

# 4 Optik

## 4.1 Einleitung

Das Kapitel befasst sich mit der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen, insbesondere im sichtbaren Bereich des Spektrums, also von sichtbarem Licht.

Neben der allgemeinen Literatur gibt es zum Thema Optik eine Reihe von spezialisierten Lehrbüchern, wie z.B.

Born und Wolf: Principles of Optics

Feynman Lectures Band I, Kap. 26-36

J.Ph. Pérez: Optik

Bergmann, Schäfer: Lehrbuch der Experimentalphysik Band 3: Optik

Pedrotti & Pedrotti: Introduction to optics

Hecht: Optics

### 4.1.1 Frequenzen und Wellenlängen

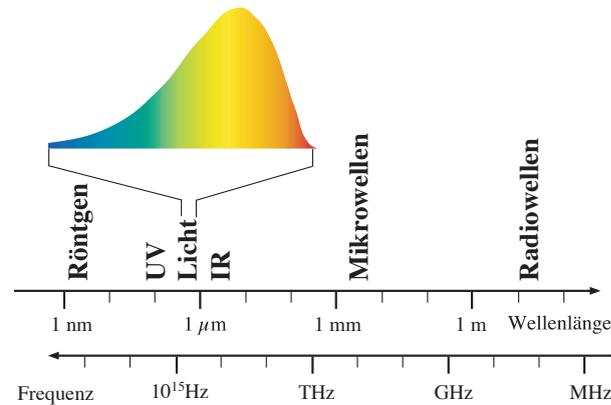


Abbildung 4.1: Spektrum der elektromagnetischen Wellen.

Abb. 4.1 zeigt eine Übersicht über das elektromagnetische Spektrum. Dieses Kapitel ist eine Anwendung und eine Weiterführung der Theorie elektromagnetischer Wellen. Die theoretischen Grundlagen

sind durch Maxwell's Gleichungen gut abgedeckt, wobei man für einige Aspekte die Quantenmechanik berücksichtigen muss (siehe Physik IV im SS). Wir beschränken uns jetzt aber in den meisten Fällen auf den Teil des Spektrums in der Nähe des sichtbaren Bereiches, d.h. neben dem sichtbaren Licht auf das Infrarote und Ultraviolette, und teilweise Röntgenwellen.

Man kann sich natürlich fragen, weshalb gerade dieser Wellenlängenbereich für uns sichtbar ist. Dies hat verschiedene Gründe. Unter anderem ist die Erdatmosphäre in diesem Bereich relativ durchlässig, so dass genügend Licht von der Sonne zur Verfügung steht. Bei größeren Wellenlängen ist einerseits weniger Licht vorhanden, andererseits wird dort auf der Erde durch Wärmestrahlung Strahlung erzeugt. Allerdings kann ein Auge nicht sehr effektiv funktionieren, wenn es die Wärmestrahlung des eigenen Körpers wahrnimmt - man würde auch bei geschlossenen Augen große Helligkeit "sehen".

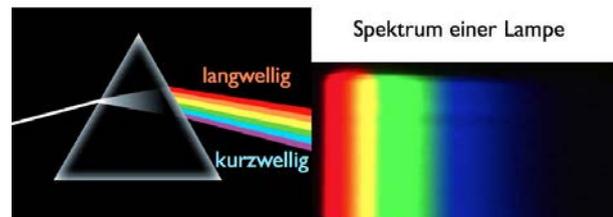


Abbildung 4.2: Zerlegung des weissen Lichts.

Auch im Bereich des sichtbaren Lichts findet man unterschiedliche Wellenlängen. Diese entsprechen unterschiedlichen Farben des Lichts. Sichtbares Licht enthält unterschiedliche Wellenlängen, wobei wir den kurzwelligen Bereich blau sehen, den langwelligen Bereich rot.

## Exp.: Spektrum einer Lampe

Man kann dies im Experiment leicht nachweisen indem man einen Strahl weißen Lichts auf ein Prisma schickt. Rotes und blaues Licht wird darin unterschiedlich gebrochen und kann deshalb dahinter getrennt beobachtet werden.

