

1 Grenzen der klassischen Physik

1.1 Historische Situation der Physik um 1900

Die bisher diskutierte Physik wurde zu wesentlichen Teilen im Laufe des 19. Jahrhunderts entdeckt. Die enormen Fortschritte, welche die Physiker in dieser Zeit beobachteten, erweckten allgemeine Bewunderung und führten dazu, dass man der Ansicht war, dass alle wichtigen Grundlagen bekannt seien. Michelson schrieb "Die wichtigsten Grundgesetze und Grundtatsachen der Physik sind alle schon entdeckt; und diese haben sich bis jetzt so fest bewährt, dass die Möglichkeit, sie wegen neuer Entdeckungen beiseite zu schieben, außerordentlich fern zu liegen scheint. .. Unsere zukünftigen Entdeckungen müssen wir in den 6. Dezimalstellen suchen."

Einstein formulierte das so:

"Bei aller Fruchtbarkeit im einzelnen herrschte in prinzipiellen Dingen dogmatische Starrheit: Am Anfang (wenn es einen solchen gab) schuf Gott Newton's Bewegungsgesetze samt den notwendigen Massen und Kräften. Dies ist alles: das Weitere ergibt die Ausbildung geeigneter mathematischer Methoden durch Deduktion. Was das 19. Jahrhundert fußend auf dieser Basis geleistet hat, insbesondere durch die Anwendung der partiellen Differenzialgleichungen, musste die Bewunderung jedes empfänglichen Menschen erwecken."

Als Max Planck 1874 sein Abitur bestanden hatte, informierte er sich beim Münchner Physikprofessor Philipp von Jolly, über die Möglichkeit, Physik zu studieren. Dieser antwortete mit der Bemerkung, dass in dieser Wissenschaft schon fast alles erforscht sei, und es nur noch gelte, einige unbedeutende Lücken zu schließen.

Allerdings fehlten zu diesem Gesamtbild noch einige Punkte, welche scheinbar nicht mit den vorhandenen Modellen übereinstimmten. Während die mei-

sten davon ausgingen, dass dies durch kleine Korrekturen eingepasst werden könne, gab es auch schon einige, welche dies als Andeutung von großen Änderungen verstanden.

Die wichtigsten dieser Abweichungen sollen hier diskutiert werden.

1.2 Strahlungsgesetze

1.2.1 Schwarzer Körper

Ein wichtiger Punkt war die spektrale Verteilung der elektromagnetischen Strahlung, welche im Gleichgewicht mit einem materiellen Körper ist. Wenn dieser Körper die gesamte auf ihn einfallende Strahlung, unabhängig von der Wellenlänge, vollständig absorbiert, spricht man von einem "schwarzen Körper". Der Begriff "schwarzer Körper" wurde 1862 von Gustav Kirchhoff geprägt. Ein gutes Modell eines schwarzen Körpers ist ein Hohlraum, der innen schwarz gestrichen ist. Befindet sich in dieser Außenwand ein kleines Loch, so wird alles Licht, was dort hineinfällt, vollständig absorbiert.

Würde der Körper die Strahlung nur absorbieren, so würde er sich kontinuierlich aufheizen. Aus der Thermodynamik war aber bekannt, dass sich die Temperatur von verschiedenen Körpern, die miteinander in Kontakt sind (auch nur über Wärmestrahlung) angleicht.

Somit muss ein Körper, welche alle Wellenlängen absorbiert, auch alle Wellenlängen abstrahlen, und zwar umso stärker, je höher die Temperatur ist. Ein Körper, der bei einer bestimmten Wellenlänge gut absorbiert, emittiert somit auch stark.

Dies wurde z.B. beim amerikanischen Aufklärungsflugzeug SR-71 verwendet: damit die bei hoher Geschwindigkeit durch Luftreibung erzeugt Wärme ab-

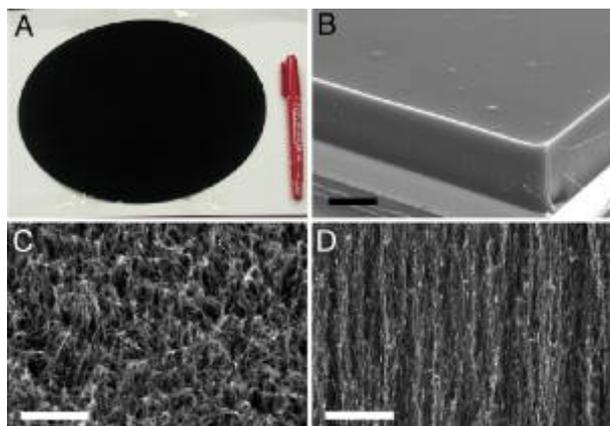


Abbildung 1.1: Fast idealer Absorber aus stehenden Kohlenstoff-Nanoröhren (PNAS 106, 6044 (2009)).

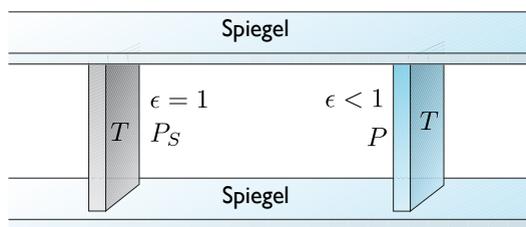


Abbildung 1.2: Gleichgewicht zwischen thermischen Strahlern.

geführt werden konnte, wurde es (fast) schwarz gestrichen. Es erhielt deshalb den Namen "Blackbird".

Ein realer Körper absorbiert Strahlung, die auf ihn einfällt, nicht vollständig, sondern nur zu einem Bruchteil $0 < \epsilon < 1$. Dieser Anteil wird als Absorptivität bezeichnet. Die Emissivität gibt an, wie stark ein Körper abstrahlt im Vergleich zum idealen schwarzen Körper. Diese beiden Größen müssen identisch sein, da sonst der zweite Hauptsatz der Thermodynamik verletzt werden könnte. Kirchoff formulierte dies 1859 als "Strahlungsgesetz": Die Absorptivität eines Körpers ist proportional zu seiner Emissivität, unabhängig von Temperatur, Richtung oder Wellenlänge.

Wir definieren die spektrale Leistungsdichte $I(\omega)$ als die Intensität der Strahlung im Frequenzbereich zwischen ω und $\omega + d\omega$. Misst man diese Intensitätsverteilung, so findet man, dass ein idealer schwarzer Körper eine Strahlung emittiert, welche nur von der



Abbildung 1.3: Das amerikanische Aufklärungsflugzeug SR-71 "Blackbird".

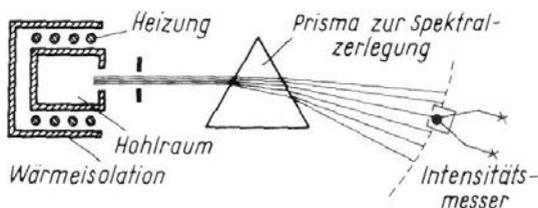


Abbildung 1.4: Spektralanalyse der Schwarzkörperstrahlung.

Temperatur abhängt.

Die Verteilung geht für hohe und niedrige Wellenlängen gegen Null. Das Maximum verschiebt sich mit zunehmender Temperatur gegen kürzere Wellenlängen.

1.2.2 Das Stefan-Boltzmann Gesetz

Integriert man die spektrale Leistungsdichte, so erhält man die gesamte Strahlungsleistung eines Körpers,

$$I_{ges}(T) = \int_0^{\infty} I(\omega, T) d\omega.$$

1879 analysierte Josef Stefan experimentelle Messungen der Strahlungsleistung von Tyndall und fand, dass die gesamte Strahlungsleistung proportional zur vierten Potenz der Temperatur zunimmt,

$$I_{ges} \propto T^4.$$

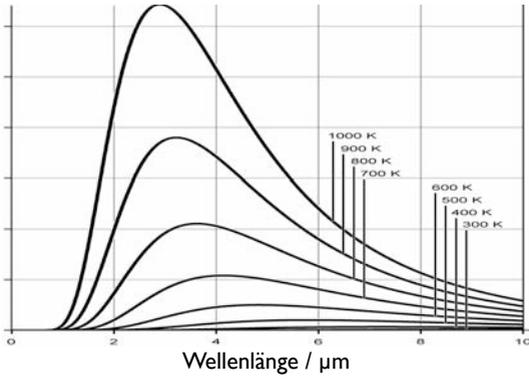


Abbildung 1.5: Spektrale Verteilung der Wärmestrahlung als Funktion der Temperatur.

Insgesamt kann die Strahlungsleistung eines Körpers geschrieben werden als

$$I_{ges} = \epsilon \sigma AT^4.$$

Hier ist $0 < \epsilon < 1$ der Emissionsgrad, welcher angibt, wie effizient der Körper abstrahlt, respektive absorbiert. Er liegt bei einem perfekt reflektierenden Körper bei 0, bei einem idealen schwarzen Strahler bei 1. σ ist die universelle Stefan-Boltzmann Konstante, A die Oberfläche des Körpers und T die absolute Temperatur.

1884 lieferte Ludwig Boltzmann eine theoretische Begründung für diese Abhängigkeit. Er verwendete dafür die bekannten thermodynamischen Grundgleichungen und die Maxwell'sche Theorie der Elektrodynamik. Aus der Thermodynamik ist bekannt, dass

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p.$$

Maxwell hatte 1873 gezeigt, dass ein elektromagnetisches Feld der Energiedichte u_V einen Druck

$$p = \frac{1}{3}u_V = \frac{1}{3}U$$

erzeugt. Setzt man dies ein und integriert, so erhält man

$$u_V = aT^4,$$

wobei die Integrationskonstante a an dieser Stelle nicht bekannt ist. Dieses Gesetz ist seither als Stefan-Boltzmann'sches Strahlungsgesetz bekannt.

1.2.3 Wien'sches Verschiebungsgesetz

Wie qualitativ in Abb. 1.5 gezeigt, verschiebt sich das Intensitätsmaximum als Funktion der Temperatur zu kürzeren Wellenlängen, resp. höheren Frequenzen. Dabei handelt es sich um eine Proportionalität. Man kann die Wellenlänge schreiben als

$$\lambda_{max} = \frac{2897.8}{T} \mu\text{mK}.$$

Schreibt man die Intensität als Funktion der Frequenz, so nimmt die maximale Frequenz proportional zur Temperatur zu,

$$\nu_{max} = 5.878933 \cdot 10^{10} \cdot T \frac{\text{Hz}}{\text{K}}.$$

Wien leitete diese Proportionalität 1895 her, indem er einen Hohlraum diskutierte, der durch einen beweglichen Kolben abgeschlossen war. Verringert man das Volumen des Hohlraums durch Verschieben des Kolbens adiabatisch, so steigen Temperatur und Energiedichte. Gleichzeitig verschiebt der Kolben die Wellenlänge der Strahlung über den Doppereffekt.

Aus dem Maximum der Emission kann man somit die Temperatur des Körpers berechnen, der diese Strahlung emittiert. Bei der Sonne ist die sichtbare Oberfläche die Fotosphäre. Das Emissionsmaximum liegt bei $3.4 \cdot 10^{14}$ Hz, was einer Temperatur von 5800 K entspricht. Flüssiger Stahl oder Magma mit einer Temperatur von 2000 K erreichen das Emissionsmaximum bei $1.2 \cdot 10^{14}$ Hz, also im Infraroten. Im sichtbaren Bereich des Spektrums ist dann die Intensität von rotem Licht deutlich höher als von blauem. Schwarze, selbstleuchtende Körper mit einer Temperatur < 5800 K erscheinen uns deshalb rot.

Wien konnte darüber hinaus zeigen, dass die spektrale Energiedichte die Form

$$I(\omega) = \omega^3 F \left(\frac{\omega}{T}\right)$$

haben müsse. Die Funktion F war nicht bekannt, aber er vermutete einen Zusammenhang mit der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung und schlug deshalb vor

$$I(\omega) = \alpha \omega^3 e^{-\beta \omega / T}.$$

Diese Abhängigkeit beschreibt das Verhalten bei hohen Frequenzen recht gut, weicht aber bei niedrigen Frequenzen stark ab. Dies zeigten insbesondere Messungen, die im Jahre 1900 durchgeführt wurden.

1.2.4 Das Rayleigh-Jeans Gesetz

Rayleigh berechnete 1890 die frequenzabhängige Strahlungsleistung, indem er die Modendichte in einem Hohlraumresonator bestimmten. Seine Theorie wurde später von James Jeans modifiziert und ist seither als Rayleigh-Jeans Gesetz bekannt. Wie in PIII diskutiert, findet man für einen kubischen Hohlraum mit Kantenlänge a und ideal leitenden Wänden stehende Wellen mit Frequenzen

$$\omega_{n_x, n_y, n_z} = \frac{c\pi}{a} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}.$$

Betrachten wir die Werte $n_{x,y,z}$ als Koordinaten in einem kartesischen Raum, so sind die Frequenzen ω in diesem Raum gleichmäßig verteilt. Die Zahl der Moden mit einer Frequenz im Bereich von $0 \dots \omega$ ist somit

$$Z = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{a\omega}{\pi c} \right)^3 = \frac{a^3 \omega^3}{6\pi^2 c^3}.$$

Differenziell sind dies

$$dZ = \frac{a^3 \omega^2}{2\pi^2 c^3} d\omega.$$

Wir identifizieren $a^3 = V$ und erhalten für die Zahl der Moden in einem Volumen V im Frequenzintervall $(\omega, \omega + d\omega)$

$$\frac{dZ}{V} = \frac{\omega^2}{2\pi^2 c^3} d\omega.$$

Berücksichtigen wir die beiden orthogonalen Polarisationszustände, so verdoppelt sich diese Zahl.

Gemäß dem Äquipartitionsgesetz der Thermodynamik ist die Energiedichte gegeben als

$$\bar{E} = k_B T,$$

wobei jeweils die Hälfte kinetische und potenzielle Energie sind. Wir identifizieren die beiden Ausdrücke und erhalten

$$I(\omega) d\omega = \frac{dZ}{V} k_B T = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T d\omega. \quad (1.1)$$

Dies ist als Rayleigh-Jeans Gesetz bekannt. Wichtig ist hier vor allem die Proportionalität der abgestrahlten Energiedichte zu ω^2 . Dies passt für niedrige Frequenzen recht gut, für hohe Frequenzen aber sehr schlecht. Integriert man die Energie über alle Frequenzen, so geht sie wegen der hohen Frequenzen gegen unendlich. Die Divergenz der Energiedichte bei hohen Frequenzen wird als Ultraviolett-Katastrophe bezeichnet.

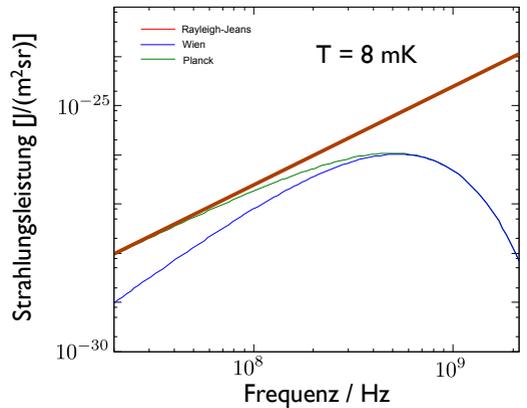


Abbildung 1.6: Spektrale Verteilung der Energiedichte nach Rayleigh-Jeans, Wien und Planck.

