

# 1 Einleitung

## 1.1 Organisatorisches

Zielpublikum: Studierende der Zahnmedizin

Vorlesungszeiten: Mo 15<sup>45</sup> - 17<sup>15</sup> Richtersaal

### 1.1.1 Inhaltsübersicht

1. Einführung
2. Mechanik
3. Thermodynamik
4. Elektrizität und Magnetismus
5. Schwingungen
6. Wellen
7. Optik
8. Quantenmechanik
9. Atom-, Molekül und Festkörperphysik
10. Kern- und Teilchenphysik

### 1.1.2 Übungen

Der Studienplan enthält keine Übungen zur Vorlesung. Das Lösen von Übungsaufgaben ist jedoch eine sehr effektive Hilfe, welche wesentlich zum Verständnis des Stoffes beiträgt. Deshalb werden auf der Homepage der Vorlesung ([https://qnap.e3.physik.tu-dortmund.de/suter/Vorlesung/Physik\\_ZM\\_WS19/Physik\\_ZM\\_WS19.html](https://qnap.e3.physik.tu-dortmund.de/suter/Vorlesung/Physik_ZM_WS19/Physik_ZM_WS19.html)) jeweils Übungsaufgaben publiziert. Falls beim Lösen Schwierigkeiten auftreten können Sie sich in der Vorlesung melden und wir werden diese besprechen.

### 1.1.3 Prüfung

Am Ende des SS findet eine mündliche Prüfung statt.

### 1.1.4 Literaturangaben

Es wird dringend empfohlen, die Vorlesung nicht nur anzuhören, sondern anhand eines Buches nachzuarbeiten. Dafür stehen eine Reihe von geeigneten Standardwerken zur Verfügung. Die vorliegende Liste stellt lediglich eine Auswahl dar.

1. P. A. Tipler: Physik; Spektrum Akademischer Verlag,
2. Alonso-Finn: Physik; Addison-Wesley
3. J. Orear: Physik; Carl-Hauser Verlag
4. Hans H. Paus: Physik in Experimenten und Beispielen; Carl-Hauser Verlag
5. G. Lindström, R. Langkau: Physik kompakt: Mechanik, Fluidodynamik und Wärmelehre, Elektrodynamik, Elektromagnetische Wellen, Quantenphysik; Vieweg Studium, Grundkurs Physik, Vieweg
6. David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker: Fundamentals of Physics; John Wiley & Sons, New York
7. Dieter Meschede: Gerthsen Physik; Springer, Berlin.
8. Ulrich Harten: Physik für Mediziner, Springer Verlag.
9. Walter Seibt, Physik für Mediziner, Thieme Verlag.

Außerdem sind manchmal Nachschlagewerke nützlich, welche sich nicht als Lehrbuch eignen, aber um wichtige Definitionen oder Daten nachzuschlagen. Ein Beispiel ist

Horst Stöcker: Taschenbuch der Physik / CD ROM Desktop Physik; Verlag Harry Deutsch, Thun und Frankfurt / Main.

## 1.2 Was ist Physik ?

### 1.2.1 Physikalische Fragestellungen

Die Physik ist eine Naturwissenschaft; ihr Ziel ist es damit, die Natur zu verstehen und zu beschreiben. Im Vergleich zu anderen Naturwissenschaften wie der Chemie oder Biologie ist die Physik nicht nur deutlich quantitativer, sondern auch stärker mathematisch ausgerichtet. Auch ist in der Physik die reine Beschreibung der Phänomene eher sekundär. Im Vordergrund steht immer das Ziel, die Phänomene durch wenige Grundprinzipien zu erklären. Zu den anderen Naturwissenschaften gibt es einen erheblichen Überlapp: Es existieren überlappende Gebiete wie physikalische Chemie, chemische Physik, Biophysik etc. Darüber hinaus gibt es Überlapp mit fast allen Fächern, auch außerhalb der Naturwissenschaften. Beispiele sind Materialwissenschaften, Medizinphysik, Quanteninformatik, aber auch die Philosophie.

Die Physik ist die exakteste der Naturwissenschaften. Es wird großer Wert auf quantitative Aussagen gelegt. Dieses Programm ist auch sehr erfolgreich: Man kann heute bestimmte Theorien über mehr als 30 Größenordnungen testen (von atomaren Größen bis zur Größe des Universums) und einzelne Messungen mit einer Präzision von  $10^{-17}$  (Zeit) bis  $10^{-22}$  (interferometrische Messung von Längenänderungen) durchführen.

### 1.2.2 Erkenntnisprozess

Physikalisches Wissen wird nicht linear erworben. Der Erkenntnisprozess basiert, stark vereinfacht ausgedrückt, auf einem Wechselspiel zwischen Experiment und Theorie, resp. Induktion und Deduktion ( $\rightarrow$  Abb. 1.1). Experimente erzeugen Daten, welche mit Hilfe induktiver Logik zu einem Bild zusammengefügt werden, welches eine physikalische Theorie bildet. Aus der Theorie schließt man mit deduktiver Logik auf mögliche Experimente und sagt deren Messungen voraus. Eine erfolgreiche Durchführung des entsprechenden Experimentes und die Übereinstimmung zwischen dem Messergebnis und

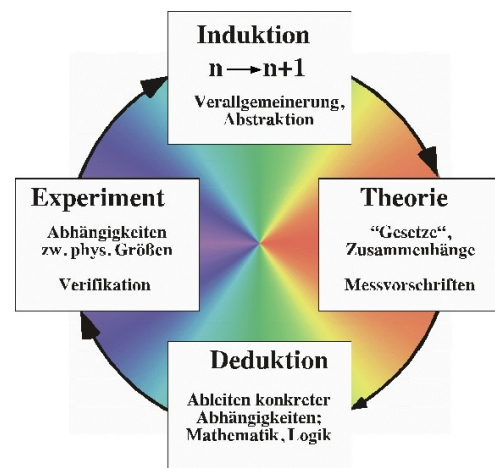


Abbildung 1.1: Prinzipielles Vorgehen beim wissenschaftlichen Erkenntnisprozess.

der theoretischen Voraussage wird als Bestätigung für die entsprechende Theorie verstanden.

Die Nutzung von Experimenten für die Erkenntnisgewinnung hat sich erst relativ spät etabliert. Die meisten Griechen setzten auf rein gedankliche Argumente. Zu den berühmtesten Experimenten der Physikgeschichte gehören die Fallversuche von Galilei, welche er gemäß der Tradition an schiefen Turm von Pisa durchführte. Die Entwicklung der physikalischen Ideen ist selbst ein interessantes Forschungsthema. Ein empfehlenswertes Buch dazu ist: K. Simonyi, Kulturgeschichte der Physik (Verlag Harri Deutsch, Thun, 1990).

Im Rahmen des Unterrichts (und im Rahmen der meisten Forschungsprojekte) konzentriert man sich allerdings auf den unteren Ast: Die physikalischen Gesetze (=Theorien) werden als Axiome behandelt und daraus über deduktive Schritte das Verhalten von unterschiedlichen Systemen abgeleitet. Dies liegt im Wesentlichen an der sehr geringen Zahl von physikalischen Gesetzen, während die Zahl der beobachtbaren Phänomene praktisch unendlich ist. Dementsprechend werden selten neue physikalische Gesetze entdeckt. Dies geschieht nur in Ausnahmefällen (z.B. Quantenmechanik und Relativitätstheorie zu Beginn des letzten Jh., vereinheitlichte Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung). Das Ziel der Forschung ist es auch weniger, neue Gesetze zu entdecken, sondern bekannte Gesetze zusammenzuführen

ren (“Vereinheitlichung”, “theory of everything”). Daraus ergibt sich, dass der Fortschritt in den Naturwissenschaften nicht kontinuierlich verläuft, sondern durch Umbrüche gekennzeichnet ist, bei denen sich die gesamte Sichtweise für die Natur ändert. Dieser Prozess ist heute unter dem Stichwort “Paradigmenwechsel” bekannt; er wurde u.a. von Thomas Kuhn analysiert (T.S. Kuhn, ‘Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen’, Suhrkamp, Frankfurt am Main (1986).).

Zu den wichtigsten Grundannahmen der Physik gehört, dass physikalische Gesetze überall und zu jeder Zeit gleich sind. Dies ist nicht unbedingt eine Selbstverständlichkeit und stellt historisch gesehen eine neue Entwicklung dar: früher war man der Ansicht, dass z.B. für die “himmlischen Sphären” andere Gesetze gelten würden als für die “irdische Sphäre”. Dies ist naheliegend wenn man beobachtet, dass ein “himmlischer Körper” wie z.B. der Mond, frei schwebend ohne Unterstützung ist, während irdische Körper wie z.B. ein Apfel ohne Unterstützung herunterfallen. Es mussten erst physikalische Theorien erstellt werden, welche in der Lage sind, beide Phänomene auf einheitliche Prinzipien zurückzuführen. Dass die Gesetze und Naturkonstanten im gesamten Universum gültig sind kann z.B. durch spektroskopische Messungen untersucht werden: die Emissionslinien von Wasserstoffgas haben überall im Universum die gleiche Wellenlänge.

Diese Prinzipien erlauben u.a. die Vorhersage von Prozessen, welche in der Zukunft stattfinden könnten und / oder an Orten, die nicht oder nur schwer zugänglich sind. Ein frühes, damals spektakuläres Beispiel war die Herleitung der Planetenbahnen aus einfachen physikalischen Gesetzen, die auch auf der Erde überprüft werden können. Das gleiche Prinzip wurde auf die Vorbereitung der Mondlandung angewendet: Ein sehr komplexes Unternehmen konnte sehr exakt geplant und durchgeführt werden weil die physikalischen Gesetze, welche die Voraussetzungen dafür beschreiben, bekannt waren. Ohne das Experiment vorher durchgeführt zu haben war es deshalb möglich, den gesamten Ablauf vorher in einem Rechner auf der Erde zu simulieren.

### 1.2.3 Experimente

Experimente können unterschiedliche Ziele verfolgen. So kann man z. B. versuchen

- eine physikalische Größe (z.B. Naturkonstante, Materialkonstante) möglichst genau zu bestimmen. Beispiele sind die Lichtgeschwindigkeit, die Gravitationskonstante oder die Temperatur der Sonnenoberfläche.
- die Abhängigkeit einer Größe von anderen Größen (=Parametern) zu bestimmen. Ein Beispiel wäre die Härte von Stahl als Funktion der Temperatur.
- eine Hypothese zu testen oder zwischen unterschiedlichen Modellen für die Beschreibung der Realität zu unterscheiden (“experimentum crucis”).