### 4.1.2 Historisches

Die Natur des Lichtes hat Philosophen und Naturwissenschaftler seit vielen Jahrhunderten beschäftigt und zu engagierten Debatten geführt. Insbesondere wurde heftig darüber debattiert, ob Licht aus Teilchen oder Wellen bestehe. 1672 stellte Newton eine Theorie auf, welche Wellen- und Teilchenaspekte enthielt; die Wellenaspekte traten aber bald in den Hintergrund und seine Theorie wurde im Wesentlichen als Teilchentheorie betrachtet. Dazu gehörte vor allem die geradlinige Ausbreitung; Brechung und Reflexion wurden relativ leicht erklärbar.

1678 stellte Huygens eine Wellentheorie auf, welche Interferenz und Beugung erklären konnte. Newton's Ansehen in der Naturwissenschaft war aber so dominant, dass Huygens kaum beachtet wurde. Experimentelle Hinweise auf solche Effekte hatten zuvor die Experimente von Francesco Grimaldi (1618-1663) ergeben.

1808 untersuchte Malus und 1815 Fresnel die Polarisierungseigenschaften von Licht. Während wir das als einen Beweis der Wellenaspekte ansehen war das damals für die Wellentheorie eher eine Schwierigkeit, da damals nur Longitudinalwellen bekannt waren, welche Polarisierungseigenschaften nicht erklären können.

1865 stellte Maxwell die Theorie des Elektromagnetismus auf. Diese stellt heute die Grundlage für die klassische Theorie des Lichtes dar. Erstaunlich war vor allem, dass die Maxwell'schen Gleichungen, welche auf der Untersuchung von quasi-statischen elektrischen und magnetischen Feldern beruhten, die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen, und damit des Lichtes, mit hoher Präzision vorhersagten.

Es dauerte allerdings noch einige Jahre bis die Experimente von Hertz zeigten, dass Licht ein Beispiel einer elektromagnetischen Welle ist. Damit wurde die Optik ein Teilgebiet der Elektrodynamik.

### 4.1.3 Beschreibung

Prinzipiell können alle Phänomene, die elektromagnetische Strahlung involvieren durch die Quantenelektrodynamik beschrieben werden. Dies ist aber oft zu kompliziert und wird im Rahmen der Grundvorlesungen nicht unterrichtet. Statt dessen kann man unterschiedliche Beschreibungen verwenden, die für einen großen Bereich der interessanten physikalischen Phänomene genügen. Wir verwenden

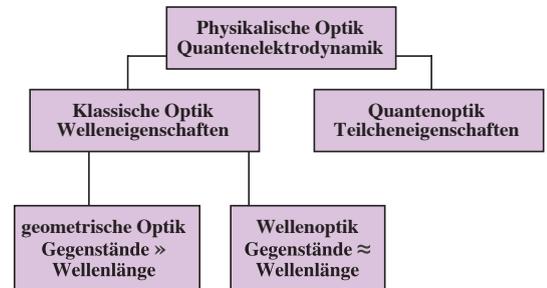


Abbildung 4.3: Die verschiedenen Teilgebiete der Optik.

- geometrische Optik oder Strahlenoptik: Licht kann mit als Strahlen beschrieben werden wenn die interessanten Dimensionen groß sind im Vergleich zur Wellenlänge des Lichts. Diesen Bereich versucht man immer zu treffen wenn man Abbildungen macht, also z.B. in der Fotografie. Sie Bedingung führt aber z.B. dazu, dass man auch bei sehr viel Licht die Blende nicht beliebig klein machen kann.

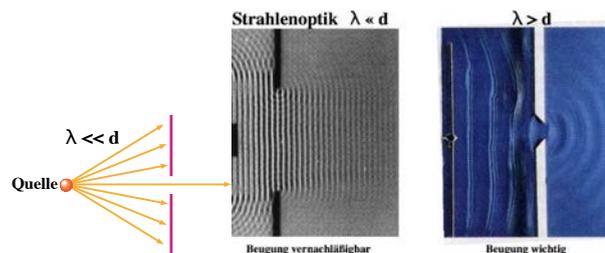


Abbildung 4.4: Strahlenoptik vs. Beugungseffekte.