Einen ersten Ausweg zeigte Wien: er nahm an, dass die Zustände nicht gleich stark besetzt seien, sondern nach der Maxwell-Boltzmann Verteilung. Damit erhielt er eine Abhängigkeit

$$I_{Wien}(\omega) = c_1 \omega^3 e^{-c_2 \omega / k_B T}.$$

Dieser Ausdruck stimmt für große Frequenzen recht gut, für kleine aber schlecht.

Damit waren 2 Grenzfälle bekannt: für kleine Frequenzen (große Wellenlängen) gab das Rayleigh-Jeans Gesetz eine gute Beschreibung, für große Frequenzen (kleine Wellenlängen) das Wien'sche Strahlungsgesetz. Eine Beschreibung, die über alle Frequenzen korrekt ist, lieferte Planck um 1900.

1.2.5 Das Planck'sche Strahlungsgesetz

Im Jahre 1900 existierten somit zwei Strahlungsgesetze, welche jeweils für einen bestimmten Grenzfall in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Fakten waren. Planck gelang es, zwischen diesen beiden Spezialfällen korrekt zu interpolieren. Dazu ergänzte er das Rayleigh-Jeans Modell um einen wichtigen Punkt: er nahm an, dass ein Oszillator der Frequenz ω Energie nur in diskreten Paketen der Größe $\hbar\omega$ emittieren oder absorbieren kann. Er besitzt somit diskrete Energiezustände

$$E_n = 0, \hbar\omega, 2\hbar\omega, 3\hbar\omega \dots$$

Energien zwischen diesen Zuständen sind nicht möglich.

Energieniveaus		# Oszillatoren
————	$E_2 = 2\hbar\omega$	N_2
————	$E_1 = \hbar\omega$	N_1
————	$E_0 = 0$	N_0

Abbildung 1.7: Erlaubte Energien und Anzahl der Oszillatoren mit der entsprechenden Energie.

In diesem Modell gehen die Oszillatoren bei der Emission von Energie durch einen diskreten Sprung aus einem höheren Zustand in einen niedrigeren über. Die Zahl N_n der Oszillatoren mit der Energie E_n ist im thermischen Gleichgewicht gegeben durch die Maxwell-Boltzmann Verteilung

$$N_n = N_0 e^{-E_n/k_B T}, \quad E_n = n\hbar\omega.$$

Die Konstante \hbar wird als Planck'sches Wirkungsquantum bezeichnet; sie ist eine universelle Naturkonstante. Sie wurde experimentell bestimmt zu

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.0546 \cdot 10^{-34} \text{ Js.}$$

Um ein Strahlungsgesetz zu erhalten, berechnen wir jetzt analog zur Herleitung des Rayleigh-Jeans Gesetzes die mittlere Energie \bar{E} aller Oszillatoren:

$$\bar{E} = \frac{E_{tot}}{N_{tot}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-E_n/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/k_B T}}.$$

Wir substituieren

$$x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$$

und erhalten

$$\bar{E} = \frac{\hbar\omega \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}}.$$

Wir schreiben dies als

$$\bar{E} = \hbar\omega \frac{-\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}}.$$

Die geometrischen Reihen können aufsummiert werden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-e^{-x}}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \hbar\omega \frac{-(1-e^{-x})^{-2} e^{-x}}{(1-e^{-x})^{-1}} = \frac{\hbar\omega}{e^x - 1} \\ &= \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}. \end{aligned}$$

Wenn wir diesen Ausdruck in der Herleitung von Rayleigh-Jeans verwenden, erhalten wir

$$I(\omega)d\omega = \frac{dZ}{V} \bar{E} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)} d\omega.$$

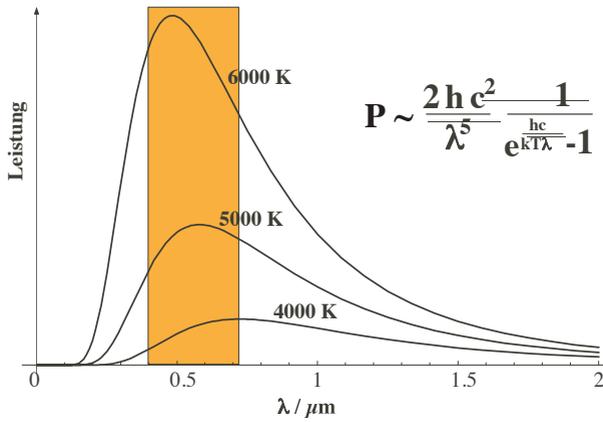


Abbildung 1.8: Strahlungsleistung nach Planck für verschiedene Temperaturen.

Dies ist das Planck'sche Strahlungsgesetz. Es behebt die UV-Katastrophe, indem die Intensität für hohe Frequenzen gegen Null geht, und es ist in ausgezeichneter Übereinstimmung mit dem Experiment. Dies ist historisch die erste quantenmechanische Formel, d.h. das erste Gesetz, das unter der Annahme einer diskreten Energiverteilung hergeleitet wurde.

1.2.6 Grenzfälle

Aus dem Planck'schen Strahlungsgesetz kann man auch die anderen Strahlungsgesetze herleiten. Wir berechnen die gesamte emittierte Strahlung als

$$\begin{aligned}
 U(T) &= \int_0^\infty I(\omega) d\omega = \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 e^{\hbar\omega/k_B T}} d\omega \\
 &= \frac{(k_B T)^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx.
 \end{aligned}$$

Wir berechnen das Integral als

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx &= \int_0^\infty dx x^3 e^{-x} \sum_{n=0}^\infty e^{-nx} \\
 &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty dx x^3 e^{-nx} \\
 &= 6 \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},
 \end{aligned}$$

wobei für die letzten Schritte die Eigenschaften der Riemann'schen Zeta-Funktion verwendet wurden. Somit ist die integrierte Strahlungsleistung eines Körpers der Fläche A

$$P = \sigma AT^4.$$

Die Stefan-Boltzmann Konstante σ ist gegeben durch

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}.$$

Aus der Lage des Intensitätsmaximums erhält man das Wien'sche Verschiebungsgesetz. Wir bestimmen das Maximum aus

$$\frac{dI}{d\lambda} = 0 \rightarrow \lambda_{max} T = \frac{2\pi\hbar c}{4.965 k_B}.$$

Das Rayleigh-Jeans Gesetz erhält man aus dem Grenzfall kleiner Frequenzen, $\hbar\omega \ll k_B T$. Wir können dann die Exponentialfunktion entwickeln,

$$e^{\hbar\omega/k_B T} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{k_B T}$$

und erhalten für die Intensität

$$I(\omega) d\omega \approx \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 \frac{\hbar\omega}{k_B T}} d\omega = \frac{\omega^2 k_B T}{\pi^2 c^3} d\omega,$$

in Übereinstimmung mit dem Rayleigh-Jeans Gesetz (1.1).

Das Wien'sche Strahlungsgesetz erhalten wir im umgekehrten Grenzfall, $\hbar\omega \gg k_B T$ aus

$$e^{\hbar\omega/k_B T} \gg 1.$$

Dann ist

$$I(\omega) d\omega \approx \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar\omega/k_B T} d\omega,$$

in Übereinstimmung mit dem Wien'schen Gesetz, und mit den dort phänomenologischen Konstanten berechnet.

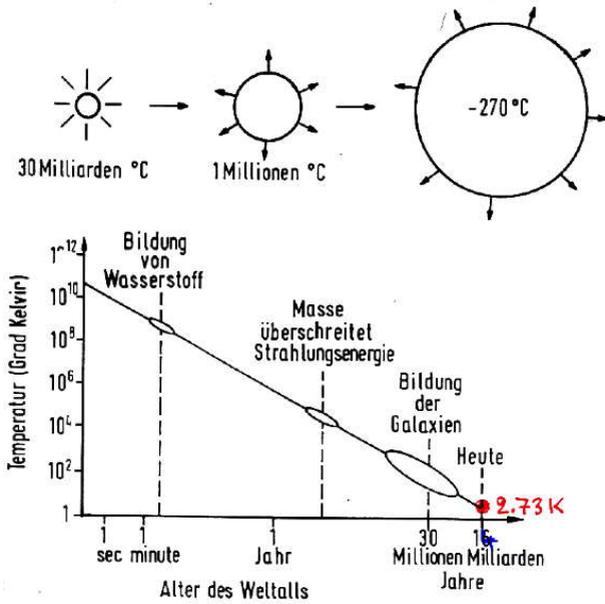


Abbildung 1.9: Das expandierende Universum als thermischer Strahler.

1.2.7 Bestätigung und Bewertung

Die von Planck vorhergesagte Verteilung stimmte mit den damals bekannten Messdaten überein und wurde seither mehrfach bestätigt.

Eines der besten Beispiele für einen thermischen Strahler ist das Universum: abgesehen von den Sternen und leuchtenden Nebeln ist es mit einer thermischen "Hintergrundstrahlung" angefüllt, welche beim "big bang" entstanden ist. Durch die Ausdehnung des Universums seither hat es sich stark abgekühlt: die Temperatur der Hintergrundstrahlung beträgt noch 2.73 K.

Präzise Messungen von Penzias und Wilson haben dies bereits 1965 bestätigt; seither gibt es noch wesentlich präzisere Messungen.

Betrachtet man das Emissionsmaximum bei unterschiedlichen Temperaturen, so findet man, dass es sich bei der Temperatur der Sonne im sichtbaren Bereich des Spektrums, also bei $\approx 0.5 \mu\text{m}$ befindet. Bei niedrigeren Temperaturen verschiebt es sich zu längeren Wellenlängen: bei Raumtemperatur erreicht es rund $10 \mu\text{m}$.

Eine Kamera, welche bei diesen Wellenlängen emp-

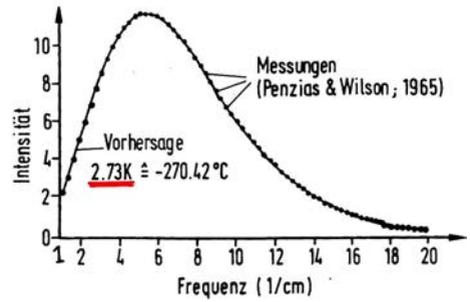


Abbildung 1.10: Messungen der Hintergrundstrahlung von Penzias und Wilson 1965.

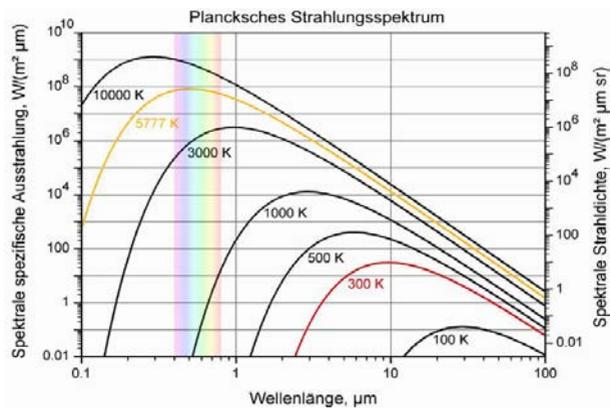


Abbildung 1.11: Verschiebung des Emissionsmaximums mit der Temperatur.

findlich ist, kann deshalb verwendet werden, um die Temperatur eines Körpers berührungsfrei zu messen.

Planck hatte das Konzept der Quantisierung als rein mathematisches Hilfsmittel in seine Betrachtungen eingeführt. Erst später zeigte sich, dass dies auch wirklich durch Beobachtungen erhärtet werden kann. So ist es heute relativ leicht, einzelne Photonen zu messen. Man verwendet dazu den Fotoeffekt, den wir im folgenden Abschnitt diskutieren werden.

1.3 Fotoeffekt

1.3.1 Phänomenologie

Werden Metalloberflächen, insbesondere Alkalimetalle, mit Licht bestrahlt, so werden Elektronen freigesetzt, die sich mit einer bestimmten Geschwindig-



Abbildung 1.12: Wärmebild eines Menschen (NASA).

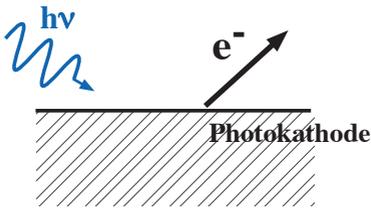


Abbildung 1.13: Fotoeffekt.

keit von der Oberfläche weg bewegen, also eine kinetische Energie besitzen. Diesen Effekt bezeichnet man als Fotoeffekt.

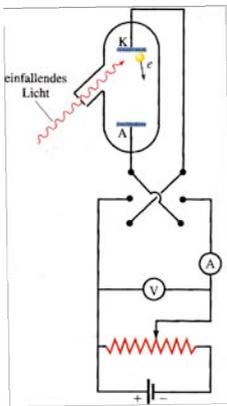


Abbildung 1.14: Messung der kinetischen Energie der Fotoelektronen.

Die kinetische Energie der freigesetzten Elektronen kann gemessen werden, wenn man bestimmt, wie gross eine Spannung sein kann oder muss, damit die Elektronen gegen das äußere Potential einen bestimmten Punkt erreichen können.

Wenn man also die Spannung erhöht, mit der die

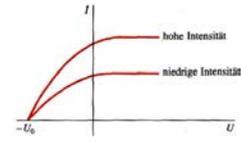


Abbildung 1.15: Gemessener Fotostrom als Funktion der Gegenspannung für unterschiedliche Intensitäten.

Elektronen gebremst werden, so treffen irgendwann keine mehr auf dem Messdraht auf und der gemessene Strom geht gegen Null. Wenn wir den Fotostrom als Funktion der angelegten Spannung messen, finden wir, dass er unterhalb einer gewissen Sperrspannung V_0 verschwindet. Für größere (positive) Spannungen wächst er, bis er praktisch konstant wird. Die Messung der Sperrspannung erlaubt die Bestimmung der kinetischen Energie der emittierten Elektronen:

$$E_{kin} = eV_0.$$

Exp: Fotoeffekt

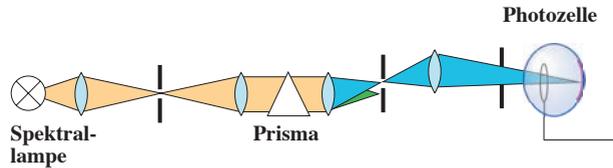


Abbildung 1.16: Anordnung zur Messung der Abhängigkeit von der Lichtwellenlänge.

Wir benutzen diesen Messaufbau nun, um die Abhängigkeit der kinetischen Energie von der Wellenlänge des Lichtes zu messen. Die vorhandene Lichtquelle erzeugt Licht bei verschiedenen diskreten Wellenlängen, welche wir einzeln auf die Probe fallen lassen.

Erste Messungen der kinetischen Energie als Funktion von Wellenlänge und Intensität des Lichtes wurden im 19. Jhd von Hallwach durchgeführt. Man findet experimentell, dass der gemessene Strom, d.h. die Anzahl Elektronen pro Zeiteinheit in guter Näherung proportional ist zur einfallenden Lichtleistung.

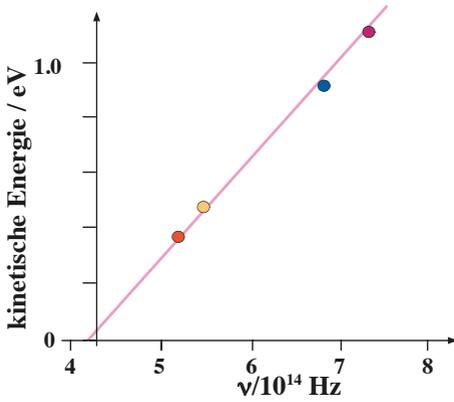


Abbildung 1.17: Gemessene kinetische Energien als Funktion der Lichtfrequenz.