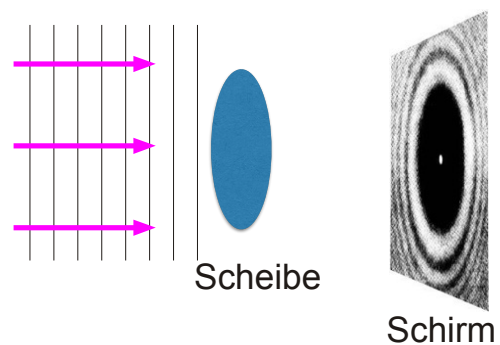


Abbildung 1.2: Poisson'scher Fleck bei der Beugung an einer Kreisscheibe.

Ein bekanntes Beispiel dafür war die Messung des Poisson'schen Flecks: Poisson zeigte theoretisch, dass, falls Licht als Welle beschrieben werden kann, man im Schatten einer Kreisscheibe einen hellen Fleck beobachten können sollte (→ Abb. 1.2). Wenn Licht sich hingegen wie ein Teilchenstrom verhält sollte dies nicht der Fall sein. Als der Fleck nachgewiesen werden konnte, verhalf dies der Wellentheorie des Lichtes zum Durchbruch. In jedem Fall besteht die Kunst des Experimentierens vor allem darin, die gewünschte Abhängigkeit oder Messgröße so zu bestimmen, dass sie möglichst wenig von nicht kontrollierten oder unbekanntem Parametern (z.B. Temperatur, Spannungsschwankungen, Mondphase etc.) beeinflusst wird.

### 1.2.4 Messgeräte

Messungen werden mit Hilfe von Messgeräten durchgeführt. Dabei handelt es sich um Geräte, welche eine physikalische Größe in eine leichter messbare Größe umwandeln. Ein typisches Beispiel ist ein Quecksilberthermometer, bei dem die Temperatur in eine Längenänderung eines Quecksilberfadens umgesetzt wird.

Ein anderes Beispiel für ein Messgerät ist das Elektrometer: es wandelt eine elektrische Ladung, welche für Menschen nicht direkt beobachtbar ist, in eine Auslenkung eines Zeigers um.

Wichtig ist bei allen diesen Geräten, dass sie geeicht sind, dass also der Proportionalitätsfaktor zwischen der Eingangsgröße und dem Ausgabewert bekannt ist. Der Ausgabewert wird jeweils durch Vergleich mit bekannten (Standard-) Werten bestimmt.

Messgeräte können hintereinander gereiht werden; so kann das Quecksilberthermometer mit Hilfe einer optischen Linse abgebildet und mit einer Kamera in ein Bild umgewandelt werden. In den meisten Fällen wird heute das Messresultat in eine digitale Form umgesetzt. Dies bietet nicht nur den Vorteil einer sehr viel höheren Genauigkeit, sondern auch die Möglichkeit, die Messresultate zu archivieren und weiter zu verarbeiten.

### 1.2.5 Abschätzungen

Physik ist die quantitativste Naturwissenschaft. Es gibt aber auch einen Aspekt der Physik, der auf den ersten Blick dieser Aussage widerspricht: Für die Planung von Experimenten, aber auch für die Vorbereitung exakter Rechnungen ist es häufig wichtig, zunächst zu Schätzwerten zu kommen. In vielen Fällen gelingt einem dies mit erstaunlich wenig Information und Aufwand. Das Vorgehen bei einer Abschätzung entspricht im Wesentlichen der Planung eines Experiments: man überlegt sich die relevanten Abhängigkeiten und versucht die freien Parameter eines geeigneten Modells zu bestimmen.

Einer der berühmtesten Physiker, der dies besonders gut beherrschte, war Enrico Fermi (→ Abb. 1.3),

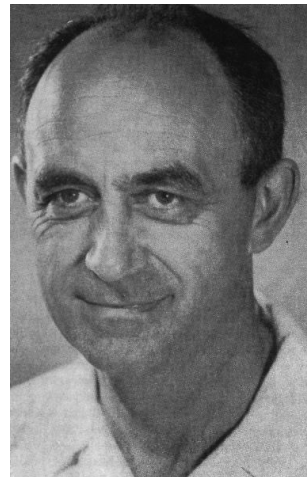


Abbildung 1.3: Enrico Fermi (1901-1954).

der einen wesentlichen Teil seines Lebens in Chicago verbrachte. Ein bekanntes Beispiel, welches auf den ersten Blick wenig mit Physik zu tun hat und vielleicht auch als unlösbar erscheint ist die Frage: Wie viele Klavierstimmer es in Chicago gibt. Fermi schätzte zunächst die Einwohnerzahl auf 3 Millionen und die Größe einer durchschnittlichen Familie auf vier Personen. Vielleicht jede dritte Familie besitzt ein Klavier, so dass es in Chicago rund 250'000 Klaviere gab. Weiterhin schätzte er, dass ein Klavier im Schnitt alle 10 Jahre gestimmt wird, d.h. pro Jahr 25'000. Wenn ein Klavierstimmer pro Tag vier Klaviere stimmen kann kommt er bei 250 Arbeitstagen pro Jahr auf 1000 Klaviere. Demnach braucht Chicago mindestens 25 Klavierstimmer. Diese Zahl ist sicher nicht korrekt, sie kann aber eine erste Idee geben und die Größenordnung solcher Schätzungen ist oft erstaunlich gut.

### 1.2.6 Bedeutung für den Alltag

Unsere Zivilisation ist in den letzten Jahren zunehmend technisiert worden. Wir nehmen unsere Umwelt kaum mehr direkt wahr, sondern mit Hilfe technischer Hilfsmittel wie z.B. Telefon (Handy), Fernsehen, Computer, wir nutzen technische Fortbewegungsmittel wie Eisenbahn, Auto und Flugzeug. Diese Änderungen wurden von Fortschritten der Naturwissenschaften und der Technik ermöglicht, welche im Laufe des 20. Jh. erzielt wurden. Praktisch

die gesamte Industrie basiert auf Erkenntnissen der Physik und anderer Naturwissenschaften. Die Änderungen haben das Leben erleichtert, gleichzeitig werden aber auch negative Aspekte wie Umweltverschmutzung bemerkbar.

Die Physik (und andere Naturwissenschaften) können uns auch helfen, das Verständnis für die natürliche wie auch die technische Umwelt zu verbessern. Natürliche, direkt beobachtbare Prozesse wie Licht und Schatten, Blitz, Mondphasen, Ebbe und Flut, Bewegung der Planeten etc. stellten lange Zeit die treibende Kraft für die physikalische Forschung dar. Gezielte Experimente mit technischen Hilfsmitteln wurden erst in den letzten beiden Jahrhunderten systematisch angewendet. Ein Verständnis für die natürliche Umwelt ist auch Voraussetzung für ihre Erhaltung: so ist ein physikalisches Verständnis für die Prozesse, die zur Veränderung des Klimas führen (Treibhauseffekt) eine wichtige Voraussetzung, diese Veränderungen zu korrigieren. Allerdings ist dieses Verständnis nur eine Voraussetzung: der politische Wille, etwas zu unternehmen, ist genau so wichtig.

Es wird heute viel davon gesprochen, dass wir eine Informationsgesellschaft sind, dass also unsere Kultur immer mehr von Informationen und weniger von Stoffen, Materialien und Artefakten bestimmt wird. Allerdings basiert auch die Speicherung und Verarbeitung von Information auf physikalischen Prozessen. Die Fortschritte in der Informatik wurden durch Fortschritte in der Halbleiterphysik (Prozessoren, Speicher) und Optik (optische Datenübertragung) ermöglicht und angetrieben. Physikalische Gesetze werden auch Grenzen für weitere Leistungssteigerungen setzen. Dass die Physik eine entscheidende Grundlage für die Informationsverarbeitung darstellt, wurde in den letzten Jahren erheblich klarer, als sich zeigte, dass die Quantenphysik ein neues Paradigma für Rechner bietet, welche für gewisse Aufgaben sehr viel leistungsfähiger sein könnten als existierende Rechner. Diese Rechnerarchitektur wird deshalb als Quantencomputer bezeichnet.

## 1.2.7 Bedeutung für die Zahnmedizin

Die Physik stellt eine Grundlage für alle Natur- und Ingenieurwissenschaften und die darauf aufbauend ebenso für viele Aspekte der (Zahn-)Medizin: Die Funktionen des menschlichen Körpers können auf der Basis von physikalischen Gesetzen erklärt werden. Darüber hinaus werden immer weitere Verfahren entwickelt, sowohl in der Diagnose wie auch in der Therapie, welche auf physikalischen Erkenntnissen basieren. Beispiele dafür werden in den einzelnen Kapiteln diskutiert.

## 1.3 Physik in Dortmund

### 1.3.1 Struktur der Fakultät



Abbildung 1.4: Struktur der Fakultät Physik.

Die Fakultät Physik umfasst insgesamt elf Lehrstuhlbereiche, das Institut für Beschleunigerphysik und Synchrotronstrahlung DELTA und die gemeinsamen Einrichtungen, zu denen die Werkstätten, Praktika und die Vorlesungssammlung gehören (→ Abb. 1.4). Die Lehrstuhlbereiche gliedern sich in zwei Schwerpunkte, die Festkörperphysik und die Elementarteilchenphysik. Ergänzt werden diese durch den Lehrstuhl für Beschleunigerphysik, welcher für Bau und Betrieb des Elektronenspeicherrings DELTA zuständig ist, sowie durch eine Professur für Medizinphysik.

### 1.3.2 Festkörperphysik

Der erste Schwerpunkt der physikalischen Forschung in Dortmund ist die Festkörperphysik. Der Schwerpunkt besteht aus drei experimentellen und zwei theoretischen Arbeitsgruppen.

Das Ziel festkörperphysikalischer Forschung (→ Abb. 1.5) ist ein besseres Verständnis für die Eigenschaften unterschiedlicher Materialien, wobei man



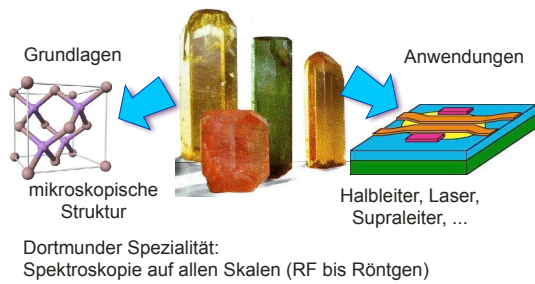


Abbildung 1.5: Themen der Festkörperphysik.

immer versucht, die makroskopischen Eigenschaften wie Farbe, Härte, usw. auf mikroskopische Eigenschaften wie z.B. atomare und elektronische Struktur zurückzuführen. Aus dieser Art von Forschung ergaben sich unterschiedlichste technische Anwendungen wie z.B. Halbleiter, Laser, Supraleiter etc. In Dortmund liegt die Stärke vor allem bei unterschiedlichen spektroskopischen Methoden, wobei der Frequenzbereich von Radiofrequenzen (d.h.  $10^3$  Hz) bis in den Röntgenbereich ( $10^{17}$  Hz) reicht.