- ist diese Bedingung nicht mehr erfüllt, so muss man den Wellencharakter des Lichtes berücksichtigen; es treten zusätzliche Effekte wie Beugung und Interferenz auf. Dieser allgemeinere Bereich wird durch die Maxwell Gleichungen abgedeckt.

- Wenn die Wechselwirkung mit materiellen Systemen involviert ist, so müssen diese meist quantenmechanisch beschrieben werden. Allerdings kann man die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes selbst in den meisten Fällen weiterhin klassisch halten. Man nennt dies die semiklassische oder halb-klassische Näherung. Diese Aspekte werden wir im SS diskutieren.

### 4.1.4 Erzeugung

Während elektromagnetische Strahlen geringer Frequenz, wie z.B. Radiowellen, durch schwingende elektronische Schaltkreise erzeugt werden, ist dies bei sichtbarem Licht nicht mehr möglich. Licht kann aber in einem gewissen Sinn noch einfacher erzeugt werden: indem man einen Körper auf sehr hohe Temperaturen heizt. Solche Quellen werden als thermische Quellen bezeichnet. Das beste Beispiel dafür ist die Sonne, aber natürlich auch eine Glühlampe. Solche Quellen verhalten sich in guter Näherung wie ein Schwarzkörperstrahler.

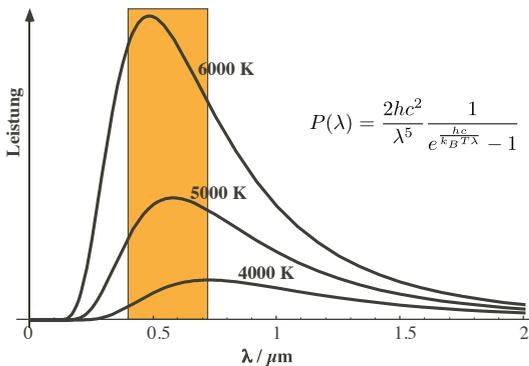


Abbildung 4.5: Spektrum eines schwarzen Strahlers.

Das Spektrum eines schwarzen Strahlers wird durch das Planck'sche Strahlungsgesetz beschrieben:

$$P(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1}$$

Es besagt, dass das Maximum der emittierten Strahlung sich mit höheren Temperaturen zu immer kürzeren Wellenlängen verschiebt. Der Ursprung dieser Verteilung wird im vierten Semester genauer diskutiert werden.

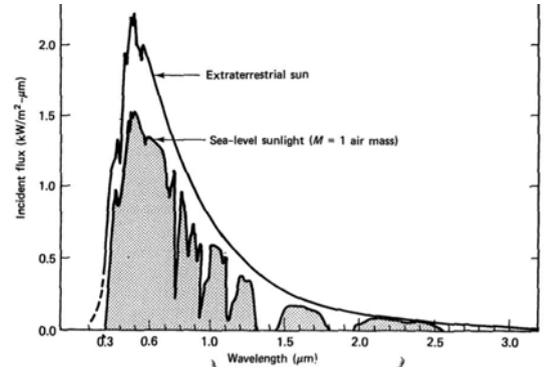


Abbildung 4.6: Spektrum der Sonne.

Der wichtigste Strahler ist bei weitem die Sonne, die eine Oberflächentemperatur von etwa 6000 Grad aufweist. Das Emissionsmaximum liegt somit bei ca. 500 nm und der größte Teil der emittierten Leistung liegt im Bereich des sichtbaren Lichtes. Allerdings gelang nicht alle Strahlung bis auf die Erdoberfläche - ein Teil wird durch die Atmosphäre absorbiert, insbesondere im UV-Bereich.

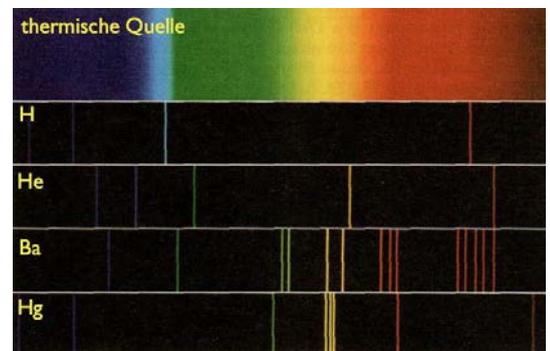


Abbildung 4.7: Linienspektren im Vergleich zu einem kontinuierlichen Spektrum.