Wenn wir die gemessenen Spannungen gegen die Frequenz des einfallenden Lichtes auftragen, so finden wir, dass für Frequenzen unterhalb eines bestimmten Grenzwertes ω_0 keine Elektronen austreten. Oberhalb dieses Grenzwertes steigt die Energie der Elektronen linear an. Die kinetische Energie kann somit geschrieben werden als

$$E_{kin} = \hbar(\omega - \omega_0) = \hbar\omega - A.$$

Zu den experimentell bekannten Tatsachen gehören

- Der Effekt setzt nach ≈ 1 ns nach Auftreffen der Strahlung ein.
- Die Metalle emittieren Elektronen nur dann, wenn die Frequenz ω des Lichtes oberhalb einer bestimmten Schwellenfrequenz ω_0 liegt. Diese Schwellenfrequenz ist unterschiedlich für unterschiedliche Metalle.
- Bei gegebener Frequenz ω ist der Strom proportional zur Intensität, $i_e \propto I$.
- Die kinetische Energie der Elektronen ist eine lineare Funktion der Frequenz,

$$E_{kin}^{e^-} = \frac{m_e}{2} v^2 = a + b\omega,$$

unabhängig von der Lichtintensität.

Im Rahmen der klassischen Elektrodynamik kann man die Existenz des Fotoeffektes so erklären, dass durch die elektromagnetische Strahlung die Elektronen langsam beschleunigt werden und deshalb austreten. Die widerspricht jedoch der Beobachtung,

dass die Elektronen schon sehr schnell erscheinen. Diese Beschreibung würde außerdem voraussagen, dass die kinetische Energie der Elektronen proportional zur Intensität des Lichtes sein sollte, und man würde Emission für alle Frequenzen vorhersagen.

1.3.2 Einstein's Erklärung

Einstein erhielt ein konsistentes Bild, indem er annahm, dass das Licht, welches auf die Metalloberfläche trifft, aus diskreten Paketen besteht. Diese werden als "Quanten" oder "Fotonen" bezeichnet und besitzen die Energie $\hbar\omega = h\nu$.

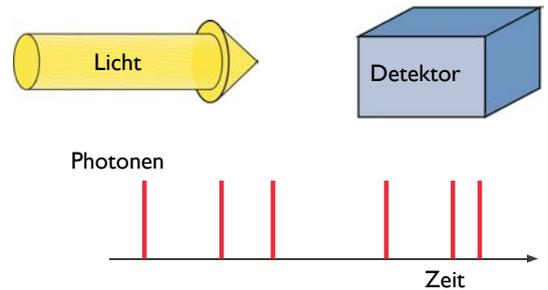


Abbildung 1.18: Licht als Abfolge von Fotonen.

Die Frequenz ν liegt für sichtbares Licht im Bereich

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} / 0.5 \mu\text{m} = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz},$$

also typischerweise etwas unterhalb von 10^{15} Hz. Die Energie der einzelnen Pakete liegt somit für sichtbares Licht bei

$$E = 6.6256 \cdot 10^{-34} \cdot 6 \cdot 10^{14} \text{ J} \approx 4 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Für unsere Begriffe ist dies eine relativ kleine Energie, was erklärt, weshalb wir sie meistens nicht beobachten.

Diese Energiepakete, welche man heute als Fotonen bezeichnet, kann man heute ohne weiteres direkt beobachten. Man benutzt dazu z.B. einen sog. Fotomultiplier. In diesem Gerät werden die Fotonen in elektronische Impulse umgewandelt.

Exp. 96a: Nachweis einzelner Photonen

Wenn wir die Lichtmenge, die pro Zeiteinheit auf diesen Detektor fällt, genügend klein halten, ist es möglich, einzelne Photonen zu beobachten, welche jeweils einen Spannungsimpuls erzeugen. Die Photonen gelangen in unregelmäßigen, nicht voraussagbaren Abständen auf den Detektor. Erst wenn wir die Anzahl der Photonen über einen Zeitraum mitteln, der lang ist im Vergleich zum mittleren Abstand, erhalten wir einen konstanten Wert. Die mittlere Photonenzahl pro Zeiteinheit multipliziert mit der Energie der Photonen ergibt die auf den Detektor einfallende Leistung.

Wenn wir die Leistung erhöhen, so nimmt der mittlere Abstand zwischen zwei Photonen ab.

In diesem Bild absorbiert ein Metall ein Photon der Energie $\hbar\omega$. Dieser Prozess kann instantan, also verzögerungsfrei ablaufen. Die Energie des Photons erhöht die kinetische Energie des Elektrons um den entsprechenden Betrag und erlaubt es diesem, das Metall zu verlassen. Dabei muss es jedoch eine potenzielle Energie überwinden, welche das Elektron im Metall hält, und somit wird die kinetische Energie wieder um den Betrag der Austrittsarbeit A reduziert. Die Energie des ausgetretenen Elektrons wird somit

$$E_{kin}^{e^-} = \hbar\omega - A.$$

In Abb. 1.17 können wir aus der Steigung der Geraden die Planck'sche Konstante bestimmen. Wir benutzen z.B. den Unterschied zwischen der kinetischen Energie bei rotem und violettem Licht. Diese beträgt

$$\begin{aligned} \Delta E &= (1.176 - 0.078)\text{eV} = 1.098\text{eV} \\ &= 1.76 \cdot 10^{-19}\text{J}. \end{aligned}$$

Die entsprechende Frequenzdifferenz beträgt

$$\Delta\nu = (7.35 - 4.81) \cdot 10^{14}\text{Hz} = 2.54 \cdot 10^{14}\text{Hz}.$$

Daraus erhalten wir für die Planck'sche Konstante

$$h = \frac{\Delta E}{\Delta\nu} = \frac{1.76 \cdot 10^{-19}\text{J}}{2.54 \cdot 10^{14}\text{Hz}} = 6.9 \cdot 10^{-34}\text{Js}.$$

Die experimentellen Messungen bestätigen, dass die Konstante \hbar die gleiche ist wie bei der Planck'schen Theorie.

1.3.3 Austrittsarbeit

Man interpretiert dieses Verhalten so, dass die Energie des Lichtes paketweise absorbiert wird, wobei jeweils ein Photon ein einzelnes Elektron herausschlägt. Jedes Elektron besitzt also nur die Energie, die ihm ein einzelnes Photon übergeben kann. Ein Teil der Energie wird benötigt, um das Elektron aus dem Metall herauszulösen. Diese sogenannte Austrittsarbeit erhalten wir aus dem Achsenabschnitt in Abb. 1.17. Sie ist eine Materialkonstante und beträgt für Kalium:

$$A = 4.5 \cdot 10^{14}\text{s}^{-1}h = 3 \cdot 10^{-19}\text{J} = 1.9\text{eV}.$$

Meistens verwendet man hier als Einheit aber nicht J, sondern eV, Elektronenvolt, wobei

$$1\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{J}$$

gerade derjenigen Energie entspricht, die ein Elektron beim Durchlaufen einer Spannungsdifferenz von 1 V erhält. Bei anderen Materialien beträgt die Austrittsarbeit

Material	A / eV
Cs	1.90
Ba	2.50
Ag	4.74
Au	4.92

Diese Werte sind als ungefähre Werte zu betrachten, wie diese Tabelle zeigt.

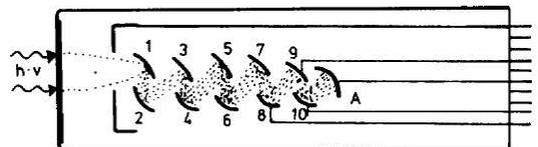


Abbildung 1.19: Funktionsprinzip eines Fotomultiplifiers.

Der Fotoeffekt wird u.a. im Fotomultiplier verwendet, wo die Photonen zunächst aus einer Alkalioberfläche Elektronen herausschlagen. Man wandelt also sozusagen Photonen in Elektronen um. Diese werden anschliessend in einem elektrischen Feld beschleunigt und treffen auf weitere Metalloberflächen. Durch die Beschleunigungsspannung ist ihre Energie so gross geworden, dass sie weitere Elektronen aus dem Metall herausschlagen können. In einem mehrstufigen Prozess wird so durch jedes eintreffende Photon eine Lawine von Elektronen erzeugt, welche als Spannungspuls nachgewiesen werden können.

1.3.4 Photonen

Die Einstein'sche Theorie des Fotoeffektes kann, alternativ zur Planck'schen Strahlungstheorie, als Geburtsstunde der Quantenmechanik verstanden werden. Dies ist die relevante Theorie für die Erklärung aller Phänomene auf kleinen Maßstäben, aber auch unverzichtbar für das Verständnis des Aufbaus der Materie.

Eine Glühlampe mit einer elektrischen Leistung von 100 W emittiert, bei einem typischen Wirkungsgrad von 4%, etwa 4 Watt an Lichtleistung. Die entspricht einer Photonenzahl

$$N_\gamma = \frac{P_{opt} \lambda}{hc}$$

Wir setzen für die mittlere Wellenlänge $\lambda = 500 \text{ nm}$, so dass

$$N_\gamma = \frac{45 \cdot 10^{-7}}{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \approx 10^{19} \text{ Quanten/s.}$$

Diese große Zahl ist der Grund dafür, dass wir das normalerweise nicht beobachten können.

Photonen haben auch eine Masse, gemäß der Einstein'schen Beziehung

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

Dies konnte man z.B. messen, indem man die Frequenzverschiebung von Photonen im Schwerfeld der

Erde gemessen hat: 1960 haben R. V. Pound und G. A. Rebka gezeigt, dass die Frequenz eines γ -Lichtquants um den Faktor $5 \cdot 10^{-15}$ geringer wird, wenn es sich im Schwerfeld der Erde um 45 m nach oben bewegt. Es verliert dabei also die Energie

$$h\nu \cdot 5 \cdot 10^{-15} = \frac{h\nu}{c^2} gh,$$

wobei g die Erdbeschleunigung und h die Höhendifferenz darstellt.

1.4 Der Compton Effekt

1.4.1 Phänomenologie

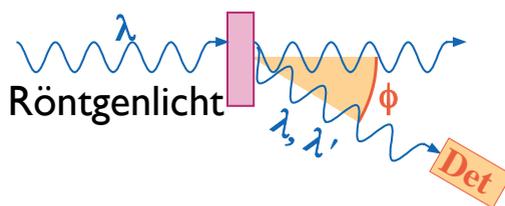


Abbildung 1.20: Geometrie des Streuexperimentes.

Streut man Röntgenlicht an freien (d.h. schwach gebundenen) Elektronen, so stellt man fest, dass das gestreute Licht neben der Wellenlänge des einfallenden Lichtes auch Licht einer anderen Wellenlänge enthält. Die Verteilung ist nicht kontinuierlich, sondern das gestreute Licht enthält neben der ursprünglichen Wellenlänge nur eine weitere Wellenlänge. Diese ist größer, d.h. die entsprechende Frequenz ist niedriger.

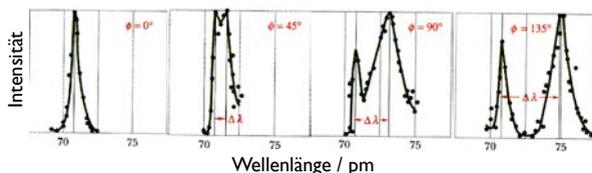


Abbildung 1.21: Spektren der gestreuten Röntgenstrahlung für unterschiedliche Streuwinkel.

Diese zweite Wellenlänge ist eine Funktion des Streuwinkels θ :

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = \lambda_C(1 - \cos\theta)$$

mit

$$\lambda_C = 2.4 \text{ pm.}$$

Am Größten ist der Wellenlängenunterschied somit in Rückwärtsstreuung, also für $\theta = \pi$. Der Effekt ist unabhängig vom verwendeten Probenmaterial. Diese Messungen wurden erstmals 1923 von Arthur Compton durchgeführt.

1.4.2 Interpretation

Der Effekt kann im Rahmen der Wellentheorie der Röntgenstrahlung nicht interpretiert werden. Man erhält diesen Befund jedoch als Resultat einer einfachen Rechnung, sofern man dem Röntgenlicht Teilchencharakter zuschreibt, d.h. indem man es als einen Strom von Photonen behandelt, deren Energie durch die Planck'sche Beziehung $E = h\nu$ gegeben ist. Da die Frequenz abnimmt, geben diese Photonen offenbar einen Teil ihrer Energie ab. Da die Art der Atome keinen Einfluss auf den Streuprozess hat, kann man davon ausgehen, dass die Photonen an den Elektronen gestreut werden. Diese müssen somit nach dem Streuprozess eine höhere Energie haben, also eine größere Geschwindigkeit.

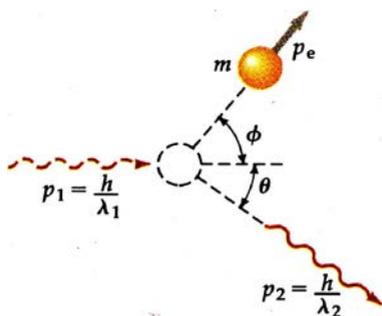


Abbildung 1.22: Spektren der gestreuten Röntgenstrahlung für unterschiedliche Streuwinkel.

Man geht also davon aus, dass jedes Photon einzeln an einem Elektron gestreut wird. Für jeden dieser Streuprozesse gilt Energieerhaltung:

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2.$$

Hier stellt m_0 die Ruhemasse des Elektrons dar und

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

die relativistische Masse.

Außerdem gilt ein Erhaltungsgesetz für den Impuls. Der Impuls des Photons beträgt

$$p_{ph} = \frac{h}{\lambda}.$$

Die x -Komponente des Gesamtimpulses ist somit

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos\theta + mv \cos\varphi$$

und die y -Komponente

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin\theta - mv \sin\varphi.$$

Die drei Gleichungen können nach λ' aufgelöst werden:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) = \lambda_C(1 - \cos\theta).$$

Hier stellt

$$\lambda_C = 2.426 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

die Compton-Wellenlänge dar. Sie enthält nur Naturkonstanten, d.h. sie hängt nicht vom Material oder von der Wellenlänge des Röntgenlichtes ab. Da sie im Picometerbereich liegt, muss man Licht mit einer vergleichbaren Wellenlänge, also Röntgenlicht, verwenden, um den Effekt beobachten zu können.

Die Verschiebung um eine feste Wellenlängendifferenz impliziert, dass je nach Energie des Photons ein sehr unterschiedlicher Teil seiner Energie auf das

Elektron übertragen wird: Photonen mit hoher Energie haben kurze Wellenlängen, eine Verschiebung um 2.4 pm führt zu einer großen Änderung, während sie z.B. bei sichtbaren Photonen ($\lambda \approx 500 \text{ nm} = 5 \cdot 10^5 \text{ pm}$) praktisch nicht messbar ist.

Wir berechnen zur Illustration den maximalen Energieübertrag, d.h. $\theta = \pi$ (Rückwärtsstreuung). Hat das einfallende Foton eine Energie von $E_0 = 1 \text{ keV}$, so ist die Energie des gestreuten Photons $E_\pi = 0.996 \text{ keV}$, d.h. die Streuung ist beinahe elastisch, der Energieverlust beträgt nur 0.4%. Für Photonen mit einer Anfangsenergie von $E_0 = 1 \text{ MeV}$ hingegen ist die Energie des gestreuten Photons $E_\pi = 0.2 \text{ MeV}$, d.h. 80% seiner Energie werden auf das Elektron übertragen.

