Blutvolumen-Verteilung und Geschwindigkeit in den verschiedenen Gefäßen.

Das führt zu einem *kontinuierlichen* Blutstrom in den Kapillaren, wo der Gasaustausch mit dem Gewebe stattfindet. Da sich mehr als 70% des Blutvolumens im venösen System befinden, wird dieses auch als Kapazitätssystem bezeichnet.

Tabelle 2.7 vergleicht die wichtigsten Strömungsparameter der verschiedenen Blutgefäße.

Gefäß	Durchmesser D [mm]	mittlere Geschwindigkeit v [m/s]	mittlere Scherrate dv/dx
Aorta	25	0,48	155
Arterie	4	0,45	900
Arteriole	0,05	0,05	8000
Kapillare	0,008	0,001	1000
Venüle	0,02	0,002	800
Vene	5	0,1	160
Vena cava	30	0,38	3300

Tabelle 2.7: Strömungsparameter einiger Blutgefäße.