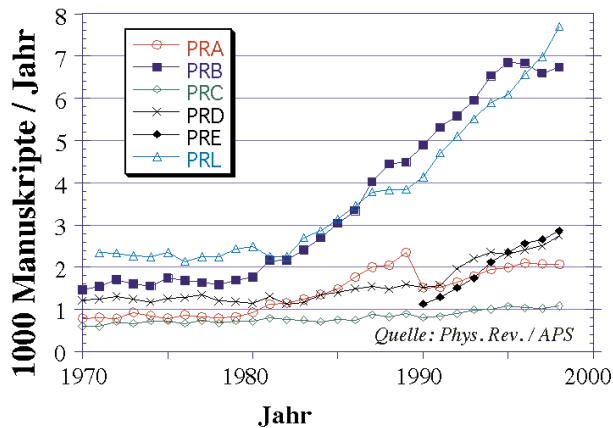
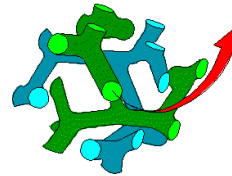
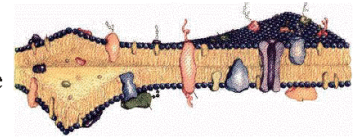


Abbildung 1.6: Zunahme der Zahl wissenschaftlicher Artikel mit der Zeit.

Die Festkörperphysik (resp. Physik der kondensierten Materie) ist auch international das aktivste Arbeitsgebiet der Physik. Dies sieht man z.B. wenn man die Zahl der publizierten Forschungsarbeiten verfolgt, wie in Abb. 1.6 gezeigt. Die dunkelblauen Punkte stellen die Anzahl der Manuskripte dar, welche pro Jahr in Physical Review, der wichtigsten Fachzeitschrift der Physik publiziert wurden. Man beobachtet ein starkes Ansteigen und insgesamt ei-

ne Zahl, die weit höher liegt als die jedes anderen Bereiches.

Weiche Materialien, Molekulare Systeme



Oberflächendominierte und mikrostrukturierte Materialien, Cluster

Abbildung 1.7: "Weiche Materie": Zusammentreffen von mikroskopischen und makroskopischen Längenskalen.

Während sich die Festkörperphysik früher primär mit idealen Kristallen beschäftigt hat werden heute vermehrt auch Systeme untersucht, welche keine langreichweitige Periodizität aufweisen. Dazu gehören z.B. sogenannte weiche Materialien (→ Abb. 1.7) wie z.B. Biomembranen oder Polymere. Neben dem Volumen der untersuchten Materialien interessiert man sich immer mehr auch für deren Oberflächen. Magnetische Materialien, wie sie für Datenspeicher verwendet werden, spielen eine wichtige Rolle, oder Gläser und andere amorphe Materialien.

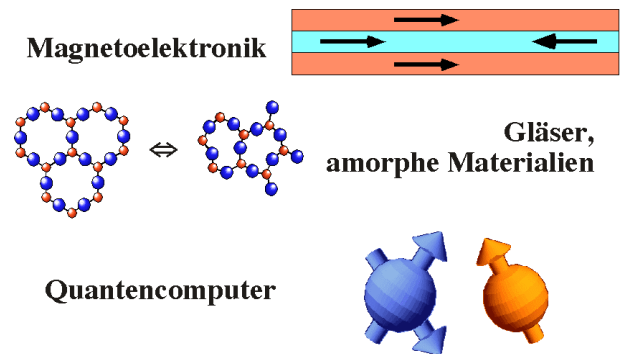


Abbildung 1.8: Aktuelle Themen der Festkörperphysik.

Ein aktuelles Forschungsgebiet der Physik ist das Thema "Quantencomputer". Hier trifft die Physik auf die Informatik und die Mathematik. Während die Theoretiker sich dafür interessieren wie man die Quantenmechanik nutzen kann um effizientere Computer zu bauen versuchen die Experimentatoren Ma-

aterialien zu optimieren um diese Konzepte verwirklichen zu können.

### 1.3.3 Teilchenphysik

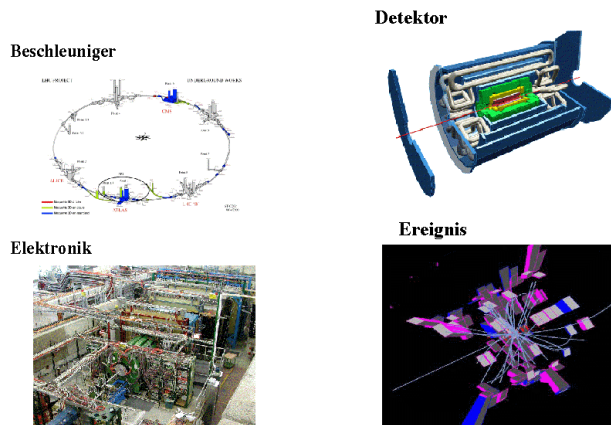


Abbildung 1.9: Teilchenphysik.

Während sich die Festkörperphysik mit den Eigenschaften und dem Aufbau makroskopischer Objekte beschäftigt interessiert sich die Teilchenphysik für den Aufbau der Materie an sich, d.h. sie untersucht die Grundbauteile der Atome, die Quarks und Leptonen. Dafür werden sehr große experimentelle Anlagen benötigt, so dass diese Experimente nicht in Dortmund durchgeführt werden, sondern an großen internationalen Forschungsanlagen wie z.B. CERN und DESY (→ Abb. 1.9).

### 1.3.4 Beschleunigerphysik / DELTA

Der Lehrstuhl Beschleunigerphysik und das Institut für Beschleunigerphysik und Synchrotronstrahlung IBS betreiben einen kleinen Elektronenspeicherring namens DELTA (→ Abb. 1.10). Mit elektromagnetischen Feldern werden Elektronen auf elliptischen oder kreisförmigen Bahnen auf hohe Geschwindigkeiten in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit gebracht. Solche Anlagen wurden zunächst entwickelt, um Elementarteilchen mit hoher Auflösung zu untersuchen. Ein störender Nebeneffekt war, dass die Energie, welche für die Beschleunigung der Teilchen benötigt wird, in Form von Strahlung

**D** Dortmund  
**EL** Elektronen  
**T** Testspeicher  
**A** Anlage



#### Mögliche Anwendungen

Synchrotronstrahlung 0.1 - 10000 eV

Strukturuntersuchungen in Physik, Chemie, Werkstoffkunde, Biologie, ...

Beschleunigerphysik:

Entwicklung neuer Konzepte, Testen von Komponenten

Abbildung 1.10: Synchrotronstrahlung bei DELTA.

wieder abgegeben wird. Dieser störende Effekt wurde später aber als sehr nützlich erkannt: Man baut heute große Speicherringe gerade zum Zweck, diese Strahlung zu nutzen. Zu den wichtigsten Anwendungen gehören Strukturuntersuchungen in der Chemie, Werkstoffkunde und der Biologie.

### 1.3.5 Medizinphysik

Die Medizinphysik benutzt physikalische Grundlagen, um die Funktionsweise des menschlichen Körpers besser zu verstehen, sowie um neue Methoden für Diagnose und Therapie zu entwickeln. Entsprechende Untersuchungen laufen an mehreren Lehrstühlen und die Arbeitsgruppe von Prof. Schneider befasst sich schwerpunktmäßig mit diesen Themen.

## 1.4 Mathematische Grundlagen

Galileo Galilei schrieb in seinem Buch "Il Saggiatore" (die Goldwaage):

Die Philosophie steht in diesem großen Buch geschrieben, das unserem Blick ständig offen liegt. Aber das Buch ist nicht zu verstehen, wenn man nicht zuvor die Sprache erlernt und sich mit den Buchstaben vertraut gemacht hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben....

### 1.4.1 Komplexe Zahlen

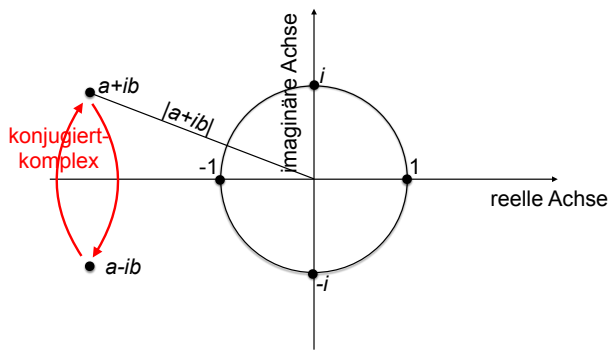


Abbildung 1.11: Die komplexe Ebene.

Da die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  im Raum der reellen Zahlen keine Lösung hat, definiert man eine neue Zahl mit der gewünschten Eigenschaft. Diese Zahl wird mit  $i$  bezeichnet und ist durch die folgende Eigenschaft definiert:

$$i^2 = -1.$$

Man nennt  $i$  die „imaginäre Einheit“. Vielfache von  $i$  sind imaginäre Zahlen. Damit hat die Gleichung jetzt die Lösungen  $x_{1,2} = \pm i$ .

Komplexe Zahlen sind darstellbar aus Summe aus einem reellen Teil und einem imaginären Teil:

$$z = a + ib$$

mit  $a$  und  $b$  reell.  $a$  wird als Realteil von  $z$  bezeichnet,  $b$  als Imaginärteil:

$$\Re(z) = a, \quad \Im(z) = b.$$

Komplexe Zahlen können in der komplexen Ebene dargestellt werden, meist mit der reellen Achse entlang der horizontalen Achse und die imaginäre Achse nach oben. Dadurch erhält man natürlicherweise einen Absolutbetrag (Länge des Vektors) und eine Phase (Winkel von der  $x$ -Achse).

Zu jeder komplexen Zahl  $z = a + ib$  existiert die zu ihr konjugiert-komplexe Zahl  $z^* = a - ib$ . Offenbar ist  $(z^*)^* = z$ . In der komplexen Zahlenebene entspricht dies einer Spiegelung an der reellen Achse.