1.5 Ladungsquantisierung

1.5.1 Die Elementarladung (Versuch von Millikan)

Der größte Unterschied zwischen Elementarteilchen und makroskopischen oder mikroskopischen Materialstücken liegt darin, dass Elementarteilchen prinzipiell ununterscheidbar sind. Reiskörner oder Sandkörner hingegen sind zum mindesten im Prinzip unterscheidbar und damit nicht identisch.

Identisch zu sein bedeutet z.B., dass alle messbaren Eigenschaften identisch sind, also z.B. die Ladung oder die Masse. Ladung kann deshalb auch nur in Vielfachen einer Ladungseinheit auftreten - der Elementarladung. Geladene Elementarteilchen besitzen Ladungen, die entweder einer negativen oder einer positiven Elementarladung entspricht. Bei zusammengesetzten Teilchen treten auch Vielfache davon auf.

Dass Elektronen und Protonen exakt entgegengesetzte Ladungen aufweisen, wird unter anderem daraus ersichtlich, dass Atome, die ja aus Elektronen, Protonen, und ungeladenen Neutronen bestehen, insgesamt elektrisch neutral sind. Diese Ladungsneutralität und damit die Identität der Elementarladung für verschiedene Teilchen ist bis auf viele Größenordnungen verifiziert. Die erste Messung der Elementarladung wurde in einem berühmten Versuch

1910 vom amerikanischen Physiker Robert Millikan durchgeführt.

Um die Elementarladung zu messen benötigte er elektrisch geladene Teilchen, die direkt beobachtbar sind. Elektronen oder Protonen sind dafür nicht geeignet. Andererseits mussten die Teilchen klein genug sein, dass eine winzige elektrische Ladung einen messbaren Einfluß auf ihre Bewegung ausübte.

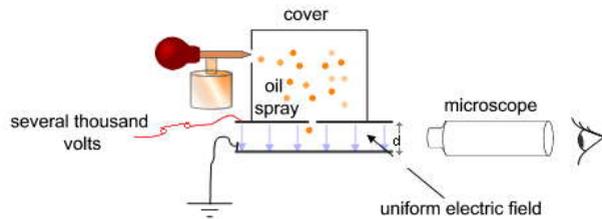


Abbildung 1.23: Millikans Messanordnung zur Bestimmung der Elementarladung.

Was Millikan fand war, dass kleine ($\approx 0.5 \mu\text{m}$) Öltröpfchen dafür gut geeignet waren. Diese können relativ klein gemacht werden, sind aber in einem Mikroskop mit geeigneten Techniken gut erkennbar. Werden sie mit ultraviolettem Licht oder Röntgenstrahlen bestrahlt, so werden einzelne Elektronen aus den Fettmolekülen hinausgeschlagen - die Öltröpfchen sind damit positiv geladen. Aufgrund der Oberflächenspannung versucht das Öltröpfchen die Oberfläche möglichst klein zu machen, es nimmt deshalb automatisch eine kugelförmige Gestalt an. Der einzige freie Parameter, mit dem die Form des Tröpfchens vollständig beschrieben werden kann ist damit der Kugelradius.

Diese Tröpfchen werden in das homogene Feld eines Plattenkondensators gebracht. An die Kondensatorplatten wird eine Spannung angelegt, so dass das homogene elektrische Feld im Plattenkondensator auf die geladenen Tröpfchen eine elektrische Kraft ausübt. Mit Hilfe eines Mikroskops wird die Geschwindigkeit gemessen, mit der sich die Tröpfchen nach unten oder oben bewegen. Diese hängt von der Schwerkraft und von der elektrischen Kraft des geladenen Teilchens im elektrischen Feld des Plattenkondensators ab, sowie vom Luftwiderstand.

1.5.2 Bewegung der Öltröpfchen im Feld

Wir betrachten zunächst nur die nicht elektrischen Beiträge, was man experimentell z.B. durch Ausschalten des elektrischen Feldes erreichen kann. Wir schreiben das Newton'sche Gesetz als

$$F = m \frac{dv}{dt} = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_{\text{Öl}} \frac{dv}{dt}.$$

Hier bezeichnet m die Masse und r den Radius des Öltröpfchens, v seine Geschwindigkeit und ρ die Dichte des Öls. Die Kraft ist eine Summe aus Schwerkraft, Auftrieb und Reibungskraft:

$$F = \frac{4\pi}{3} r^3 (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) g - 6\pi\eta r v.$$

Das Öltröpfchen erreicht deshalb nach kurzer Zeit eine konstante Geschwindigkeit v_0 , in der sich die Schwerkraft und die Reibung gerade aufheben.

$$\frac{4\pi}{3} r^3 (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) g = 6\pi\eta r v_0 \quad (1.2)$$

und damit

$$v_0 = \frac{2}{9} r^2 (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) \frac{g}{\eta}.$$

Die einzige Variable in dieser Gleichung ist der Radius des Öltröpfchens. Er kann somit aus der gemessenen Endgeschwindigkeit bestimmt werden:

$$r = 3 \sqrt{\frac{\eta v_0}{2(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) g}}.$$

Wird nun ein elektrisches Feld angelegt, welches eine Kraft auf das elektrisch geladene Öltröpfchen ausübt, so wird eine andere Gleichgewichtsgeschwindigkeit v_i gemessen; i ist der Index des ausgewählten Tröpfchens. Wir betrachten hier nur den stationären Fall, also den Fall, dass das Tröpfchen eine konstante Endgeschwindigkeit v_i erreicht hat. Diese ist bestimmt durch das neue Gleichgewicht

$$q_i E = \frac{4\pi}{3} r^3 (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) g - 6\pi\eta r v_i.$$

Hier stellt q_i die Ladung des Tröpfchens dar. Wir eliminieren den Schwerkraftterm mit Hilfe von Gl. (1.2) und finden für die Ladung

$$q_i = 6\pi\eta r \frac{v_0 - v_i}{E}.$$

Die Ladung wird also bestimmt über die Differenz der Gleichgewichtsgeschwindigkeit im Feld gegenüber dem feldfreien Wert.

Das Experiment ist keineswegs trivial. Bei sorgfältiger Durchführung findet man aber, dass nicht beliebige, sondern nur bestimmte diskrete Werte gemessen werden.

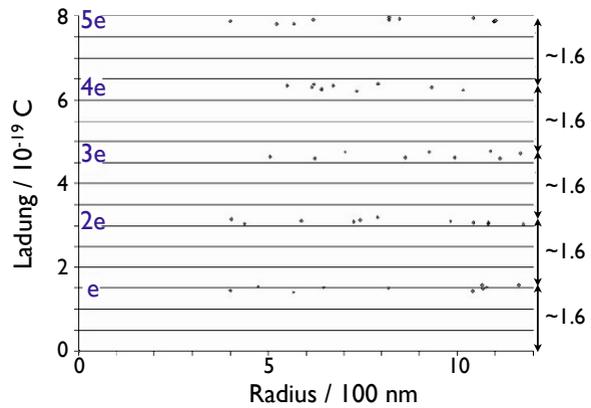


Abbildung 1.24: Millikans Messresultate (schematisch).

Man kann diese Resultat erklären, wenn man postuliert, dass elektrische Ladung nicht kontinuierlich ist, sondern dass die Ladung jedes Tröpfchens ein Vielfaches der Elementarladung

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

ist.

Das Verhältnis von Ladung zu Masse des Elektrons ist eine experimentell relativ einfach zugänglich Größe. Man erhält daraus die Masse

$$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}.$$

1.6 Spezifische Wärme von Festkörpern

1.6.1 Phänomenologie

Aus der Theorie des idealen Gases erwartet man, dass die innere Energie eines Materials durch das Äquipartitionsprinzip bestimmt ist: Pro Freiheitsgrad beträgt die Energie $k_B T/2$. Bei idealen Gasen ist der Energieinhalt damit $3k_B T/2$ pro Atom und die Wärmekapazität (spezifische Wärme)

$$\frac{c_V}{\text{Mol}} \approx \frac{3}{2}R \approx 12.5 \frac{\text{J}}{\text{KMol}},$$

resp.

$$\frac{c_P}{\text{Mol}} \approx \frac{5}{2}R \approx 20.786 \frac{\text{J}}{\text{KMol}}.$$

Ein gutes Beispiel für dieses Verhalten ist Helium.

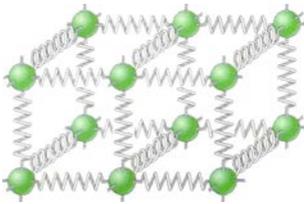


Abbildung 1.25: Schwingung von Atomen im Festkörper.

In Festkörpern sind die Atome nicht mehr frei beweglich, sondern an feste Gitterplätze gebunden. Ihre Bewegung ist deshalb nicht mehr die eines freien Atoms, sondern sie besitzen neben der kinetischen Energie auch potenzielle Energie. Aus der Theorie des harmonischen Oszillators wissen wir, dass die kinetische und potenzielle Energie im zeitlichen Mittel gleich groß sind. Damit erhält man, dass die Energie der atomaren Bewegung im Festkörper gleich $3RT$ pro Mol und die Wärmekapazität $3R \approx 25 \text{ J Mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ sein sollte. Dies wird als Gesetz von Dulong und Petit bezeichnet.

Dieses "Gesetz" ist für viele Festkörper bei hohen Temperaturen eine gute Näherung - eigentlich erstaunlich, wenn man die Vielfalt der Materialien betrachtet. Bei niedrigen Temperaturen geht die spezifische Wärme jedoch gegen Null. Überlegen wir uns

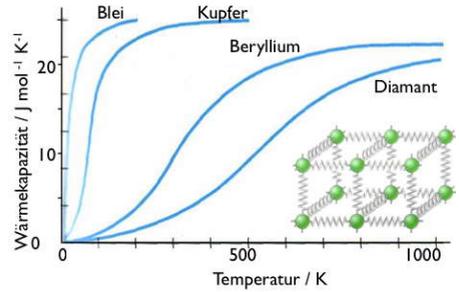


Abbildung 1.26: Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität von Festkörpern.

kurz, was dies bedeutet: Die spezifische Wärme ist ja gegeben durch die Energie, die benötigt wird, um die Temperatur des Materials um einen bestimmten Betrag zu ändern. Wenn sie klein ist, genügt wenig Energie, um die Temperatur stark zu ändern. Anders ausgedrückt kann das Material wenig Energie speichern. Bei tiefen Temperaturen können Festkörper also Energie weniger gut speichern als ein Gas, oder ihr Energieinhalt ist kleiner als man erwarten würde. Die Energie wird aber in beiden Fällen in der Form von Bewegungsenergie der Atome gespeichert.

1.6.2 Einstein's Theorie

Einstein konnte diesen Befund 1907 erklären, indem er annahm, dass die von Planck postulierte Quantelung der Energie auch für Schwingungen gelten sollte: Die Energie der Schwingungen der Atome sollte jeweils $n\hbar\omega$ betragen. Wenn man als einfachsten Fall annimmt, dass sämtliche Schwingungen die gleiche Frequenz ω_0 besitzen und die Anregungswahrscheinlichkeit durch das Boltzmann Gesetz gegeben sei, so beträgt die Energie pro Atom

$$E_a = \frac{3\hbar\omega_0}{e^{\hbar\omega_0/k_B T} - 1}.$$

Pro Mol finden wir damit eine Energie

$$E_0 = N_A E_a.$$

Die spezifische Wärme ergibt sich als Ableitung nach der Temperatur. Wir vereinfachen die Schreib-

weise, indem wir setzen

$$x = \frac{\hbar\omega_0}{k_B T}$$

Damit erhalten wir für die Wärmekapazität

$$\begin{aligned} c_V &= \frac{dE_0}{dT} = \frac{d}{dT} \left[\frac{3N_A \hbar\omega_0}{e^x - 1} \right] \\ &= 3N_A \hbar\omega_0 \left[\frac{x}{T} \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \right] \\ &= 3R x^2 \left[\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \right]. \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt die Grenzfälle hoher und niedriger Temperatur,

$$T \ll \frac{\hbar\omega_0}{k_B} \quad \text{und} \quad T \gg \frac{\hbar\omega_0}{k_B}.$$

Dies entspricht

$$x \gg 1 \quad \text{und} \quad x \ll 1.$$

Für hohe Temperaturen, $x \ll 1$, können wir die Exponentialfunktion entwickeln, $e^x \approx 1 + x$. Damit geht der Nenner gegen x^2 und der gesamte Ausdruck damit wie im Fall des Gases gegen $3R$. Bei tiefen Temperaturen, $x \gg 1$, können wir die Eins gegenüber der Exponentialfunktion vernachlässigen, $e^x \gg 1$. Damit wird

$$c_V \approx 3R x^2 e^{-x},$$

d.h. sie geht gegen Null, in qualitativer Übereinstimmung mit den experimentellen Werten. Der Übergang zwischen den beiden Bereichen geschieht bei der Temperatur

$$T \approx \frac{\hbar\omega_0}{k_B}.$$

Hier ist die Schwingungsfrequenz ω_0 der materialspezifische Parameter. Bei harten Materialien mit leichten Atomen ist die Frequenz hoch und damit auch die Übergangstemperatur.

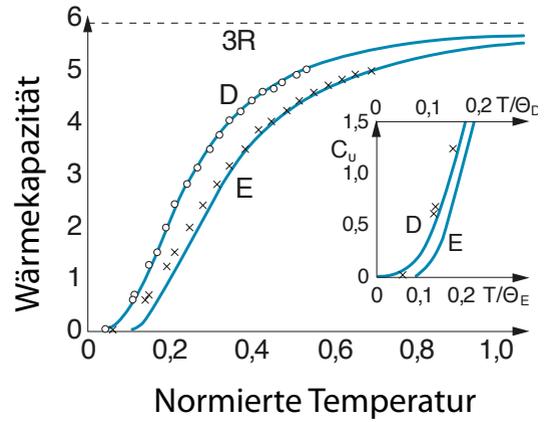


Abbildung 1.27: Wärmekapazität bei tiefen Temperaturen. Vergleich von experimentellen Daten mit den theoretischen Vorhersagen von Debye und Einstein. Die Skalierung der Temperaturachse ist in den beiden Fällen unterschiedlich, deshalb tauchen die Messdaten an unterschiedliche Stelle auf.

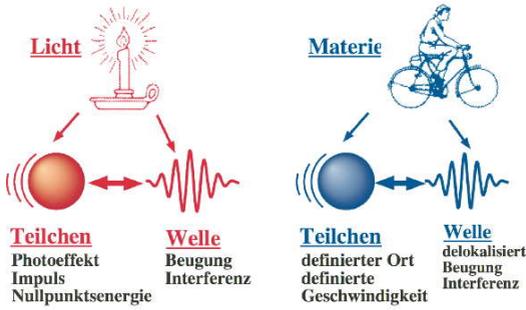
Die Übereinstimmung mit den experimentell bestimmten Werten ist bei tiefen Temperaturen nicht mehr perfekt. Der Grund liegt in Einstein's Annahme, dass alle Oszillatoren die gleiche Schwingungsperiode haben. Eine Verbesserung der Theorie wurde von Debye erreicht. In seinem Modell, das in der Einführung in die Festkörperphysik behandelt wird, steigt die Wärmekapazität $\propto T^3$ an.