Eine weitere Möglichkeit zur Erzeugung von Licht benutzt sogenannte elektronische Übergänge in atomaren Spektren: Hier gehen Elektronen von energetisch höher liegenden Zuständen in tiefere über und senden dabei Licht aus. Im Gegensatz zum kontinuierlichen Spektrum von thermischen Quellen treten

im Licht von solchen Quellen diskrete Wellenlängen auf.

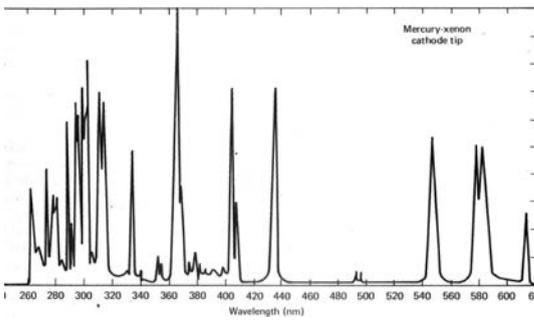


Abbildung 4.8: Spektrum einer Quecksilber - Xenon Lampe.

Ein bekanntest Beispiel sind Natrium-Dampflampen. Diese erzeugen rein gelbes Licht, mit einer Wellenlänge von 589 nm. Den Grund für diesen charakteristischen Unterschied werden Sie in der Quantenmechanik im nächsten Semester noch genauer kennen lernen.

Halbleiter können ebenfalls Licht erzeugen, wenn positive und negative Ladungsträger rekombinieren. Dies wird in Leuchtdioden (LEDs) und Halbleiterlasern verwendet. Diese Art von Lichtquellen besitzen die höchsten Wirkungsgrade von allen Lichtquellen, d.h. pro eingesetzte Energie wird am meisten Licht erzeugt.

Eine weitere Möglichkeit für die Erzeugung von Licht ist der Laser. Dies ist eine Quelle die besonders nützliche Eigenschaften hat. Laserlicht kann auf verschiedene Arten erzeugt werden und hat je nach Erzeugungsart unterschiedliche Eigenschaften. Der wesentliche Unterschied zur thermischen Erzeugung besteht darin, dass die Eigenschaften sehr viel besser definiert werden können. So kann man Laserlicht sehr monochromatisch machen - mit einer Genauigkeit von  $10^{15}$ . Man kann aber auch sehr kurze Pulse erzeugen, bis zu wenigen fsec. In diesem Fall ist ein Wellenzug nur gerade einige wenige Schwingungen lang und seine geometrische Länge wenige  $\mu\text{m}$ .

### 4.1.5 Nachweis

Nachweis von Licht heißt in den meisten Fällen, das Licht in einen elektrischen Strom umzuwan-

deln. Dies gilt sowohl für künstliche Sensoren, wie auch für das Auge. Vielleicht die wichtigste Ausnahme sind thermische Sensoren: hier wird das Licht in Wärme umgewandelt und diese detektiert. Dieses Prinzip benutzt man z.B. wenn man die Sonne auf der Haut spürt. Physikalische Detektoren, die auf diesem Prinzip basieren sind

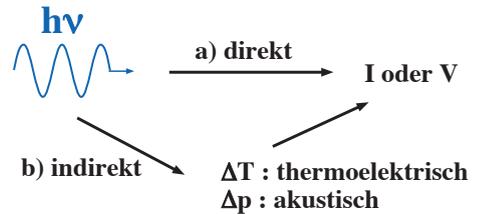
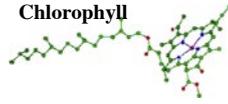


Abbildung 4.9: Thermischer Nachweis von Licht.