Der Betrag einer komplexen Zahl  $z = a + ib$  errechnet sich nach Pythagoras als

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^*a + b^*b} = \sqrt{aa^* + bb^*}.$$

Rechenregeln:

Addition:  $z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + i(b_1 \pm b_2)$

Multiplikation:  $z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{z^*}{zz^*} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Division:  $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*}$

Algebraische Gleichungen:

Im Bereich der komplexen Zahlen hat eine Gleichung mit einem Polynom  $n$ -ten Grades immer  $n$  Lösungen, sofern man doppelte Nullstellen doppelt zählt. Für eine quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

gilt z.B.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Bsp.:  $x^2 - 2x + 10 = 0$ :

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 10} = 1 \pm \sqrt{-9} = 1 \pm 3i.$$

### 1.4.2 Euler Formel

Komplexe Zahlen sind nützlich für die Berechnung von periodischen Funktionen. Dabei verwendet man die Exponentialfunktion  $e^x$  mit einem komplexen Exponenten,

$$f(z) = e^z.$$



Berechnet man die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

dann findet man, dass für einen rein imaginären Exponenten  $i\varphi$  mit  $\varphi$  reell der Funktionswert identisch ist mit einer komplexen Zahl

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Diese ist bekannt als Euler-Formel<sup>[1]</sup>

Ist der Exponent nicht rein imaginär, sondern komplex, so verwendet man die allgemeine Regel

$$x^{a+b} = x^a x^b.$$

Die Exponentialfunktion einer komplexen Zahl  $z = a + ib$  ist somit

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Solche Funktionen sind deshalb wichtig für die Lösung von schwingenden Systemen, wo  $a$  und  $b$  meist lineare Funktionen der Zeit sind. Der reelle Teil des Exponenten beschreibt das Schrumpfen (oder Wachsen) der Amplitude, der imaginäre Teil die Schwingungsfrequenz. Beispiel:

$$f(t) = e^{i\omega t} e^{-t/\tau}.$$

Grundsätzlich kann jede komplexe Zahl auch in der Form  $e^{a+ib}$  dargestellt werden. Multipliziert man 2 solche Zahlen, so gilt offenbar

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= e^{a_1+ib_1} e^{a_2+ib_2} = e^{a_1+a_2+i(b_1+b_2)} \\ &= |z_1| |z_2| e^{i(b_1+b_2)}. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass sich die Beträge multiplizieren und die Phasen addieren.

$$\begin{aligned} (e^{ib})^n &= e^{inb} \\ \sqrt[n]{e^{ib}} &= e^{ib/n}, e^{i(b+2\pi)/n}, \dots, e^{i(b+2(n-1)\pi)/n}, \end{aligned}$$

also  $n$  Lösungen gleichmäßig verteilt auf dem Einheitskreis.

<sup>1</sup>Leonard Euler (1707 - 1783)

### 1.4.3 Vektoren

In der Physik, wie auch im täglichen Leben, gibt es Größen, welche durch eine einzige Zahl quantifiziert werden können. Dazu gehören z.B. die Masse eines Körpers oder sein Volumen. Daneben gibt es aber auch Größen, welche nicht nur eine Länge, sondern auch eine Richtung im Raum haben - solche Größen werden als Vektoren bezeichnet. Vektoren werden meistens auf ein bestimmtes Koordinatensystem bezogen. Die Anzahl Elemente des Vektors ist dann gleich der Anzahl der Einheitsvektoren im Koordinatensystem und wird als Dimension bezeichnet. Beispiele von Vektoren sind

$$\vec{x} = \left\{ \begin{array}{l} 1,2 \\ 3,4 \end{array} \right\}, \quad \vec{y} = \left\{ \begin{array}{l} 1,2 \\ 3,4 \\ 7,8 \end{array} \right\}.$$

Ein Vektor kann auch zwei Punkte verbinden: Ein Vektor  $\vec{AB}$  zeigt eine Verschiebung vom Punkt  $A$  zum Punkt  $B$ .

Für die Physik relevant sind lineare Vektorräume. In diesen Räumen ist die Addition von Vektoren definiert, und die Summe zweier Vektoren muss ebenfalls im Raum liegen:

$$\vec{a}, \vec{b} \in V \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in V.$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} \\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \\ \exists \vec{0} &: \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \\ \exists -\vec{a} &: \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \text{ für } \forall \vec{a} \in V \end{aligned}$$

Bei einem gegebenen (oder gewählten) Ursprung  $O$  des Koordinatensystems ist jedem Punkt  $A$  des Raums ein Vektor  $\vec{OA}$  zugeordnet. Ein beliebiger Vektor  $\vec{AB}$  kann immer durch diese Vektoren dargestellt werden:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}.$$

Vektoren werden durch ihre Komponenten, respektive die Koordinaten der entsprechenden Punkte definiert. Die übliche Schreibweise für Vektoren in 3D

ist

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{a} = (a_x, a_y, a_z).$$

Die Vektoraddition in Komponentenschreibweise lautet

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}.$$

Werden 2 Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  über ein Vektorprodukt verknüpft, so ist das Resultat ein Vektor, welcher senkrecht auf den beiden ursprünglichen Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  steht.

Die Länge (der Betrag) eines Vektors ergibt sich nach Pythagoras zu

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Vektoren können auch mit reellen (oder komplexen) Zahlen multipliziert werden:

$$a\vec{v} = a \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_x \\ av_y \\ av_z \end{pmatrix}.$$

Dabei ändert sich der Betrag aber nicht die Richtung.

### 1.4.4 Koordinatensysteme

Das am häufigsten verwendete Koordinatensystem ist das kartesische <sup>2</sup>Koordinatensystem. In diesem System sind, in 3 Dimensionen, die drei Koordinatenachsen senkrecht zueinander und die Einheiten sind gleich lang. Die Orientierung der Koordinatenachsen in der Reihenfolge  $x, y$  und  $z$  ist der ersten 3 Finger (Daumen, Zeige- und Mittelfinger) der rechten Hand. Man spricht deshalb von einem rechtshändigen Koordinatensystem.

Ein anderes System, welches für die Beschreibung von Systemen mit zylindrischer Symmetrie nützlich ist, ist das zylindrische Koordinatensystem. Hier

<sup>2</sup>Benannt nach dem latinisierten Namen Cartesius des französischen Mathematikers René Descartes (1596 - 1650).

sind die drei Koordinaten eines Punktes durch den Abstand  $\rho$  vom Ursprung, den Winkel  $\varphi$  und die Höhe  $z$  gegeben. Die Umrechnung in kartesische Koordinaten ist gegeben durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Das dritte System sind die Kugelkoordinaten. Sie bestehen aus dem Abstand  $r$  vom Zentrum und den beiden Winkeln  $\theta$  und  $\varphi$ . Die Umrechnung in kartesische Koordinaten ist gegeben durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

### 1.4.5 Differentialrechnung

Eine Gerade ist durch eine Gleichung des Typs

$$y(x) = mx + b$$

definiert. Ihre Steigung beträgt

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$$

und ist konstant für die gesamte Gerade.

Für eine allgemeine Funktion  $y(x)$  variiert die Steigung mit dem Ort  $x$ . Man kann eine mittlere Steigung für einen Bereich  $\Delta x$  definieren als

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

genau wie bei der Geradengleichung. Macht man den Bereich  $\Delta x$  infinitesimal klein, so erhält man die Ableitung der Funktion,

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$y = ax^2.$$

Hier ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x + \Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} = \frac{a(2x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x}.$$

Der Grenzwert davon ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax.$$

Für höhere Potenzen von  $x^n$  gilt

$$(x_1 + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \dots$$

und damit

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}.$$

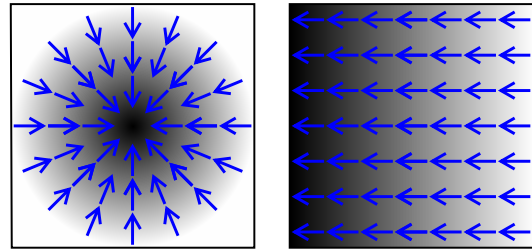


Abbildung 1.12: Zwei Beispiele für Gradienten von skalaren Feldern. Die Pfeile bezeichnen die Gradienten, der graue Hintergrund das skalare Feld.

### 1.4.6 Ableitung von Funktionen

Neben den Polynomen kann man entsprechende Regeln für die elementaren Funktionen der Mathematik herleiten:

$\frac{d}{dx}x^n$	$nx^{n-1}$
$\frac{d}{dx}\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{d}{dx}\sin x$	$\cos x$
$\frac{d}{dx}\cos x$	$-\sin x$
$\frac{d}{dx}\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\frac{d}{dx}e^x$	$e^x$

Die Ableitung ist linear, d.h. die Ableitung einer Summe ist die Summe der Ableitungen:

$$\frac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) = a\frac{df(x)}{dx} + b\frac{dg(x)}{dx}.$$

Für Produkte von Funktionen gilt

$$\frac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) = a\frac{df(x)}{dx} + b\frac{dg(x)}{dx}.$$

### 1.4.7 Differentialoperatoren für Vektorfelder

Der Nabla-Operator  $\vec{\nabla}$  ist definiert als

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}.$$

Er wird verwendet für die wichtigsten Operatoren der Vektor-Analyse: Gradient, Divergenz und Rotation.

Der Gradient bezeichnet die Richtung und den Betrag des steilsten Anstiegs eines skalaren Feldes  $\Phi$ :

$$\vec{grad}\Phi = \vec{\nabla}\Phi = \begin{pmatrix} \partial\Phi/\partial x \\ \partial\Phi/\partial y \\ \partial\Phi/\partial z \end{pmatrix}.$$

Die Divergenz bezeichnet die Dichte an Quellen oder Senken eines Vektorfeldes  $\vec{v}$ :

$$\text{div}\vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \text{div}\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Beispiel:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \text{div}\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Dieses Feld hat somit überall Quellen, mit konstanter Dichte. Die Rotation eines Vektorfeldes ist selber ein Vektorfeld:

$$\vec{rot}\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

In kartesischen Koordinaten ist der Gradient

$$\vec{grad} = \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

In Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \varphi)$  ist er

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}.$$

Divergenz : Gegeben sei

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bsp. 3 : Gegeben sei

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -x-y \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix}$$

BP 4 : Gegeben sei

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} xy \\ 2y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rotation : Gegeben sei

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 1.4.8 Integralrechnung

Das Ziel der Integralrechnung kann so formuliert werden: Man sucht die Fläche, welche durch eine Funktion  $f(x)$  auf der oberen Seite und die  $x$ -Achse unten begrenzt wird. Links und rechts kann man Integralgrenzen setzen - dies sind bestimmte Integrale. Setzt man keine Grenzen, so handelt es sich um ein unbestimmtes Integral.