1.7 Wellencharakter der Materie

1.7.1 Licht und Materie

Licht besitzt sowohl Teilchen- wie auch Wellencharakter: Bei der Diskussion des Strahlungsgesetzes hatten wir gesehen, dass es einen Teilchencharakter aufweist, ebenso beim Photoeffekt.

Allgemein tritt der Teilchencharakter bei der Wechselwirkung mit Materie in den Vordergrund. Andererseits hatten wir im Zusammenhang mit der Ausbreitung, insbesondere bei Interferenz und Beugung sowie bei der Polarisation deutliche Zeichen



Licht	Materie
$m_0 = 0$	$m_0 > 0$
Photonen	Elektron
	Neutron
	Proton
	Atom
	Molekül
	Planet

Abbildung 1.28: Typische Eigenschaften von Wellen und Teilchen.

Tabelle 1.2: Typische Beispiele für Licht vs. Materie

des Wellencharakters kennengelernt. Die Beziehung zwischen den Wellen- und den Teilcheneigenschaften wird durch die Beziehungen

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

und

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$$

hergestellt, welche die Energie und den Impuls eines Teilchens in Beziehung setzen zu den Welleneigenschaften Frequenz und Wellenlänge, resp. Wellenvektor:

	“Welle”	“Teilchen”
ν, ω	Frequenz	Energie \mathcal{E}
λ, k	Wellenlänge	Impuls p
	Ausbreitung	Wechselwirkung

Tabelle 1.1: Wellen- vs. Teilcheneigenschaften

Die Frequenz der Welle entspricht der Energie des Teilchens, die Wellenlänge seinem Impuls.

Beim Licht können beide Aspekte beobachtet werden. Die Ausbreitung kann weitgehend über seine Welleneigenschaften beschrieben werden, bei der Wechselwirkung mit Materie treten seine Teilcheneigenschaften in den Vordergrund. So kann man Licht durch einen Doppelspalt schicken und die Interferenz beobachten, also eine typische Welleneigenschaft. Wenn nur ein Spalt geöffnet ist, so findet man das Intensitätsmuster I_1 , beim andern Spalt

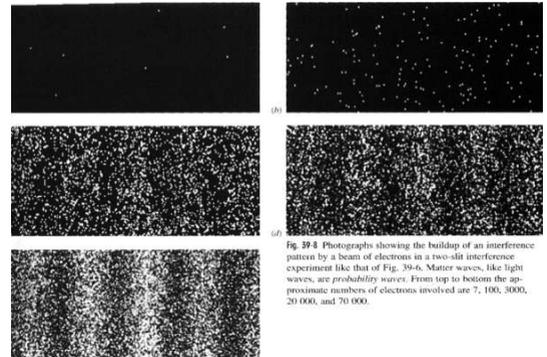


Abbildung 1.29: Interferenzmuster hinter einem Doppelspalt als Folge von einzelnen Photonen, die auf dem Schirm eintreffen.

das Muster I_2 . Sind beide Spalten geöffnet, so ist das Muster nicht die Summe $I_1 + I_2$, sondern ein grundsätzlich anderes Muster I_{12} , wie wir in der Optik diskutiert hatten. Dieser Unterschied ist durch die Interferenz, also eine typische Welleneigenschaft gegeben.

Allerdings beobachtet man auf einem Schirm immer einzelne Photonen, also Teilchen. Das Interessante an diesem Experiment ist, dass es die Teilchen- und Wellenaspekte im gleichen Experiment aufzeigt. So messen wir die Ankunft jedes Teilchens auf dem Schirm z.B. mit einem Zähler, der für jedes Teilchen einen Ort und eine Zeit des Auftreffens liefert. Dieser Teil entspricht somit dem Teilchencharakter. Andererseits können wir von den einzelnen Teilchen nicht sagen, ob sie durch den unteren oder oberen Spalt durchgetreten sind. Diese Information wäre bei einem klassischen Teilchen verfügbar.

Genauso wie für Licht findet man auch bei Mate-

rie beide Aspekte. Mit Materie sind hierbei Teilchen gemeint, die eine nicht verschwindende Ruhemasse aufweisen, wie z.B. Elektronen, Neutronen, Atome, Planeten, Dafür verwenden wir üblicherweise den Begriff "Teilchen". Wie wir aber im folgenden sehen werden, besitzt gewöhnliche Materie nicht nur einen Teilchencharakter, sondern ebenso Welleneigenschaften. Allerdings treten die Welleneigenschaften weniger häufig zu Tage als der Teilchencharakter. Einen spekulativen Hinweis darauf, dass Materie ebenfalls Teilchencharakter aufweisen, gibt auch eine gewisse Ähnlichkeit der formalen Struktur der klassischen Optik mit der analytischen Mechanik: beide können mit Hilfe von Extremalprinzipien wie dem Hamilton'schen Prinzip der Mechanik und dem Fermat'schen Prinzip der Optik. Im Falle des Fermat'schen Prinzip hatten wir gesehen, dass das Extremalprinzip als Interferenzeffekt verstanden werden kann.

1.7.2 Die Hypothese von de Broglie

Die Möglichkeit, dass auch Materie Welleneigenschaften aufweisen könnte, wurde erstmals von Louis de Broglie 1923 geäußert. Er spekulierte, aufgrund des Fermat'schen Prinzips der Optik und des Hamilton'schen Prinzips der Mechanik, dass auch ein Teilchen Welleneigenschaften haben könnte, wobei die Wellenlänge $\lambda = h/p$ und die Frequenz $\omega = E/h$ oder $\nu = E/h$ sein sollte. Dem Teilchen entspricht somit eine Welle, die wir als

$$\Psi = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

schreiben können.

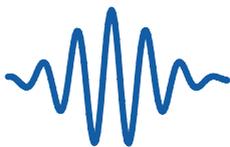


Abbildung 1.30: Wellengruppe.

Genauer gesagt sollten wir uns dies als Wellengruppe vorstellen, welche in der Nähe der klassischen Position des Teilchens lokalisiert ist.

1.7.3 Beispiel: Elektronenwellen

Die Wellenlänge der Materiewellen sollt damit invers proportional zum Impuls des Teilchens sein, seine Frequenz proportional zur Energie. Aufgrund der Kleinheit der Planck'schen Konstante sehen wir leicht, dass die Frequenz sehr groß sein wird, die Wellenlänge sehr klein. Um sie überhaupt beobachten zu können, müssen wir deshalb möglichst leichte Teilchen verwenden. Das leichteste stabile Teilchen ist das Elektron, welches auch leicht zu erzeugen ist. Die Frequenz wird dafür

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{E}{h} = \frac{m_e c^2 + m_e v^2 / 2}{h} \approx \frac{m_e c^2}{h} \\ &= 9 \cdot 10^{-31} \cdot \frac{9 \cdot 10^{16}}{6 \cdot 10^{-34}} \text{s}^{-1} \approx 10^{20} \text{s}^{-1}, \end{aligned}$$

also eine Frequenz, die sehr viel höher ist als alle Frequenzen, die wir bisher diskutiert hatten. Sie wird deshalb nie direkt beobachtet und wird uns im Folgenden nicht weiter interessieren. Allgemein misst man bei solchen Teilchen nicht die Frequenz, sondern die Energie, resp. Masse.

Für die Berechnung der Wellenlänge benötigen wir zunächst die Geschwindigkeit. Wir betrachten Elektronen mit einer kinetischen Energie, wie sie z.B. in einem Röhrenbildschirm auftreten, also z.B.

$$E_{kin} = 100 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-17} \text{ J.}$$

Sie ist damit noch weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit. Damit ist die nichtrelativistische Rechnung erlaubt.

Für die Wellenlänge erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v} = \frac{6 \cdot 10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 6 \cdot 10^6} \\ &\approx 10^{-10} \text{ m,} \end{aligned}$$

also etwa 1 Angström. Diese Wellenlänge ist sehr klein im Vergleich zu makroskopischen Distanzen, aber sie ist vergleichbar mit atomaren Distanzen.

1.7.4 Ausbreitung und Dispersion

Wir überprüfen, ob diese Annahme sinnvoll ist. Insbesondere würden wir erwarten, dass sie in der Nähe des Teilchens lokalisiert bleibt, wenn sich dieses bewegt. Wir betrachten somit ein bewegtes Teilchen mit Masse m und Geschwindigkeit v . Seine gesamte Energie ist dann in nichtrelativistischer ($v \ll c$) Näherung

$$E = mc^2 + \frac{m}{2}v^2.$$

Damit wird die Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{mc^2 + mv^2/2}{\hbar}$$

und der Wellenvektor

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{mv}{\hbar}.$$

Wir lösen auf nach der Geschwindigkeit

$$v = \frac{\hbar k}{m}$$

und eliminieren diese aus dem Ausdruck für ω :

$$\omega = \frac{mc^2}{\hbar} + \frac{\hbar k^2}{2m}.$$

Die Geschwindigkeit der Wellengruppe sollte nun gegeben sein als

$$v_G = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = v.$$

Somit ist sichergestellt, dass sich die Wellengruppe mit der gleichen Geschwindigkeit wie das klassische Teilchen bewegt.

Die Phasengeschwindigkeit ist dabei (im nichtrelativistischen Grenzfall)

$$v_P = \frac{\omega}{k} = \frac{\left(\frac{mc^2}{\hbar} + \frac{\hbar k^2}{2m}\right)}{\frac{mv}{\hbar}} \approx \frac{c^2}{v},$$

also immer größer als die Lichtgeschwindigkeit. Ihre physikalische Bedeutung ist aber gering.

Interessant in diesem Zusammenhang ist der Vergleich zur Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Hohlleiter. In beiden Fällen fanden wir, dass die Phasengeschwindigkeit größer ist als die Lichtgeschwindigkeit, und dass das Produkt von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

$$v_P v_G = c^2$$

gerade gleich dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit ist. Man kann das so interpretieren, dass die Photonen im Hohlleiter ein endliche Ruhemasse erhalten, aufgrund der Wechselwirkung mit der Umgebung. Ähnliche Phänomene findet man in der Festkörperphysik, wo die Elektronen im Kristall sich bewegen wie freie Teilchen, außer dass ihre Masse von der Elektronenmasse abweicht, die wir für freie Teilchen gefunden hatten. Man spricht hier von einer effektiven Masse.

1.7.5 Elektronenbeugung

Wie oben gezeigt, ist die Wellenlänge einer Materiewelle sehr klein, und sie nimmt mit zunehmender Masse ab. Um sie erfolgreich messen zu können, benutzte man zunächst die leichtesten zur Verfügung stehenden Teilchen, d.h. Elektronen. Mit Beschleunigungsspannungen unterhalb von 100 V erhält man Wellenlängen, die im Bereich von atomaren Distanzen liegen. Eine Bestätigung der Wellenhypothese kann somit erreicht werden, wenn man zeigen kann, dass periodische Anordnungen von Atomen Beugungseffekte erzeugen. Diese Möglichkeit wurde 1925 von Elsasser vorgeschlagen. Eine Voraussetzung dafür ist, dass Elektronen elastisch gestreut werden, so dass die reflektierte Welle eine feste Wellenlänge aufweist.

Die erste experimentelle Bestätigung für de Broglie's Vermutung wurde 1927 von Davisson und Germer publiziert. Sie benutzten Streuung von Elektronen an einer Kristalloberfläche. Davisson hat dafür 1937 den Nobelpreis erhalten. Seine Rede anlässlich der Preisverleihung ist u.a. deshalb interessant

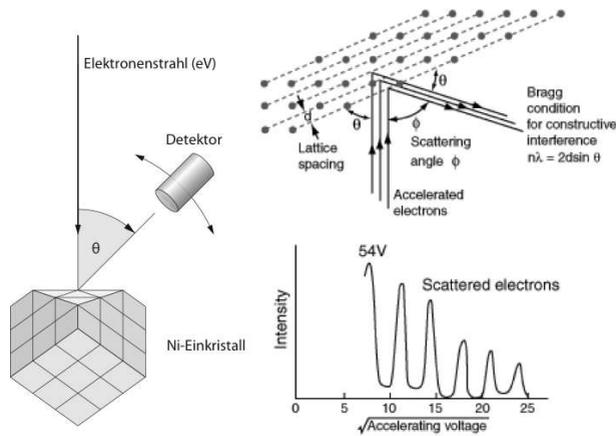


Abbildung 1.31: Beugung von Elektronenwellen an einem Ni Einkristall.

weil sie zeigt, wie Forschung wirklich abläuft, d.h. nicht immer so geradlinig wie es beim Studium von Lehrbüchern teilweise erscheint, sondern u.a. durch eher zufällige Begegnungen, Diskussionen und experimentelle oder technische Randbedingungen diktiert.

Unabhängig davon fand G.P. Thomson das gleiche Resultat mittels Transmission eines Elektronenstrahls durch einen dünnen Kristall.

Sie fanden experimentell, dass die Elektronen, die mit einer bestimmten kinetischen Energie unter einem definierten Winkel auf die Kristalloberfläche auftreffen, genau dann reflektiert wurden, wenn die sog. Bragg-Bedingung erfüllt ist:

$$a \sin \theta = n\lambda = \frac{nh}{p} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Typische Distanzen a zwischen Atomlagen liegen im Bereich von einigen Angström, also 10^{-10} m. Ein typisches experimentelles Resultat war Gitterperiode $a = 2.15 \text{ \AA}$, Beschleunigungsspannung $E = 54\text{V}$, Beugungswinkel ($n=1$) $\theta = 50^\circ$. Aus dem Beugungswinkel und dem Gitterabstand erhält man eine Wellenlänge von 1.65 \AA , während de Broglie's Voraussage 1.67 \AA ergibt.

Genauso wie bei einem Lichtmikroskop kann man bei einem Elektronenmikroskop die Fokussierung der Elektronenstrahlen mit Hilfe der Wellenoptik verstehen.

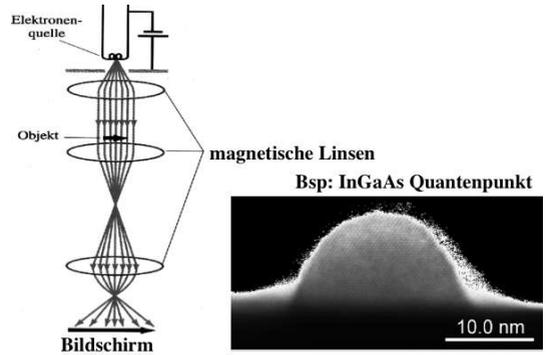


Abbildung 1.32: Elektronenmikroskop und elektronenmikroskopische Aufnahme eines Halbleiter-Quantenpunktes.

1.7.6 Neutronen

Ein anderes wichtiges Beispiel sind Neutronen, welche ebenfalls für Strukturuntersuchungen verwendet werden. Insbesondere werden sogenannte thermische Neutronen verwendet, d.h. Neutronen, deren kinetische Energie der mittleren thermischen Energie bei Raumtemperatur entspricht

$$E = \frac{p^2}{2m_N} = \frac{3}{2}k_B T$$

für $T = 300 \text{ K}$. Diese Energie entspricht einem Impuls, welche wir aus der kinetischen Energie

$$E = \frac{p^2}{2m_N}$$

als

$$p = \sqrt{3k_B T m_N}$$

berechnen. Damit wird die Wellenlänge

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3k_B T m_N}} \\ &= \frac{6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{3 \cdot 1.4 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 1.7 \cdot 10^{-27}}} \text{ m} \\ &\approx 10^{-10} \text{ m,} \end{aligned}$$

also wiederum etwa ein Angström. Für höherenergetische Neutronen, z.B. mit einer Energie von 100

eV (wie die Elektronen im ersten Beispiel) wird der Impuls

$$p = 2\sqrt{mE_{kin}}$$

um den Faktor

$$\sqrt{\frac{m_N}{m_e}} \approx \sqrt{1836} \approx 43$$

größer als bei den Elektronen und die Wellenlänge deshalb um den gleichen Faktor kleiner.