### 1.4.9 Einfaches Beispiel: $f(x) = x$

Für die Berechnung teilt man die Fläche in  $n$  schmale Streifen ein. Die Breite eines Streifens ist

$$\Delta x = \frac{x_b - x_a}{n}.$$

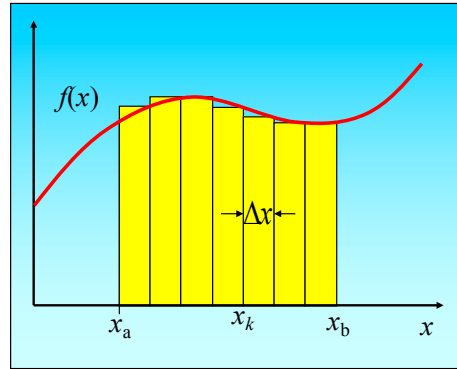


Abbildung 1.13: Integral als Fläche unter einer Kurve.

Hier sind  $x_a$  und  $x_b$  der untere und der obere Rand des zu integrierenden Bereichs und  $n$  ist die Zahl der Streifen. Die Höhe des Streifens bei  $x_k$  ist  $f(x_k)$ . Dann kann man die Fläche schreiben in der Form

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx.$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man als „bestimmtes Integral“ der Funktion  $f(x)$  in den Grenzen  $x_a, x_b$ .

Beispiel: zu berechnen sei das Integral der Funktion  $f(x) = x$  zwischen den Grenzen  $x_a$  und  $x_b$ . Die Summenformel ergibt

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \sum_{k=1}^n x_k \Delta x \\ &= \sum_{k=1}^n (x_a + k \Delta x) \frac{x_b - x_a}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n x_a \frac{x_b - x_a}{n} + \sum_{k=1}^n k \left( \frac{x_b - x_a}{n} \right)^2 \\ &= x_a \frac{x_b - x_a}{n} \sum_{k=1}^n 1 + \left( \frac{x_b - x_a}{n} \right)^2 \sum_{k=1}^n k. \end{aligned}$$

Die beiden Summen sind

$$\sum_{k=1}^n 1 = n \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Somit ist die Summe

$$S = x_a(x_b - x_a) + (x_b - x_a)^2 \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Das Integral erhält man aus dem Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [x_a(x_b - x_a) + (x_b - x_a)^2 \frac{n(n+1)}{2n^2}] = x_a x_b - \frac{x_a^2}{2} + \frac{x_b^2}{2} + x_a^2 \frac{x_b - x_a}{2} \frac{I}{2\pi r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{I}{\pi r^2},$$

### 1.4.10 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation

$$F(x) = \int f(x') dx' \Leftrightarrow \frac{dF}{dx} = f(x).$$

Eine Funktion  $F(x)$  ist eine Stammfunktion der Funktion  $f(x)$  falls

$$\frac{dF}{dx} = f(x).$$

### 1.4.11 Satz von Stokes

Man betrachtet eine vektorielle Ortsfunktion  $\vec{v}(\vec{r})$ . Der Satz von Stokes lautet, dass das Integral von  $\vec{v}(\vec{r})$  entlang dem Rand einer Fläche  $A$  gleich dem Flächenintegral der Rotation von  $\vec{v}(\vec{r})$  ist:

$$\oint ds \vec{v}(\vec{r}) = \iint_A d\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r}),$$

wobei  $d\vec{A}$  senkrecht auf  $A$  steht. Der Umlaufsinn für das Linienintegral wird so gewählt, dass  $d\vec{A}$  mit der Bewegung eine Rechtsschraube ergibt.

Beispiel: Ein gerader elektrischer Leiter entlang der  $z$ -Achse erzeugt ein Magnetfeld

$$\vec{H}(x, y) = \frac{I}{2\pi r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi r} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir integrieren entlang einem Kreis mit Radius  $r$

$$\oint ds \vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = I.$$

Andererseits kann man die Rotation des Feldes berechnen,

also gleich der Stromdichte. Dies entspricht dem Ampère'schen Durchflutungsgesetz: Das Integral des Magnetfeldes entlang einer geschlossenen Kurve ergibt die Stromdichte.

### 1.4.12 Satz von Gauß

Man betrachtet eine vektorielle Ortsfunktion  $\vec{v}(\vec{r})$ . Der Satz von Gauß sagt, dass das Integral des Flusses von  $\vec{v}(\vec{r})$  durch die Oberfläche  $A$  eines Volumens  $V$  gleich dem Volumenintegral der Divergenz von  $\vec{v}$  ist:

$$\iint_A d\vec{A} \cdot \vec{v}(\vec{r}) = \iiint_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}).$$

Beispiel: das elektrische Feld einer Punktladung bei  $\vec{r} = 0$  ist

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Das Flächenintegral des Flusses durch eine Kugel mit Radius  $r$  beträgt

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Die Divergenz des Feldes beträgt

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

In Kugelkoordinaten kann die Divergenz gerechnet werden als

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{v} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_\varphi. \end{aligned}$$

Da  $\vec{r}/r^3$  nicht von  $\theta$  und  $\varphi$  abhängt, vereinfacht sich das zu

$$\text{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r).$$



$r^2 v_r$ , entspricht einem Einheitsvektor in radialer Richtung; die Ableitung nach  $r$  verschwindet demnach überall, außer bei  $\vec{r}=0$ .

Der Gauß'sche Integralsatz verknüpft den Fluss eines Vektorfeldes durch eine geschlossene Oberfläche  $A$  mit einem entsprechenden Integral der Divergenz des Vektorfeldes über das Volumen  $V(A)$ . Es verknüpft damit lokale Eigenschaften des Vektorfeldes mit integralen Eigenschaften. Der Satz wurde wahrscheinlich zum ersten Mal von Joseph Louis Lagrange im Jahre 1762 formuliert und unabhängig davon später von Carl Friedrich Gauß (1813), George Green (1825) und Michail Ostrogradski (1831) neu entdeckt. Ostrogradski lieferte auch den ersten formalen Beweis.

Der Satz lautet

$$\iint_A \vec{F}(\vec{r}) d\vec{A} = \iiint_{V(A)} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) dV.$$

Beispiel aus der Elektrostatik:  $\vec{F} = \vec{D}$ , also die elektrische Verschiebung. Die Divergenz dieses Feldes,  $\vec{D} = \rho_{el}$  ist die elektrische Ladung. Somit ist das Integral der elektrischen Verschiebung über eine beliebige Oberfläche gleich der darin eingeschlossenen Ladung  $Q$ :

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q.$$

Für einen Körper, der keine Ladung enthält, gilt somit

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0.$$

### 1.4.13 Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung ist eine Beziehung zwischen einer Funktion  $f$  und einer oder mehrere ihrer Ableitungen. Ein Beispiel ist die Differentialgleichung

$$\frac{df}{dt} = -kf.$$

Hier handelt es sich um eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten

Koeffizienten: Die Funktion und ihre Ableitungen kommen nur in der ersten Potenz vor, es kommt kein Term vor, welcher die Funktion nicht enthält, es treten nur die Funktion und ihre erste Ableitung auf und der Koeffizient  $k$  hängt nicht von der Zeit ab.

Eine Lösung der Differentialgleichung ist eine Funktion  $f(t)$ . Für die einfachen Differentialgleichungen, welche im Rahmen der Vorlesung behandelt werden, gibt es Regeln, wie man die Lösungen findet. Häufig macht man einen Ansatz, d.h. man schreibt eine Funktion  $f(t)$ , welche noch von Parametern abhängt, und setzt diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein. Beim aktuellen Beispiel ist der beste Ansatz

$$f(t) = Ae^{-kt}.$$

Einsetzen ergibt

$$\frac{df}{dt} = -Ake^{-kt} = -kAe^{-kt}.$$

Offenbar erfüllt dieser Ansatz die Differentialgleichung für beliebige Werte von  $A$ . Den korrekten Wert bestimmt man aus einer zusätzlichen Bedingung. Im Fall von zeitabhängigen Differentialgleichungen wie im vorliegenden Fall ist dies häufig eine Anfangsbedingung: man kennt zusätzlich den Wert von  $f(t)$  zur Zeit  $t = 0$ :  $f(0) = A_0$ . Einsetzen ergibt dann die Lösung

$$f(t) = A_0 e^{-kt},$$

was in vorliegenden Fall auch die einzige Lösung ist.

## 1.5 Physikalische Größen, Maßeinheiten

### 1.5.1 Grundlagen und Definitionen

Physik ist eine explizit quantitative Wissenschaft, d.h. man versucht möglichst viele Phänomene quantitativ zu erfassen. Eine Voraussetzung um Messungen durchführen und Resultate vergleichen zu können ist ein Einheitensystem. Dieses besteht aus einer Reihe von Maßeinheiten. Darunter versteht man eine

bestimmte Quantität einer bestimmten Größe, welche zu Vergleichszwecken herangezogen wird. Eine Messung beinhaltet den Vergleich der zu messenden Größe mit der Referenzgröße, der Einheit. Dabei muss der Vergleich nicht immer direkt erfolgen. So wird der Durchmesser eines Atoms oder einer Galaxis nicht direkt mit dem Urmeter erfolgen. Jedes Messresultat, d.h. jede quantitative Angabe, besteht deshalb aus einer Maßzahl und einer Einheit, z.B. 1,8 m.

Es existieren sehr viele Größen, die nicht direkt miteinander verglichen werden können, wie z.B. Distanz und Geschwindigkeit. Trotzdem benötigt man nicht für jede Größe eine eigene Maßeinheit, sondern man stellt z.B. die Geschwindigkeit als Verhältnis von Weg zu Zeit dar. Bei der Wahl der Größen, die man als unabhängig betrachtet, besitzt man eine gewisse Freiheit. In der Physik hat man sich darauf geeinigt, als Einheitensystem das SI-System zu verwenden.

### 1.5.2 Grundgrößen im SI-System

Im SI-System verwendet man sieben Grundgrößen:

Größe	Einheit	Abkürzung
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
Elektrische Stromstärke	Ampère	A
Temperatur	Kelvin	K
Substanzmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

Zu jeder dieser Größen gehört auch eine Definition der entsprechenden Einheit (siehe Tabelle [1.5.2](#)).

Ursprünglich waren die meisten dieser Grundgrößen durch Artefakte wie den Urmeter definiert. Dies hatte den Vorteil, dass sie eindeutig und relativ leicht zu definieren waren. Der Nachteil dieser Methode war, dass man damit an einen bestimmten Ort gebunden war und an einem andern Ort nur schwer Zugang hatte. Außerdem stieß man mit der Zeit an Grenzen der Genauigkeit. Der Meter z.B. wurde ursprünglich definiert als zehnmillionstel mal einen Quadranten des Erdumfangs definiert, d.h. als  $10^{-7}$  mal den

Abstand vom Pol zum Äquator. Es wurde dann mit großem Aufwand dieser Abstand gemessen (resp. ein Teil davon, von Barcelona nach Dünkirchen) und nach diesen Maßen ein "Urmeter" hergestellt, welcher in Paris aufbewahrt wird. Genauere Messungen zeigten, dass dieser um einen Faktor  $1.8 \cdot 10^{-4}$  kürzer war als er gemäß Definition hätte sein sollen. Man einigte sich dann aber, beim Urmeter zu bleiben.

Als die Messgenauigkeit weiter zunahm war die Definition über ein Artefakt unbefriedigend, da (i) die Ablesegenauigkeit beschränkt ist und (ii) eine Definition vorzuziehen ist, die an jedem beliebigen Ort reproduziert werden kann. Man einigte sich dann darauf, den Meter zu definieren als 1650736,73 Wellenlängen des Lichtes, welches das Isotop  $^{86}\text{Kr}$  beim Übergang  $2p_{10} \rightarrow 5d_5$  emittiert.

Da Längenmessungen mit größeren Unsicherheiten behaftet sind als Frequenzmessungen erreichte man eine weitere Steigerung der Genauigkeit in der Definition des Meters als man sich einigte, die Lichtgeschwindigkeit als feste Größe zu definieren, so dass ein Meter jetzt definiert ist als die Distanz, welche das Licht im Vakuum in einer Zeit  $1/299792458$  Sekunden durchläuft. Damit ist die Präzision nur noch durch die Genauigkeit der Zeit/Frequenzmessung beschränkt, welche zur Zeit bei  $\approx 10^{-14}$  liegt.

Ähnlich hat man in den letzten Jahren andere Größen auf Phänomene zurückgeführt, welche mit hoher Präzision reproduziert werden können. Grundsätzlich besteht eine große Freiheit, welches physikalische Experiment man für die Definition einer Grundgröße wählt. Entscheidend ist dabei, dass der relevante Effekt möglichst genau und reproduzierbar gemessen werden kann. Deshalb wählt man z.B. für die Definition der Temperatur nicht den Gefrierpunkt von Wasser (der hängt vom Druck ab, ist also eine Gefrierlinie), sondern den Tripelpunkt. Die einzige Größe, die noch mit Hilfe eines Artefakts definiert ist, ist die Masse. Dies wurde letztmals am 20. Mai 2019 geändert, indem neue Definitionen der Maßeinheiten Kilogramm, Ampere, Kelvin und Mol in Kraft gesetzt wurden.

Basisgröße	Basiseinheit	Symbol	Definition	relative Unsicherheit
Zeit	Sekunde	s	1 Sekunde ist das 9 192 631 770 fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur-Niveaus des Grundzustands von Atomen des Nuklids $^{133}\text{Cs}$ entsprechenden Strahlung.	$10^{-14}$
Länge	Meter	m	1 Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von 1/299 792 458 Sekunden durchläuft.	$10^{-14}$
Masse	Kilogramm	kg	1 Kilogramm ist die Masse des internationalen Kilogrammprototyps.	$10^{-9}$
Elektrische Stromstärke	Ampere	A	1 Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen Stroms, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorruft.	$10^{-6}$
Temperatur	Kelvin	K	1 Kelvin ist der 273,16 te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunkts des Wassers.	$10^{-6}$
Substanzmenge	Mol	mol	1 Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebensoviel Einzelteilchen besteht, wie Atome in 12/1000 Kilogramm des Kohlenstoffnuklids $^{12}\text{C}$ enthalten sind.	$10^{-6}$
Lichtstärke	Candela	cd	1 Candela ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz 540 THz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung 1/683 W/sr beträgt.	$10^{-3}$

Tabelle 1.1: Definition und relative Unsicherheit der Basisgrößen.

### 1.5.3 Zehnerpotenzen: Vorsilben und Abkürzungen

Meist sind die zu messenden Größen von einer anderen Größenordnung als die Grundgrößen. Um leicht handhabbare Zahlen zu erhalten verwendet man deshalb nicht die Einheiten kg, m und s, sondern Einheiten, die sich dadurch um Zehnerpotenzen unterscheiden. Für diese Einheiten verwendet man Vorsil-

ben, welche von lateinischen und griechischen Ausdrücken abgeleitet sind.

Weitere Einheiten, welche nicht in dieses System fallen, sind z.B.  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ , 1 min = 60s, Stunde, Jahr, Tonne (1 t = 1000 kg = 1 Mg), etc.

Faktor	Name	Symbol
$10^{24}$	yotta	Y
$10^{21}$	zetta	Z
$10^{18}$	exa	E
$10^{15}$	peta	P
$10^{12}$	tera	T
$10^9$	giga	G
$10^6$	mega	M
$10^3$	kilo	k
$10^2$	hecto	h
$10^1$	deka	da
$10^{-1}$	deci	d
$10^{-2}$	centi	c
$10^{-3}$	milli	m
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-12}$	pico	p
$10^{-15}$	femto	f
$10^{-18}$	atto	a
$10^{-21}$	zepto	z
$10^{-24}$	yocto	y

Tabelle 1.2: Abkürzungen für Zehnerpotenzen.

### 1.5.4 Abgeleitete Größen

Neben den Grundgrößen werden viele weitere Größen verwendet, welche aus den Grundgrößen abgeleitet werden können. Ein einfaches Beispiel ist die Fläche  $A$ , welche durch das Quadrat einer Länge  $\ell$  definiert wird:

$$A = \ell^2$$

oder die Geschwindigkeit als Verhältnis aus Weg und Zeit:

$$v = \frac{\ell}{t}$$

Die Einheiten dieser Größen sind deshalb auch als Vielfache der Grundeinheiten bestimmt. Für viele der Einheiten der abgeleiteten Größen hat man jedoch eigene Namen eingeführt, wie z.B. das Coulomb C als Einheit der Ladung als Produkt aus Ampère A und Sekunde s:  $1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$ . Abb. [1.14](#) zeigt eine Übersicht.

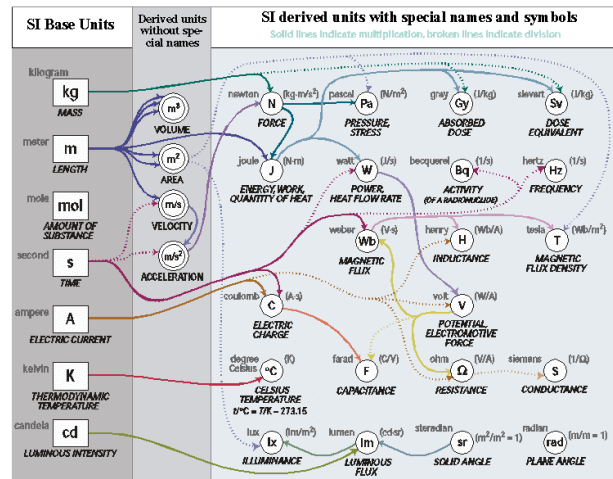


Abbildung 1.14: Abgeleitete Größen und ihre Einheiten.

Welche Größen man als Grundgrößen verwendet und welche als abgeleitete Größen ist grundsätzlich freigestellt. So sieht man häufig die elektrische Ladung, nicht den Strom als Grundgröße an. Der Grund, dass man im SI-System den Strom gewählt hat ist, dass eine entsprechende Eichgröße leichter reproduzierbar definiert und hergestellt werden konnte.

Grundsätzlich könnte man diese Größen auch unabhängig definieren. Die Ableitung aus den Grundgrößen erlaubt jedoch eine dramatische Reduzierung der notwendigen Standards und erlaubt erst konsistente Messungen: Im anderen Fall wäre nicht garantiert, dass eine Fläche, welche durch ein Quadrat mit 1 m Seitenlänge gebildet wird, gerade der Grundeinheit der Fläche entspricht.

### 1.5.5 Naturkonstanten

Physikalische Gesetze enthalten eine Reihe von Größen, welche nicht abgeleitet werden können, sondern als primäre Parameter eingehen. Diese können über Messungen bestimmt werden. Zu den bekanntesten dieser Naturkonstanten gehört die Lichtgeschwindigkeit, welche ursprünglich definiert war als die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum. Sie konnte somit z.B. über eine Messung von Frequenz und Wellen-

länge eines Lichtfeldes bestimmt werden. Heute ist die Lichtgeschwindigkeit definiert als  $c = 2,99792458 \cdot 10^8$  m/s, d.h. Länge und Zeit sind fest verknüpft über diese definierte Konstante.

Die meisten anderen Konstanten ( $\rightarrow$  Abb. 1.15) müssen nach wie vor über Messungen bestimmt werden und sind damit mit Unsicherheiten verbunden. Die Unsicherheit nimmt mit der Zeit aufgrund der zunehmenden Messgenauigkeit ab, so dass im Abstand von mehreren Jahren jeweils genauere Werte dieser Naturkonstanten publiziert werden. Die jeweils allgemein akzeptierten Werte werden von der CODATA Kommission publiziert und können auf dem Internet unter <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html> abgerufen werden.

## 1.6 Messfehler

Jede Messung ist mit Fehlern behaftet. Das Ziel jeder Messung ist es, diese Fehler möglichst klein zu halten. Es gibt jedoch Grenzen für die Präzision jeder Messung - einerseits fundamentale Grenzen, andererseits instrumentell bedingte Grenzen. Es ist deshalb wichtig, damit umgehen zu können. Hier werden lediglich die Grundlagen diskutiert.

Man unterscheidet zwei Arten von Fehlern : systematische und statistische Fehler.

### 1.6.1 Systematische Fehler

Dies sind Fehler, die bei einer Wiederholung der gleichen Messung identisch auftreten. Dazu gehören u.a. falsche Kalibrierung von Messgeräten. Als einfaches Beispiel sei eine Gewichtsmessung mit einer Waage genannt: Handelt es sich um eine Federwaage kann die Feder seit der letzten Eichung gealtert sein. Handelt es sich um eine Waage mit einem Gegengewicht so spielt der Luftdruck eine Rolle. Ist die Waage falsch aufgestellt wird sie ebenfalls systematisch falsch anzeigen. Temperaturschwankungen haben meist einen Einfluss auf das Messresultat.

Systematische Fehler können deshalb nur durch Kontrolle des Messaufbaus und unabhängige Rea-

lisierungen der gleichen Messung verringert werden. Im obigen Beispiel kann man eine Abschätzung des systematischen Fehlers erhalten, indem man den gleichen Gegenstand mit unterschiedlichen Waagen misst. Man systematisiert dies u.a. durch sogenannte Ringversuche, bei denen die gleiche Probe in verschiedenen Labors untersucht wird.