1.7.7 Schwerere und zusammengesetzte Teilchen

Allgemein gilt: mit zunehmender Masse wird die de Broglie Wellenlänge kürzer. Prinzipiell bleibt aber die Beziehung gültig, auch bei zusammengesetzten Teilchen wie Atomen.

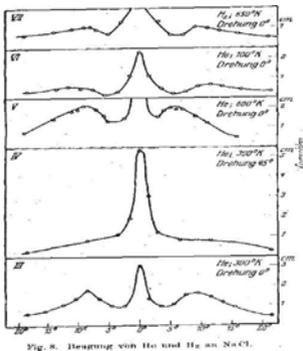


Fig. 8. Beugung von He und H₂ an NaCl.

Abbildung 1.33: Beugungsmuster von He und H₂.

Erste Versuche dazu wurden 1930 von Estermann und Stern mit Helium durchgeführt. Ref: I. Estermann and O. Stern, Z. Phys. 61 (1930) 95.

Ein Heliumatom hat eine Masse von $6.7 \cdot 10^{-27}$ kg, also ähnlich wie ein Neutron (x4), und damit bei thermischen Geschwindigkeiten eine ähnliche Wellenlänge (1/2).

In den letzten Jahren wurde auf diesem Gebiet intensiv geforscht. So wurde gezeigt, dass man für Atome Interferometer bauen kann, z.B. ein Doppelspaltexperiment.

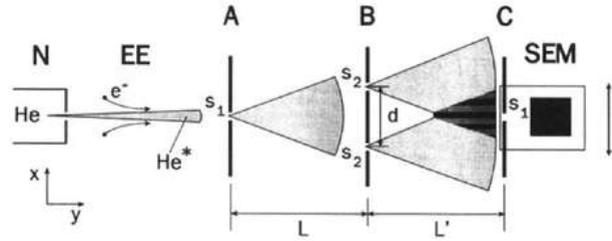


Abbildung 1.34: Doppelspalt-Interferometer für He-Atome.

Der nächste Schritt ist von Atomen zu Molekülen. Auch dieser Schritt wurde bereits von Estermann und Stern durchgeführt, welche neben He auch die Beugung von molekularem Wasserstoff, H₂, untersuchten.

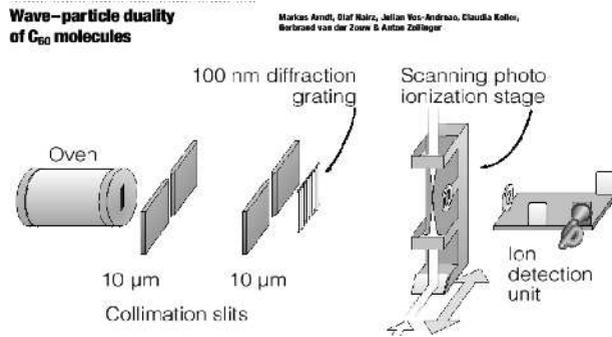


Abbildung 1.35: Interferometer für die Messung der Beugung von Molekülen.

Inzwischen wurden auch an größeren Molekülen Interferenzerscheinungen untersucht.

Abb. 1.36 zeigt zwei größere Moleküle und die damit gemessenen Interferenzmuster. Werden aber die Massen grösser, so werden die Wellenlängen extrem kurz. Bei einer Kugel mit eine Masse von 1 kg und eine Geschwindigkeit von 1 m/s wird die de Broglie Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p} = 6 \cdot 10^{-34} \text{ m.}$$

Bei der Diskussion der Optik hatten wir gefunden, dass wir die Welleneigenschaften eines Teilchens nicht beobachten können wenn die Dimensionen des Apparates groß sind im Vergleich mit der Wellenlänge. Diese Voraussetzung ist offensichtlich für eine

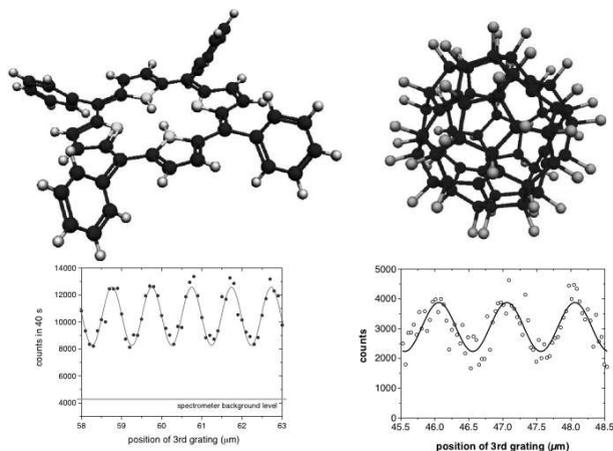


Abbildung 1.36: Zwei größere Moleküle und die daran gemessene Interferenz. Hackermueller et al. [1]

Kegelbahn erfüllt. In diesem Bereich kann die Ausbreitung mit Hilfe der geometrischen Optik, resp. der klassischen Mechanik diskutiert werden.

Man kann noch weitergehen und z.B. die Wellenlänge der Erde bestimmen. Deren Masse beträgt $6 \cdot 10^{24}$ kg. Auf der Bahn um die Sonne hat sie eine Geschwindigkeit von ca. 30 km/sec und damit eine Wellenlänge von $4 \cdot 10^{-63}$ m. Deshalb ist die klassische Mechanik, welche die Welleneigenschaften der Materie vollständig vernachlässigt, eine ausgezeichnete Näherung für die Beschreibung von astronomischen Objekten.

1.7.8 Unschärfe und Dualität

Die Messung von Interferenz am Doppelspalt setzt voraus, dass jedes Teilchen durch beide Spalten fliegt.

Prinzipiell wäre eine Messung, welche das entscheidet allerdings denkbar. Wir könnten z.B. in der Nähe des Spalts eine Lichtquelle aufstellen, welche ein Bild des durchtretenden Teilchens aufnimmt. Dieses Experiment wurde in verschiedenen Varianten inzwischen auch durchgeführt. Man findet aber, dass durch diese Messung die Interferenz zerstört wird, dass also das Intensitätsmuster auf dem Schirm nicht mehr I_{12} , sondern $I_1 + I_2$ ist.

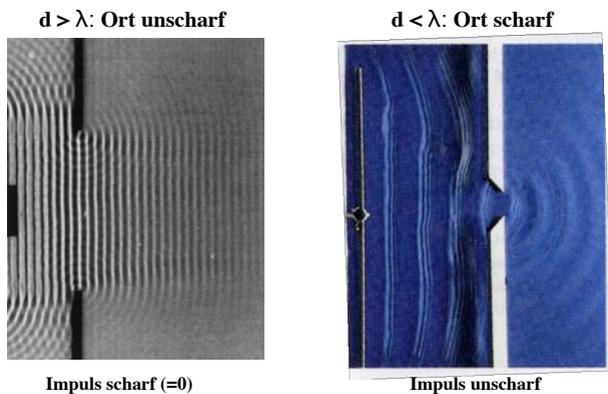


Abbildung 1.37: Grenzfälle der geometrischen Ausbreitung (Teilchen) und Wellenausbreitung.

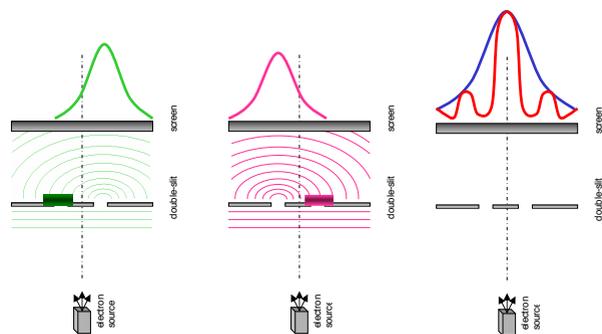


Abbildung 1.38: Interferenz existiert nur, wenn das Teilchen durch beide Spalten fliegt.

Dieses Resultat kann man einfach verstehen: Wie wir im Kapitel Optik gesehen hatten, muss das Licht, das zur Abbildung verwendet wird, eine Wellenlänge haben, die kleiner ist als der Abstand der beiden Spalte, $\lambda < a$. Außerdem muss eine Wechselwirkung zwischen dem Teilchen und dem Licht stattfinden. Dafür kann man z.B. den Compton-Effekt verwenden. Als Minimum für eine Abbildung muss am Elektron ein Photon gestreut werden, damit man "weiss", durch welchen Spalt das Teilchen geflogen ist. Damit wird der Impuls des Photons mindestens $p = h/\lambda$ betragen. Bei der Streuung wird dieser Impuls auf des Teilchen übertragen, so dass sich dessen Impuls um einen Betrag von der Größenordnung h/λ ändert. Wenn wir den Ort des Teilchens mit der Genauigkeit λ bestimmen ändern wir somit notwendigerweise seinen Impuls um $\Delta p = h/\lambda$. Bezogen

auf das Doppelspaltexperiment ändern wir damit das Interferenzmuster auf dem Schirm.

Dieses Experiment zeigt eine allgemeine Eigenschaft der Messung von Teilchen: es ist entweder möglich, seinen Impuls p oder seinen Ort x genau zu bestimmen: Das Interferenzexperiment ergibt eine Messung des Impulses, das Experiment mit dem Licht eine Bestimmung des Ortes. Jede Messung hat eine minimale Auflösung Δp , resp. Δx . Diese beiden Unschärfen sind durch die Beziehung

$$\Delta x \Delta p \geq h,$$

die "Heisenbergsche Unschärfenrelation".

Das gleiche sieht man auch leicht anhand der bereits diskutierten Wellengruppe: Je größer die Ausdehnung der Wellengruppe im Raum, desto größer die Unschärfe des Ortes. Je kleiner die Wellengruppe wird, also je besser das Teilchen lokalisiert ist, desto ungenauer ist aber die Wellenlänge und damit der Impuls des Teilchens bestimmt.

Dieses Prinzip wurde von Werner Heisenberg erstmals formuliert und trägt deshalb seinen Namen. Es wird als Unschärfen- oder Unsicherheitsprinzip bezeichnet.

1.8 Atome

1.8.1 Der Atombegriff in der Antike

Wir gehen heute als selbstverständliche Grundlage davon aus, dass Atome die Bausteine der Materie sind, die uns umgibt und aus der auch wir selber bestehen. Obwohl wir diese Tatsache heutzutage in der Schule unterrichten, und Tageszeitungen sie als bekannt voraussetzen, ist es noch keine hundert Jahre her, dass ihre Existenz auch wissenschaftlich nicht gesichert war. Einzelheiten über ihre Verhalten, ja sogar ihre Größe waren nur in sehr groben Umrissen bekannt.

Der Begriff "Atom" stammt aus dem Griechischen. Im antiken Griechenland fragten die Philosophen nach Unvergänglichem, nach einem ewigen Sein.

Wenn aber es aber ein ewiges Sein gab, so schien dies nicht vereinbar mit Veränderungen. Insbesondere Parmenides forderte, dass alles Seiende unwandelbar sein müsse. Veränderungen waren deshalb nicht möglich, respektive nur Schein.

Natürlich konnten nicht alle Philosophen diese These akzeptieren. Insbesondere Demokrit suchte nach einer Lösung dafür. In heutiger Ausdrucksweise kann man seine Lösung etwa so beschreiben: Die Welt besteht nach Demokrit aus leerem Raum und unteilbaren, unwandelbaren Grundbestandteilen der Materie, den Atomen. Wir kennen heute Demokrit hauptsächlich als den "Entdecker" der Atome, aber genau so wichtig wie seine Forderung nach der Existenz von Atomen war, dass er dem leeren Raum eine eigenständige Existenz zubilligte. Dadurch wurde die Existenz von Atomen in seinem Sinn erst möglich. Diese bilden die Grundbausteine der Materie, sie und der leere Raum sind unwandelbar. Damit besteht eine sichere Basis für das Sein, und Veränderung ist trotzdem möglich, da die Atome sich im leeren Raum bewegen und neu gruppieren können. Demokrit forderte bereits die Existenz unterschiedlicher Atome, welche sich durch Form, Lage und Geschwindigkeit unterschieden. Auch unsere Sinneseindrücke werden gemäss Demokrit von Atomen übertragen; in heutiger Lesart würden wir sagen, dass auch Licht aus Atomen besteht. Ja sogar die Seele besteht gemäss Demokrit aus Atomen - aus einer besonders glatten, feuerartigen Atomen, welche von Körperatomen umgeben sind.

Demokrit war keineswegs der einzige, der eine solche These vertrat; es gab auch schon frühere Versuche, z.B. durch Leukipp (~450 v.C.), von dem Demokrit wesentlich beeinflusst wurde. Ausserdem: Empedokles (~490-430: Erde, Feuer, Luft und Wasser) und Anaxagoras (~500-428).

Aber es gab auch Kritiker, welche sich mit diesem Konzept nicht anfreunden konnten, insbesondere Aristoteles, der lehrte, dass die Materie aus den vier Elementen Erde, Luft, Feuer und Wasser aufgebaut sei. Die Eigenschaften der Stoffe sollten dann von der anteilmässigen Zusammensetzung bestimmt werden. Der grosse Einfluss von Aristoteles war wohl auch der Hauptgrund dafür, dass die Atomtheorie lange Zeit nicht ernst genommen wur-

de.

Literatur: A.G.M.v. Melsen, Atom gestern und heute., Karl Alber, München (1957). K. Simonyi, Kulturgeschichte der Physik., Verlag Harri Deutsch, Thun (1990).

1.8.2 Die moderne Atomtheorie

Antoine Lavoisier (1743-1794)

"Gesetz der konstanten Proportionen"



J. Dalton (1766-1844)

"Gesetz der multiplen Proportionen"



Abbildung 1.39: Anfänge der modernen Atomtheorie.

Erst gegen Ende des achtzehnten Jahrhunderts wurde die Atomhypothese auf wissenschaftlicher Grundlage wieder entdeckt. Den Anstoß dazu gab die Chemie, wo insbesondere Lavoisier empirisch gefunden hatte, dass chemische Elemente in bestimmten Verhältnissen miteinander reagieren. So entstehen z.B. aus zwei Teilen Wasserstoff und einem Teil Sauerstoff Wasser. Dies war ein völlig unerwartetes Resultat. Wenn die Materie aus den vier aristotelischen Elementen aufgebaut wäre, würde man erwarten, dass diese in beliebigen Verhältnissen reagieren könnten.

John Dalton führte diese Experimente weiter. Er fand insbesondere, dass die möglichen Verhältnisse, in denen die gleichen Elemente reagieren konnten, durch kleine ganze Zahlen beschrieben werden konnten. Hier ein Beispiel für Verbindungen von Sauerstoff mit Stickstoff. Dieses experimentelle Resultat konnte Dalton so erklären, dass, ganz im Sinne Demokrits, unveränderliche Bestandteile der einzelnen Elemente, eben die Atome, sich unterschiedlich zusammenfügen und so die beobachtete Vielfalt der Substanzen erzeugen. Das bekannteste Beispiel ist

wahrscheinlich Wasser, wo sich zwei Wasserstoffatome und ein Sauerstoffatom zu einem Wassermolekül verbinden.