### 1.6.2 Statistische Fehler

Als statistische Fehler bezeichnet man solche, die bei Wiederholungen der gleichen Messung unterschiedlich auftreten. Dazu gehören z.B. thermische Schwankungen des Messgerätes. Zwei aufeinanderfolgende Messungen werden i.a. nicht exakt übereinstimmen. Das Resultat einer Messung ist deshalb nie der 'wahre Wert', sondern das Ziel ist es, die bestmöglichen Schätzwerte für den Erwartungswert ( $\sim$  den 'wahren' Wert) und dessen Fehler zu erhalten.

Wiederholt man eine bestimmte Messung mehrfach, so wird man eine Reihe von Resultaten erhalten, welche wir schreiben als  $x_i = \mu + \delta x_i$ . Hier stellt  $\mu$  den Erwartungswert für die Messgröße dar und  $\delta x_i$  den statistischen Fehler der Einzelmessung.

Dieses Verhalten sollte anhand eines Versuches in der Vorlesung verifiziert werden. Dafür wurden die Studierenden gebeten, die Länge eines A4 Blattes mit einer Präzision von 0,1 mm zu messen. Die in Abb. 1.16 gezeigte Auswertung ergab, dass die Hälfte von 54 Studierenden ein Resultate von 29,60 mm gefunden hatten. Hier handelt es sich offenbar um einen systematischen Fehler; vermutlich wurde dieser "einfache" Wert benachbarten, ebenso wahrscheinlichen Werten vorgezogen. Der theoretische Wert beträgt 29,73 cm; ein wirkliches Papier zeigt jedoch immer Abweichungen von diesem Wert.

Um solche systematischen Fehler aufgrund menschlicher Präferenzen zu vermeiden, werden Messungen meist elektronisch durchgeführt. Abb. 1.17 zeigt ein Beispiel, bei dem eine nominell konstante Spannung wiederholt gemessen wurde. Man sieht deutlich eine Verteilung um den Mittelwert von ca. 2,08 mV. Da wir davon ausgehen, dass es sich um rein zufällige Fehler handelt, verschwindet der Mittelwert



## Fundamental Physical Constants — Universal constants

Quantity	Symbol	Value	Unit	Relative std. uncert. $u_r$
speed of light in vacuum	$c, c_0$	299 792 458	$\text{m s}^{-1}$	(exact)
magnetic constant	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$ $= 12.566 370 614... \times 10^{-7}$	$\text{N A}^{-2}$ $\text{N A}^{-2}$	(exact)
electric constant $1/\mu_0 c^2$	$\epsilon_0$	$8.854 187 817... \times 10^{-12}$	$\text{F m}^{-1}$	(exact)
characteristic impedance of vacuum $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = \mu_0 c$	$Z_0$	376.730 313 461...	$\Omega$	(exact)
Newtonian constant of gravitation	$G$	$6.674 28(67) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$	$1.0 \times 10^{-4}$
	$G/\hbar c$	$6.708 81(67) \times 10^{-39}$	$(\text{GeV}/c^2)^{-2}$	$1.0 \times 10^{-4}$
Planck constant	$h$	$6.626 068 96(33) \times 10^{-34}$	$\text{J s}$	$5.0 \times 10^{-8}$
in eV s		$4.135 667 33(10) \times 10^{-15}$	$\text{eV s}$	$2.5 \times 10^{-8}$
$h/2\pi$	$\hbar$	$1.054 571 628(53) \times 10^{-34}$	$\text{J s}$	$5.0 \times 10^{-8}$
in eV s		$6.582 118 99(16) \times 10^{-16}$	$\text{eV s}$	$2.5 \times 10^{-8}$
$\hbar c$ in MeV fm		197.326 9631(49)	$\text{MeV fm}$	$2.5 \times 10^{-8}$
Planck mass $(\hbar c/G)^{1/2}$	$m_P$	$2.176 44(11) \times 10^{-8}$	$\text{kg}$	$5.0 \times 10^{-5}$
energy equivalent in GeV	$m_P c^2$	$1.220 892(61) \times 10^{19}$	$\text{GeV}$	$5.0 \times 10^{-5}$
Planck temperature $(\hbar c^5/G)^{1/2}/k$	$T_P$	$1.416 785(71) \times 10^{32}$	$\text{K}$	$5.0 \times 10^{-5}$
Planck length $\hbar/m_P c = (\hbar G/c^3)^{1/2}$	$l_P$	$1.616 252(81) \times 10^{-35}$	$\text{m}$	$5.0 \times 10^{-5}$
Planck time $l_P/c = (\hbar G/c^5)^{1/2}$	$t_P$	$5.391 24(27) \times 10^{-44}$	$\text{s}$	$5.0 \times 10^{-5}$

Abbildung 1.15: Numerische Werte für die wichtigsten Naturkonstanten.

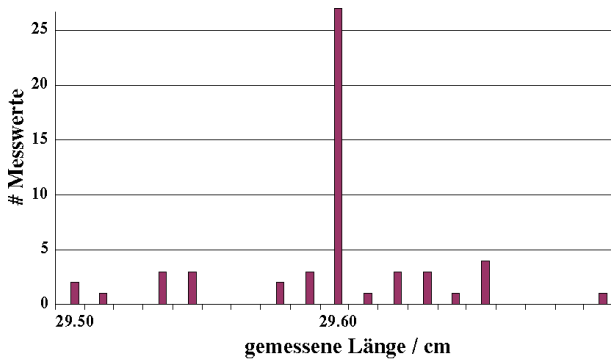


Abbildung 1.16: Verteilung der Messwerte für eine Längenmessung.

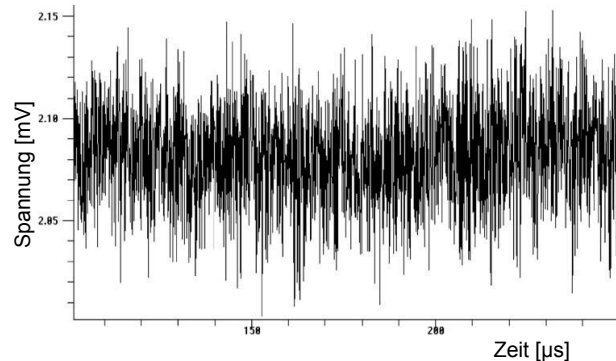


Abbildung 1.17: Ergebnis der wiederholten Messung einer nominell konstanten Spannung.

der Fehler über eine große Zahl von Messungen:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta x_i \right] = 0.$$

Somit erhalten wir aus dem Mittelwert der einzelnen Messresultate die beste Schätzung für den Er-

wartungswert  $\mu$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right] = \mu.$$

Da man in Wirklichkeit immer mit einer endli-

chen Zahl von Messwerten arbeitet ist der Mittelwert nicht identisch mit dem Erwartungswert, d.h. auch der Mittelwert ist mit einem Fehler behaftet. Man kann aber für den Fehler des Mittelwertes eine Schätzung erhalten, genau wie für den Mittelwert selber. Dazu verwendet man die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N - 1}},$$

welche im wesentlichen dem quadratischen Mittel der einzelnen Abweichungen entspricht. Die Standardabweichung ist somit ein Maß für die Unsicherheit der einzelnen Messwerte. Der Mittelwert ist entsprechend genauer definiert. Seine Standardabweichung (vom Erwartungswert) beträgt  $\sigma/\sqrt{N}$ . Somit kann der statistische Fehler einer Messung reduziert werden, indem man sie mehrfach wiederholt. Eine korrekte Angabe eines Messresultats umfasst immer auch eine Fehlerabschätzung, im optimalen Fall getrennt nach systematischem und statistischem Fehler. Typische Angaben sind deshalb

$$G = \langle G \rangle \pm \sigma$$

oder

$$G = \langle G \rangle \pm \sigma_{\text{sys}} \pm \sigma_{\text{stat}}.$$

### 1.6.3 Verteilungsfunktion

Um die Verteilung der Messwerte genauer zu beschreiben betrachtet man die Wahrscheinlichkeitsverteilung, d.h. die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Messwert zu finden.

Für geringe Zahlen von Messdaten trägt man sie oft in einem Histogramm auf, welches für Bereiche konstanter Breite die Anzahl der zugehörigen Messresultate enthält. Ein Beispiel dafür findet sich in Abb. 1.16. Man findet typischerweise eine Verteilung, die im Zentrum einen Maximalwert erreicht und mit zunehmender Entfernung davon abnimmt. Wie diese Verteilung im einzelnen aussieht hängt von der Art des Fehlers ab und von der Anzahl der Messungen.

Viele Zufallsprozesse ergeben eine Poisson-Verteilung. Ein typisches Beispiel ist der radioaktive

Zerfall: Instabile Atomkerne zerfallen in kleinere Bruchstücke, wobei man nicht voraussagen kann wann ein bestimmter Kern zerfällt. Man kann lediglich die mittlere Lebenszeit eines Kerns angeben oder die Wahrscheinlichkeit, dass er im folgenden Zeitintervall zerfällt. Diese Wahrscheinlichkeit hängt nicht von der Zeit ab (sofern er noch nicht zerfallen ist).

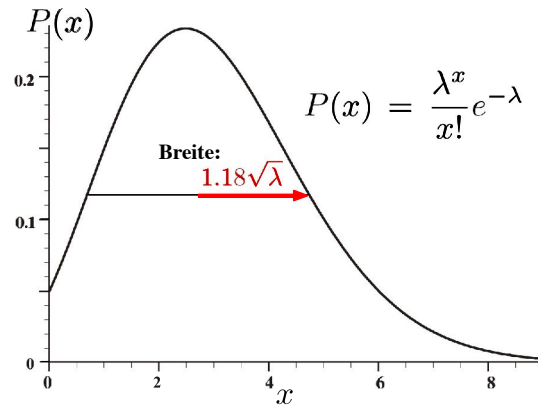


Abbildung 1.18: Poisson-Verteilung.

Misst man für eine große Zahl von Kernen (welche als konstant angenommen wird) die Anzahl Zerfälle pro Zeiteinheit, so findet man eine Verteilung, die durch eine Poissonverteilung beschrieben wird:

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}.$$

Abb. 1.18 zeigt die entsprechende Funktion. Sie wird durch den einzigen Parameter  $\lambda$  bestimmt, welcher den Mittelwert beschreibt. Die halbe Breite beträgt  $1.18 \sqrt{\lambda}$ .