Im Verlauf des 19. Jhd wurden die wichtigsten Arten von Atomen entdeckt und im periodischen System der Elemente aufgelistet - zunächst entsprechend dem relativen Gewicht, dann aufgrund der Ordnungszahl. Die Entdeckung der Brownschen Bewegung, einer scheinbar zufälligen Bewegung von kleinen Rauch- und Pollenteilchen, wurde als Hinweis auf die Existenz von Atomen gedeutet, welche zwar selber nicht sichtbar sind, aber durch Stöße die Bewegung des Teilchens beeinflussen.

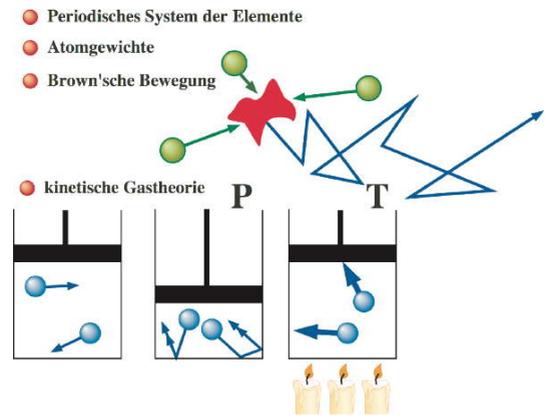


Abbildung 1.40: Thermodynamische Hinweise auf die Existenz von Atomen.

Die Annahme, dass Gase aus Atomen aufgebaut seien, erlaubte auch, die Thermodynamik auf ein mechanisches Modell, nämlich die kinetische Gastheorie zurückzuführen und insbesondere den Druck als eine grosse Zahl von Stößen der Atome mit den Gefäßwänden zu interpretieren. Wenn das Volumen verkleinert oder die Temperatur erhöht wurde, wurden die Stöße zahlreicher und heftiger und der Druck damit größer.

Damit war eine der wichtigsten Grundlagen für die Physik, wie auch für die Chemie geschaffen - obwohl bisher noch niemand ein Atom gesehen hatte. Obwohl man an ihre Existenz glaubte, wusste niemand, wie denn die Atome aussehen, ja nicht einmal wie groß sie denn eigentlich waren.

1.8.3 Feld-Ionen Mikroskopie

Die erste Methode, welche Atome direkt sichtbar machte, war die Feld-Ionen Mikroskopie.

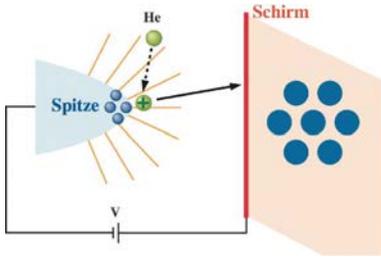


Abbildung 1.41: Feld-Ionen Mikroskopie.

Es handelt sich dabei um ein relativ einfaches Gerät: im Wesentlichen benötigt man eine sehr scharfe Spitze, an die man eine positive elektrische Spannung anlegt. Dadurch erhält man an der Spitze ein sehr hohes elektrisches Feld. Eine Spannung von 10 kV kann eine elektrische Feldstärke von bis zu 10^{10} V/m erzeugen.

Außerhalb der Spitze befindet sich mit niedrigem Druck ein Gas, typischerweise Helium. Wenn ein Heliumatom in die Nähe der Spitze gelangt, wird es durch dieses enorme elektrische Feld ionisiert, das heißt diese Metallspitze zieht eines der Elektronen des Heliumatoms weg. Dadurch wird das Heliumatom zu einem positiv geladenen Heliumion und wird nun durch das starke elektrische Feld sehr rasch von der Spitze weg beschleunigt. Nach einer Distanz von etwa 10 cm trifft es auf einen Schirm, wo es sichtbar gemacht wird. Da sich die Atome auf dem direktesten Weg von der Spitze entfernen, entsteht dadurch auf dem Schirm ein direktes Bild der Spitze. Die Vergrößerung kommt direkt durch das Verhältnis des Radius der Spitze zur Distanz vom Schirm zustande und benötigt keine weiteren abbildenden Elemente. Man erhält also auf diese Weise auf dem Schirm ein Bild dieser Spitze mit sehr hoher Auflösung. Allerdings ist das Bild ziemlich stark verzerrt.

Literatur T.T. Tsong, Atom-probe field ion microscopy., Cambridge University Press, Cambridge (1990).

Eine weitere Möglichkeit ist die Feldemissions-Mikroskopie. Hier wird die Wolfram-Spitze auf ein

negatives Potenzial gesetzt und geheizt. Dadurch treten Elektronen aus, welche ebenfalls auf einem Fluoreszenz-Schirm sichtbar gemacht werden können.

Exp. 89: Feldemissionsmikroskop

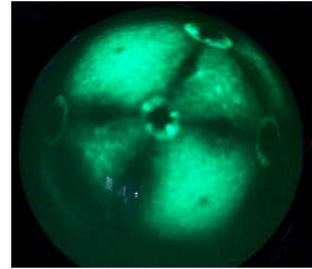


Abbildung 1.42: Bild einer W-Spitze mit Ba-Atomen.

Im Experiment wird eine Wolfram-Spitze abgebildet. Darauf können zusätzlich Ba-Atome aufgedampft werden. Je nach Temperatur der Kathode kann man die thermische Bewegung der aufgedampften Atome beobachten.

1.8.4 Elektronenmikroskopie

Eine der heute am weitesten verbreiteten Methoden, mit denen man die atomare Struktur der Materie sichtbar machen kann, ist die Elektronenmikroskopie. Dabei werden anstelle von Licht Elektronenstrahlen verwendet, und anstelle von Linsen aus Glas verwendet man dabei elektromagnetische Linsen, um den Strahl zu fokussieren und abzubilden. Für hochauflösende Elektronenmikroskopie verwendet man Beschleunigungsspannungen von bis zu 100 kV. Bei diesen Energien bewegen sich die Elektronen relativistisch und ihre de Broglie Wellenlänge ist weniger als 10^{-12} m. Die Auflösung wird somit nicht mehr durch Beugungseffekte beschränkt, sondern nur noch durch experimentelle Probleme, wie z.B. Linsenfehler.

Abb. 1.43 zeigt eine elektronenmikroskopische Aufnahme eines Molekülkristalls. Man sieht hier direkt die einzelnen Atome und kann gut schwerere von leichteren Atomen unterscheiden. Außerdem kann

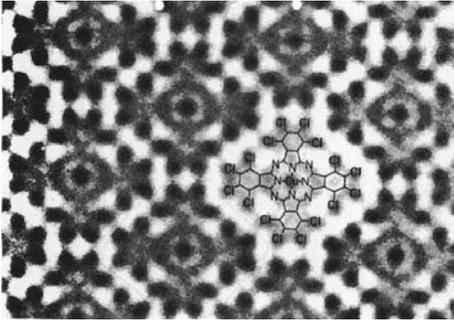


Abbildung 1.43: Elektronenmikroskopische Aufnahme eines Molekülkristalls.

man erkennen, wie diese Atome in Molekülen gebunden sind.

1.8.5 Rastersondenmikroskopie

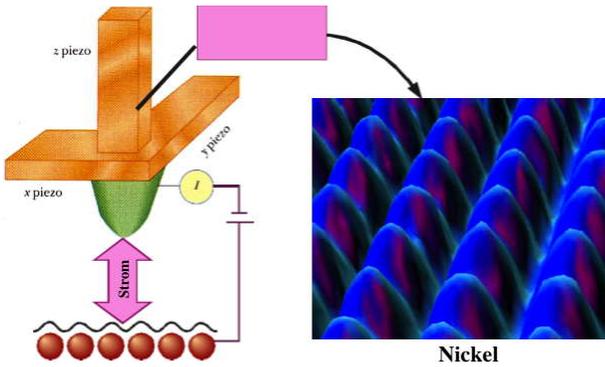


Abbildung 1.44: Messung einer Ni-Oberfläche mit Hilfe eines Raster-Tunnel Mikroskops.

Eine neue Art, Atome abzubilden, wurde 1982 in Zürich entwickelt: die Rastertunnelmikroskopie, welche von Binnig und Rohrer am IBM Forschungslaboratorium in Rüschlikon entwickelt wurde. Dabei wurde eine feine Spitze über eine Oberfläche geführt, wobei der Abstand zwischen der Spitze und der Oberfläche konstant gehalten wurde. Indem man die Position der Spitze aufzeichnete, konnte man ein Bild der Oberfläche erhalten. Man tastet also die Oberfläche mit einer Spitze ab, benutzt also eine Art verfeinerten Tastsinn, um die Oberfläche sichtbar zu machen. Die Methode erlaubt eine sehr hohe Auflösung und einzelne Atome können damit gut sichtbar

gemacht werden. Die Methode hat sich inzwischen sehr weit verbreitet und es wurden eine grosse Zahl weiterer Sonden für die Messung von Oberflächen entwickelt, welche auch nichtleitende Oberflächen abbilden können. Außerdem hat man auch gelernt, mit dem Mikroskop Atome zu verschieben, nicht nur zu beobachten.

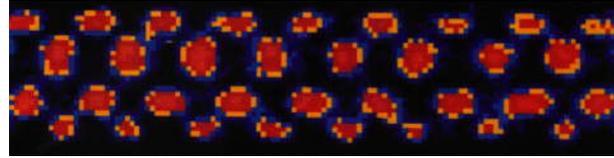


Abbildung 1.45: Einzelne Mg⁺-Ionen in einer Ionenfalle. Waki et al. [2]

Auch mit optischen Methoden kann man einzelne Atome sichtbar machen. Abb. 1.45 zeigt ein Bild von atomaren Ionen, die in einer elektromagnetischen Falle gespeichert und mit Laserlicht zur Fluoreszenz angeregt. Der Abstand zwischen den Ionen beträgt hier einige 10 μm , so dass sie mit optischer Mikroskopie unterschieden werden können.

1.8.6 Thomson's Modell

Atome wurden ursprünglich als konstante und unteilbare Grundbestandteile der Materie eingeführt. Tatsächlich hatte man schon im 19. Jhd erste Hinweise darauf, dass Atome nicht die ewigen und unteilbaren Grundbestandteile der Materie waren, welche Demokrit postuliert hatte. Ein Hinweis auf die endliche Lebensdauer war die Radioaktivität. Dass sie nicht unteilbar sind, zeigte die Entdeckung des Elektrons: bei der Elektrolyse, wie auch bei der Entdeckung der Kathodenstrahlen schienen die Ladungsträger aus den Atomen herauszukommen.

Diese Teilchen, welche z.B. auch in einem Funken beobachtet werden können, sind für alle Arten von Atomen identisch. Sie tragen eine negative elektrische Ladung. Da die Atome elektrisch neutral sind, mussten sie also außer den Elektronen auch einen positiv geladenen Teil enthalten.

Lord Thomson stellte sich das in der zweiten Hälfte des 19. Jhd. so vor, dass der positiv geladene Teil

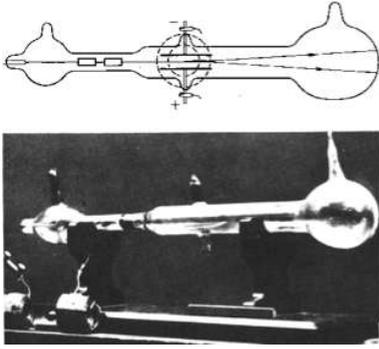


Abbildung 1.46: Vakuumpumpe, mit dessen Hilfe J.J. Thomson die Elektronen entdeckte.

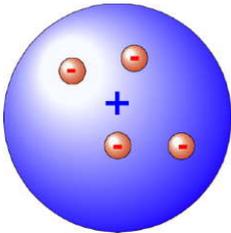


Abbildung 1.47: Thomson's Atommodell "Pudding mit Rosinen".

eine Art Teig oder Pudding darstellte, in dem sich die Elektronen wie Rosinen aufhielten.

1.8.7 Rutherford's Experiment

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurden dann verschiedene Experimente durchgeführt, welche das Innere des Atoms erkunden sollten. Dünne Metallfolien, wurden mit subatomaren Partikeln, insbesondere Elektronen und α -Teilchen beschossen.

Die bekanntesten Experimente wurden von E. Rutherford (1871-1937) in den Jahren 1911-1913 durchgeführt. Die Resultate zeigten, dass der grösste Teil der Teilchen durch die Folien durchflog, ohne wesentlich abgelenkt zu werden. Ein kleiner Teil aber wurde praktisch in die Richtung zurückgestreut, aus der sie gekommen waren. Dies war ein völlig unerwartetes Ergebnis, in krassem Gegensatz zu den Voraussagen aufgrund des Thomson'schen Modells des Atoms. Rutherford beschrieb den Ausgang seiner Experimente so, dass es aussehen würde, als wä-

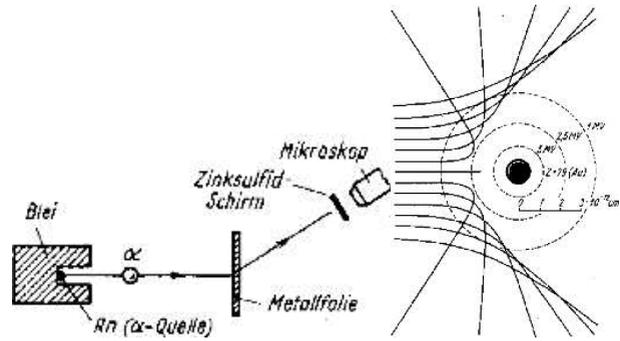


Abbildung 1.48: Rutherford's Streuexperiment mit α -Teilchen.

re eine Kanonenkugel an einem Blatt Papier abgeprallt. Die Resultate liessen sich nur interpretieren, wenn man annahm, dass der grösste Teil der Masse des Atoms ist in einem sehr kleinen Gebiet konzentriert ist. Der Durchmesser dieses Atomkerns ist von der Grössenordnung von 10^{-15} m, mehrere hunderttausend mal kleiner als das Atom als Ganzes. Auf die Erde übertragen, würde dies bedeuten, dass die gesamte Masse der Erde in einer Kugel von wenigen Metern Durchmesser konzentriert wäre. Dieser Kern musste also die positive Ladung des Atoms enthalten, während die negative Ladung in den Elektronen lokalisiert war.

1.8.8 Das Atom als Sonnensystem

Man wusste also schon, dass der Kern positiv geladen sein musste. Aufgrund der damals bekannten Naturgesetze konnte man annehmen, dass das Atom durch elektrostatische Kräfte zusammengehalten wurde, also die Anziehung zwischen entgegengesetzten Ladungen.

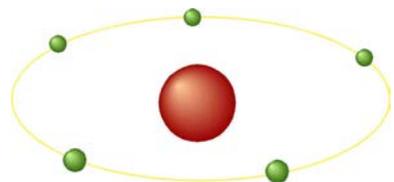


Abbildung 1.49: Atommodell als Planetensystem.

Damit erinnerte dieses System natürlich stark an das Sonnensystem: Die Elektronen sollten also auf kreis-

förmigen oder elliptischen Bahnen um den Atomkern kreisen, wobei sie von der elektrostatischen Anziehung auf der Bahn gehalten wurden. Da die Masse des Kernes sehr viel grösser war als die der Elektronen, konnte man davon ausgehen, dass der Kern praktisch in Ruhe bleibt, während sich die Elektronen um ihn bewegen.