Betrachtet man eine Probe mit  $10^8$  radioaktiven Kernen mit einer mittleren Lebensdauer von einem Jahr ( $= 3.2 \cdot 10^7$  s), so wird man bei einer Messzeit von 1 s im Durchschnitt 3.17 Zerfälle zählen; die Verteilung der Einzelmessungen wird durch eine Poissonverteilung mit  $\lambda=3.17$  beschrieben. Verwendet man eine Messzeit von 10 s, so ist der Parameter  $\lambda = 31.7$ . In diesem Fall kann die Poissonverteilung gut durch eine Gaußverteilung angenähert werden:

$$P(x) \approx e^{-\frac{(x-\mu)^2}{b^2}}.$$

Obwohl die Verteilung der Messwerte grundsätzlich sehr unterschiedlichen Verteilungsfunktionen aufweisen kann, findet man in der Praxis häufig eine Funktion, die sich gut als Gaußfunktion annähern lässt. Dies liegt einerseits daran, dass viele stochastische Prozesse eine Poisson / Gauß-Statistik aufweisen; andererseits lässt sich zeigen, dass die Kombination von Zufallsprozessen mit unterschiedlicher, aber unabhängiger Statistik näher bei einer Gaußverteilung liegt als die Einzelprozesse.

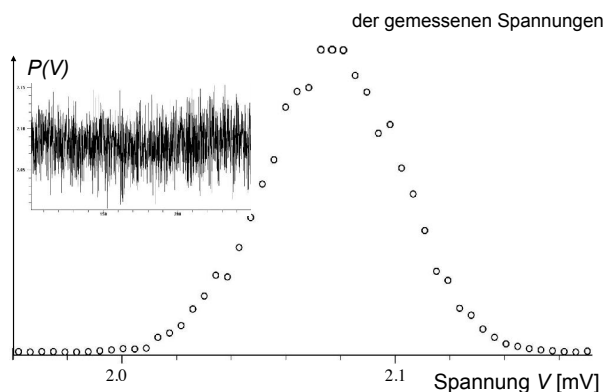


Abbildung 1.19: Verteilung der Messwerte.

Eine entsprechende Auswertung der obigen Messung ergibt das in Abb. 1.19 gezeigte Bild. Es wurden für 50 Punkte die Anzahl der Messresultate gezeigt, welche in der Nähe dieses Wertes liegen. Man findet einen Mittelwert von ca. 2,08 mV und eine Breite (halbe Breite auf halber Höhe) von ca. 30  $\mu$ V. Je besser die Statistik, desto genauer kann man das Zentrum der Verteilung bestimmen (d.h. den Erwartungswert). Unabhängig von der Art der Statistik gilt, dass statistische Fehler durch Wiederholung der Messung reduziert werden können. Für einen Gauß-Prozess verschwindet die Unsicherheit für den Mittelwert mit der Wurzel aus der Anzahl Wiederholungen.

### 1.6.4 Fehlerfortpflanzung

Häufig misst man nicht direkt die Größe für die man sich interessiert, sondern eine Größe aus der die interessierende Größe abgeleitet werden kann. Als Beispiel sei der Stand einer Quecksilbersäule genannt, der als Maß für den Druck verwendet wird. In

diesem Fall ist der Fehler der interessierenden Messgröße (d.h. des Druckes) eine Funktion des Fehlers der direkten Messgröße (der Länge der Quecksilbersäule). Da man beim Bestimmen der Länge einen Fehler macht, wirkt sich dies auch auf den erhaltenen Wert für den Druck aus. Dies berücksichtigt man mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung.

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir die Bestimmung des Volumens  $V$  eines zylindrischen Stabes: Wir können dieses messen, indem wir den Durchmesser  $d$  und die Länge  $L$  bestimmen und daraus das Volumen eines Zylinders berechnen:

$$V = \pi d^2 L / 4.$$

Offensichtlich wird bei jedem Stab der Durchmesser über die Länge nicht exakt konstant sein, so dass die Ablesegenauigkeit wie auch diese Schwankungen zur Streuung beitragen. Um zu ermitteln, wie genau der berechnete Wert für das Volumen ist, müssen wir die Fehlerfortpflanzung bestimmen.

Da der Durchmesser quadratisch zum Volumen beiträgt, würde man erwarten, dass ein Fehler bei der Messung des Durchmessers stärker beiträgt als ein Fehler bei der Länge. Wir betrachten zunächst eine einzelne Messung, welche für Durchmesser, resp. Länge einen relativen Fehler  $\delta$  enthält. Anstelle des "wahren" Volumens erhält man dann

$$\begin{aligned} V_{\delta d} &= \pi d^2 (1 + \delta)^2 \frac{L}{4} = \pi d^2 (1 + 2\delta d + \delta^2) \frac{L}{4} \\ &\approx \pi d^2 (1 + 2\delta) \frac{L}{4} = V(1 + 2\delta), \end{aligned}$$

wobei die Näherung für den Fall kleiner Fehler gilt. Für einen Fehler bei der Längenmessung erhält man analog

$$V_{\delta l} = \pi d^2 L (1 + \delta) / 4 = V(1 + \delta),$$

also eine schwächere Abhängigkeit (um einen Faktor 2).

Da verschiedene Variablen in die Messung eingehen tragen alle zum Fehler bei. Im Allgemeinen addieren sich die Fehler nicht direkt, da sie mit gleicher Wahrscheinlichkeit in beide Richtungen fallen können.

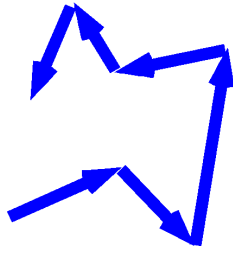


Abbildung 1.20: Addition von zufälligen Vektoren.

Man kann dies mit einem Diffusionsprozess vergleichen, wo bei jedem Schritt eine Richtung zufällig gewählt wird, wie in Abb. 1.20 schematisch dargestellt. Über lange Zeiten wächst die mittlere Verschiebung proportional zur Wurzel aus der Zeit, d.h. die Quadrate der einzelnen Schritte addieren sich. Ähnlich sieht es bei der Fehlerfortpflanzung aus: die Streuung eines Wertes  $f(a,b,c)$ , welcher von direkten Messgrößen  $a,b,c \dots$  abhängt, kann berechnet werden als

$$s_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 s_{a^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 s_{b^2} + \dots},$$

wobei  $s_a$  die Streuung der Größe  $a$  darstellt. Für polynomiale Abhängigkeiten  $f = a^n b^m$  gilt somit

$$\frac{s_f}{f} = \sqrt{n^2 \left(\frac{s_a}{a}\right)^2 + m^2 \left(\frac{s_b}{b}\right)^2 + \dots}$$

Diese Abhängigkeit ist offensichtlich relativ schwach; so ist der Gesamtfehler bei 9 gleich verteilten Variablen nur 3 anstelle von 9.

### 1.6.5 Differenzmessungen

Misst man eine Größe, welche klein ist im Vergleich mit einer anderen Größe, welche das Messergebnis ebenfalls beeinflusst, so wirken sich Fehler und Schwankungen in diesem "Hintergrundsignal" auf die eigentliche Messung aus. Es ist deshalb vorteilhaft, Messungen möglichst hintergrundfrei durchzuführen. Ein Weg dazu sind Differenzmessungen, bei denen ein Parameter so geändert wird, dass die Differenz der beiden Messungen nur noch vom zu bestimmenden Parameter abhängt.

Beispiele: Vierpunktmessung, Lock-In Experimente.

### 1.6.6 Fitten

Es ist nicht immer möglich, die interessierende Größe als Funktion der Messgröße analytisch zu bestimmen. Oft ist jedoch der umgekehrte Weg möglich: Die Theorie kann die Messgrößen als Funktion einiger Parameter voraussagen, wobei die Parameter unbekannt sein können. Man führt in diesen Fällen eine Variationsrechnung durch, in der man mit einer Schätzung für die Parameter beginnt und daraus die Messwerte berechnet. Anschließend variiert man die Werte für die Parameter, bis die Differenz zwischen den vorausgesagten und den gemessenen Werten minimal wird. Die beste Schätzung für die zu bestimmenden Parameter erhält man, wenn die Summe der Fehlerquadrate minimal wird:

$$\chi^2 = \sum_i (x_{ie} - x_{it})^2.$$

Hier steht  $x_{ie}$  für die experimentellen Werte,  $x_{it}$  für die theoretischen Werte. Dieses Vorgehen wird im Laborjargon als "fitting" (engl.: anpassen) bezeichnet.

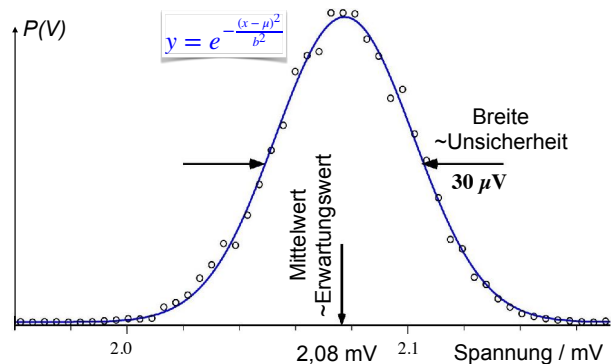


Abbildung 1.21: Anpassung der Messwertverteilung mit einer Gaußkurve.

Als ein Beispiel können wir die vorher gemessenen Daten durch eine Gauß-Kurve

$$y = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{b^2}}$$

anpassen. Das Resultat in Abb. 1.21 zeigt eine gute Übereinstimmung. Um solche Anpassungen durchführen zu können, muss die Zahl der gemessenen Daten größer sein als die Zahl der zu bestimmenden Parameter.

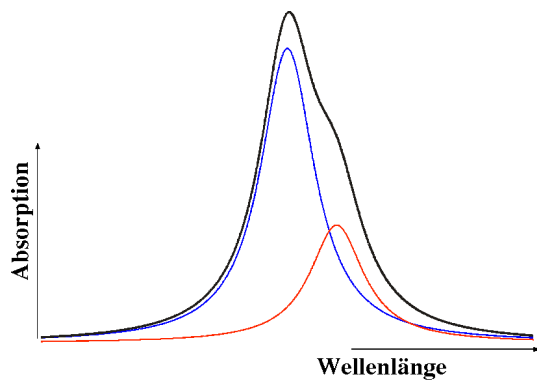


Abbildung 1.22: Resonanzlinien.

Es wird z.B. verwendet um Positionen, Amplituden und Linienbreiten von Absorptionslinien in Spektren zu bestimmen. Die schwarze Kurve in Abb. [1.22](#) zeigt ein Spektrum, welches durch die Überlagerung von zwei Absorptionslinien zustande kommt. Man kann das Spektrum berechnen indem man die theoretische Funktion

$$a = \frac{a_1}{(\lambda - \lambda_1)^2 + \delta_1^2} + \frac{a_2}{(\lambda - \lambda_2)^2 + \delta_2^2}$$

für verschiedene Parametersätze  $a_{1,2}$  (Amplitude),  $\lambda_{1,2}$  (Position) und  $\delta_{1,2}$  (Breite) berechnet und die Parameter anpasst bis die optimale Übereinstimmung erreicht ist.