Dabei tauchte aber ein großes Problem auf: Eine Kreisbewegung ist eine beschleunigte Bewegung. Die Elektrodynamik, welche im 19. Jhd. durch Maxwell festgeschrieben worden war, sagte aber voraus, dass beschleunigte elektrische Ladungen elektromagnetische Strahlung aussenden. Diese Strahlung würde Energie aus dem Atom abführen. Das Elektron müsste demgemäss immer näher zum Kern rücken, dabei schneller werden und mehr Energie abstrahlen und innert sehr kurzer Zeit in den Kern stürzen. Nach diesem Modell wären also Atome nicht stabil, es sollten gar keine Atome und deshalb auch keine Materie existieren. Es gab hier also einen Widerspruch zur experimentell beobachteten Tatsache, dass Materie existiert. Damit war klar, dass dieses Modell die Wirklichkeit nicht korrekt beschrieb.

1.8.9 Spektrallinien

Die weiteren Hinweise dafür, wie Atome aufgebaut sind, stammten nun zum größten Teil aus der Untersuchung ihrer Wechselwirkung mit Licht. Schon im letzten Jahrhundert hat man festgestellt, dass freie Atome Licht bei einigen wenigen, scharf bestimmten Wellenlängen absorbieren oder emittieren.

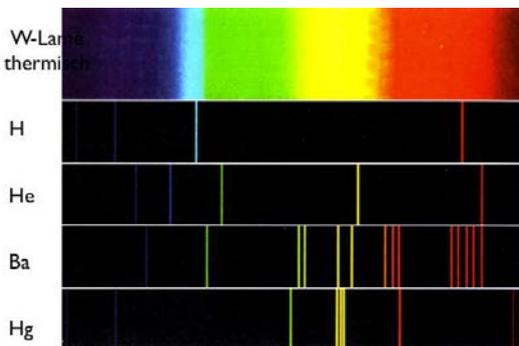


Abbildung 1.50: Atomare Linienspektren.

E80: Balmerserie des H

In diesem Experiment werden Wasserstoffatome erzeugt und mit einem Elektronenstrahl zum Glühen gebracht. Wenn man das Licht, das insgesamt rosa aussieht, spektral analysiert, findet man eine Reihe von diskreten Emissionslinien. Diejenigen, die im sichtbaren Bereich des Spektrums liegen, werden hier auf dem Bildschirm dargestellt. Weitere Linien finden sich im Ultravioletten und infraroten Bereich des Spektrums. Bereits zum Ende des 19. Jh waren viele spektrale Linien des H-Atoms bekannt, welche in Reihen zusammengefasst werden konnten. Sämtliche Wellenlängen konnten durch eine einfache empirische Formel zusammengefasst werden:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

E82: Spektrallinien von Hg

Ähnliche Linien findet man im Spektrum einer Quecksilberdampfampe. Ein besser bekanntes Beispiel sind die Natriumdampfampfen, welche als Strassenbeleuchtung verwendet werden. Wenn man die Auflösung des Spektrometers hoch genug wählt, sieht man, dass diese Linien sehr schmal sind.

Gemäss der Einstein'schen Beziehung zwischen Energie und Frequenz $E = h\nu$ bedeutet dies, dass Atome Energie nur in bestimmten Paketen aussenden oder absorbieren. Wenn wir die Maxwell'sche Theorie auf das Planetensystem-Modell des Atoms anwenden, erwarten wir hingegen, dass diese Licht mit einem kontinuierlichen Spektrum abstrahlen. Dies, sowie die Tatsache, dass die klassische Elektrodynamik die Existenz von stabilen Atomen nicht befriedigend erklären konnte, war eine der wichtigsten Triebfedern für die Entwicklung der Quantenmechanik. Eine weitere wichtige Entdeckung war der Faraday Effekt. Faraday, einer der Pioniere der klassischen Elektrodynamik, hatte gezeigt, dass Magnetfelder die Wechselwirkung zwischen Licht und Atomen beeinflussen. Insbesondere können sie die Polarisationssebene des Lichtes drehen.

Literatur: F. Hund, Geschichte der physikalischen Begriffe., BI Wissenschaftsverlag, Mannheim.

1.8.10 Der Franck-Hertz Versuch

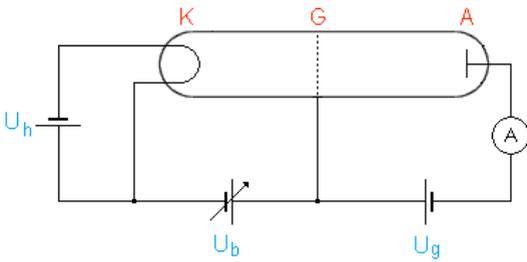


Abbildung 1.51: Das Franck-Hertz Experiment.

(Franck und Hertz 1913, Nobelpreis 1925) In einer Quecksilberdampföhre verlieren die von der Kathode zur Anode fliegenden Elektronen durch Kollisionen mit den Quecksilberatomen offenbar vorzugsweise bei diskreten Werten Bewegungsenergie.

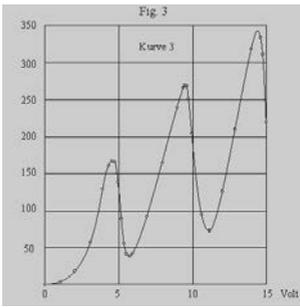


Abbildung 1.52: Das Franck-Hertz Experiment.

Dies kann man wiederum so interpretieren, dass die Energie dann auf die Atome übertragen werden kann, wenn sie gerade der Differenz zwischen zwei atomaren Energiezuständen entspricht.

1.8.11 Das Bohr'sche Atommodell

Aus diesen Tatsachen entwickelte Niels Bohr (1885-1962) im Jahre 1913 ein Atommodell. Er sah sich gezwungen, dafür zusätzlich zu den bekannten physikalischen Gesetzen weitere Annahmen zu machen. Er postulierte insbesondere, dass die Bewegung der Elektronen um den Kern nicht durch die Newton'schen Gleichungen beschrieben wurde, sondern dass die Elektronen sich nur auf stationären Bahnen aufhalten können.

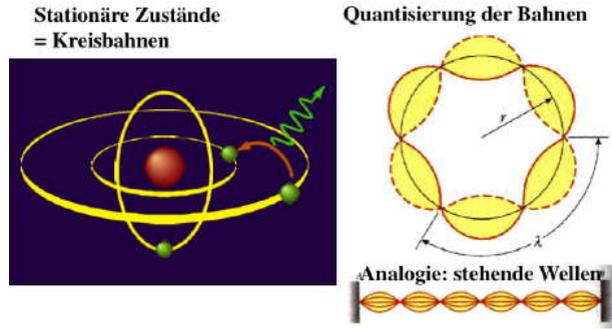


Abbildung 1.53: Bohr's Atommodell.

Wenn sich das Elektron auf einer dieser Bahnen befindet, so soll es keine Energie abstrahlen. In seinem Modell können die Atome Energie in Form von Licht abstrahlen, wenn sie von einer energetisch höheren Bahn auf eine energetisch niedrigere Bahn springen. Die Frequenz des abgestrahlten Lichtes ist dann gegeben durch

$$\nu = \frac{E_1 - E_2}{h}.$$

Die stationären Bahnen sind durch eine Quantisierungsbedingung festgelegt: Der Drehimpuls des Elektrons soll ein Vielfaches der Planck'schen Konstante sein,

$$L = n\hbar, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ein Elektron, das auf einer kreisförmigen Bahn mit Radius r um den Kern mit der Ladung Ze fliegt, erfährt eine Coulomb-Kraft

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}.$$

Dies muss gleich der Zentrifugalkraft sein,

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}. \quad (1.3)$$

Wir drücken die Geschwindigkeit durch den Drehimpuls aus:

$$L = mvr = n\hbar \rightarrow v = \frac{n\hbar}{mr}$$

Damit wird Gleichung (1.3) zu

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = \frac{n^2\hbar^2}{mr^3}.$$

Wir lösen auf nach dem Radius

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{Ze^2 m} = n^2 \frac{r_1}{Z}.$$

Hier stellt

$$r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m}$$

den Radius der innersten möglichen Bahn des Wasserstoffs ($Z = 1$) dar. Der numerische Wert ist

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{(6.6 \cdot 10^{-34} \text{Js})^2 8.85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2}{3.14 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \text{kg} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19} \text{C})^2} \\ &\approx 0.53 \cdot 10^{-10} \text{m} \end{aligned}$$

oder rund $1/2 \text{ \AA}$.

Die Radien der höheren Bahnen $r_n = n^2 r_1$ ergeben sich durch die Folge der Quadratzahlen.

1.8.12 Energien und Spektrum

Die Energien der Zustände berechnen wir als die Summe über potenzielle und kinetische Energie. Die Coulomb-Energie ist

$$E_{pot} = -e \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$$

und die kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} \left(\frac{n\hbar}{mr} \right)^2 = \frac{n^2 \hbar^2}{2mr^2}.$$

Wir setzen in beiden Ausdrücken den Radius

$$r = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Ze^2 m}$$

und erhalten für die Gesamtenergie

$$E_n = - \left(\frac{Z^2 e^4 m}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \right) \frac{1}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Der Grundzustand von Wasserstoff, also der Zustand mit der niedrigsten Energie ist

$$E_1 = - \frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} = -2.17 \cdot 10^{-18} \text{J} = -13.6 \text{eV}.$$

Die höheren Zustände haben die Energien

$$E_n = \frac{-13.6 \text{eV}}{n^2}.$$

Damit können wir die Übergangsfrequenzen des Wasserstoffs berechnen: Die Energien betragen

$$E_{nm} = E_m - E_n = E_1 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Daraus berechnen wir die Wellenlänge der Emissionslinien als

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \frac{Z^2 e^4 m}{8\epsilon_0^2 \hbar^3 c} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \\ &\approx 1.097 \cdot 10^7 \text{m}^{-1} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

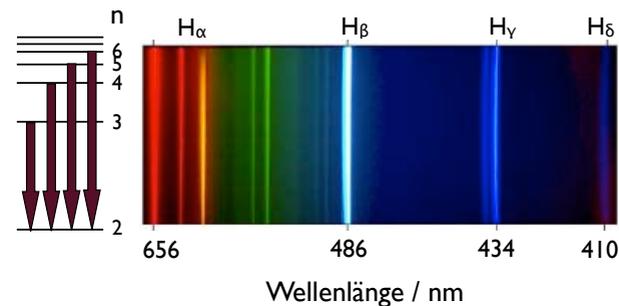


Abbildung 1.54: Die Linien der Balmer-Serie.

Für die Balmer-Serie ist $m = 2$ und die Linien sollten damit die Wellenlängen

$$\frac{1}{\lambda} = 1.097 \cdot 10^7 \text{m}^{-1} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

haben. Die ersten Werte sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

n	3	4	5	6	∞
λ	656	486	434	410	365
Bezeichnung	H_α	H_β	H_γ	H_δ	
Farbe	rot	türkis	blau	violett	UV

Die damit errechneten Frequenzen, resp. Wellenlängen stimmen recht gut mit den experimentellen Werten überein. Ähnlich wie bei den Planetenbahnen konnte das Modell noch etwas verbessert werden, indem man anstelle von kreisförmigen Bahnen elliptische Bahnen annimmt.

E80 : Balmer Serie

Das Bohr'sche Modell sagt somit qualitativ richtig die Absorptions- und Emissionslinien voraus. Es gibt auch eine Antwort auf die Frage nach der Stabilität der Atome: es gibt einen niedrigsten Zustand, Atome in diesem Zustand können keine Energie mehr emittieren.

Das Bohr'sche Atommodell wurde parallel zu den Anfängen der Quantenmechanik entwickelt. Dadurch war seine Lebensdauer nur kurz. Insbesondere die Zuhilfenahme von adhoc-Annahmen stellte natürlich einen Schönheitsfehler dar. Wenige Jahre später wurde mit der Schrödinger-Gleichung, resp. der Quantenmechanik von Schrödinger und Heisenberg die Grundlage für eine Beschreibung des Atoms ohne zusätzliche ad hoc Annahmen geschaffen. Die bessere Beschreibung des Wasserstoffatoms wird deshalb noch im Kapitel 3 erfolgen.

Literatur: F. Hund, Geschichte der physikalischen Begriffe., BI Wissenschaftsverlag, Mannheim.

1.8.13 Quantisierung des Drehimpulses

Das Bohrsche Atommodell basiert auf der Annahme, dass der Drehimpuls des Atoms quantisiert sei. Einen quantisierten Drehimpuls hat man insbesondere auch beim Spin, also beim internen Drehimpuls gefunden. Dies wurde von Gerlach und Stern 1922 in einem berühmten Experiment gezeigt.

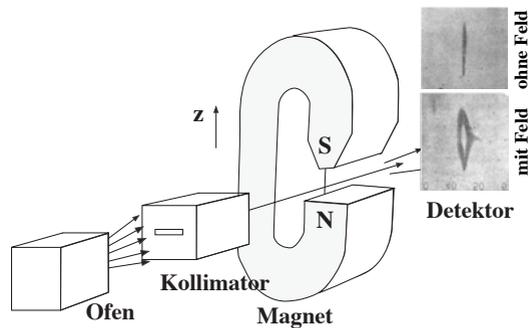


Abbildung 1.55: Das Stern-Gerlach Experiment: Atome mit Spin fliegen durch ein Magnetfeld.

Eine Atomstrahl wird durch ein Magnetfeld geschickt. Zum Einen präzediert ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$ um das in z-Richtung anliegende Magnetfeld.

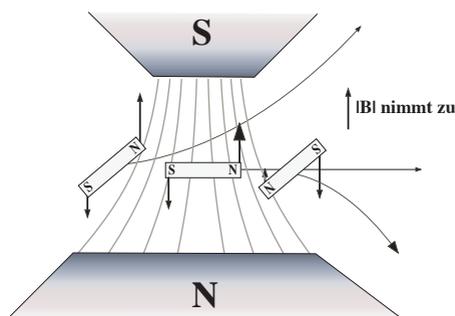


Abbildung 1.56: Kräfte auf einen klassischen Magneten im Magnetfeld.

Zum anderen wirkt eine Kraft auf den Massenschwerpunkt des magnetischen Moments $\vec{\mu}$ in einem inhomogenen Feld $\vec{B}(\vec{r})$, von der Größe $\nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$. Da durch die Präzession μ_z konstant bleibt, erfährt das Teilchen eine Beschleunigung in z-Richtung von

$$\ddot{z} = g\mu_B \frac{\mu_z}{m_A} \frac{\partial B}{\partial z},$$

welche bei konstantem Gradienten zu einer Parabelbahn führt. Die Atome treten also unter dem Winkel

$$\Delta\varphi \approx \frac{z}{\ell} = \frac{1}{2\ell} g\mu_B \frac{\mu_z}{m_A} \frac{\partial B}{\partial z} t^2 = \frac{1}{v_0} g\mu_B \frac{\mu_z}{m_A} \frac{\partial B}{\partial z}$$

aus dem Magneten der Länge ℓ aus, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit v_0 bewegen.

Klassisch erwarten wir eine breite Verteilung über die zufälligen Werte von μ_z . Tatsächlich beobachteten Stern und Gerlach eine Intensitätsverteilung, die sich bei zwei Winkeln $\varphi = \pm\alpha_0$ häuft, was auf diskrete Werte μ_z der Magnetisierung zurückgeführt werden kann. Otto Stern erhielt dafür 1943 den Nobelpreis für Physik.