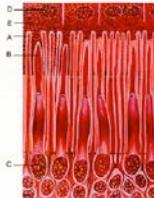
- Thermoelemente
- Bolometer: Widerstandsänderung in einem Metall
- Thermistoren: Widerstandsänderung in einem Halbleiter
- Pyroelektrische Detektoren: Die Temperaturerhöhung ändert eine Oberflächenladung

### Chemisch:

Chlorophyll



ähnlich: Sehzellen im Auge



### Photographische Filme:

$\text{AgI} \rightarrow \text{Ag}$

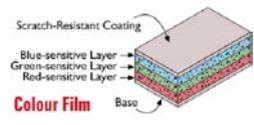


Abbildung 4.10: Chemischer Nachweis von Licht.

- Chemische Sensoren: Hier regt das Licht ein Elektron in einem Molekül in einen höher angeregten Zustand an. Das angeregte Elektron kann anschliessend für chemische Reaktionen verwendet werden. Dieses Prinzip wird insbesondere in der Natur benutzt, z.B. durch die Sinneszellen im menschlichen Auge, aber auch

durch das Chlorophyll in Pflanzen etc. Dazu gehört auch die Photographie.

### 4.1.6 Lichtgeschwindigkeit

Gemäß Maxwell's Gleichungen breiten sich im Vakuum alle elektromagnetischen Felder mit der Geschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Diese Geschwindigkeit ist für viele Anwendungen zu groß um messbar zu sein. So versuchte Galilei 1667 die Lichtgeschwindigkeit zu messen, indem zwei Personen sich gegenseitig mit Hilfe von Laterne Lichtsignalen zusandten. Es gelang ihm jedoch nur, eine untere Grenze von ca. 3000 m/s zu setzen.

Der erste Hinweis darauf, dass sie endlich sei, stammt vom Astronomen Ole Roemer (1644-1710). Er beobachtete die Zeiten, zu denen der Mond Io von Jupiter verdunkelt wird. Die Umlaufbahn von Io um Jupiter hat eine Periode von 42.5 Stunden. Während man erwarten würde, dass die Abstände zwischen den Verdunkelungen sehr regelmäßig sein sollten, findet man experimentell Schwankungen. Die Zeiten verschieben sich auf einer Zeitskala von etwa 13 Monaten.

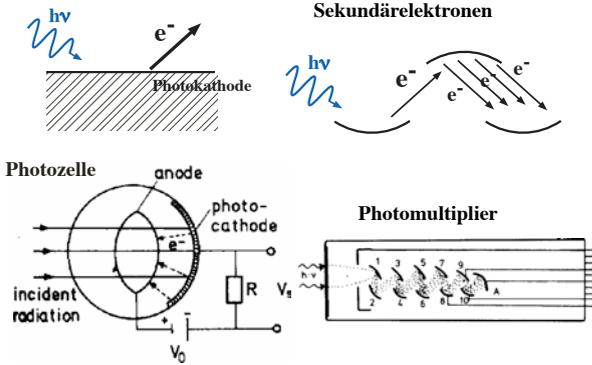


Abbildung 4.11: Nachweis über den Photoeffekt.

- Photoeffekt: Licht, das auf eine Metalloberfläche auftrifft kann aus dieser Elektronen herauslösen. Diese Elektronen werden anschliessend vervielfacht und nachgewiesen.

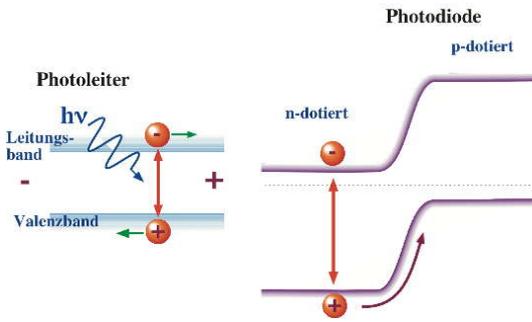


Abbildung 4.12: Halbleiterdetektoren.

- Licht kann auch in Halbleitern Elektronen anregen, welche anschliessend nachgewiesen werden. Das ist genau auch der Prozess, der in einer Solarzelle abläuft. Photodioden und Solarzellen sind also vom physikalischen Standpunkt aus identisch. Ähnliche Prozesse werden auch in sog. CCD-Chips verwendet, die in Videokameras eingesetzt werden. Mehr über solche Prozesse in Halbleitern erfahren Sie in der Vorlesung Festkörperphysik im 5. Semester.

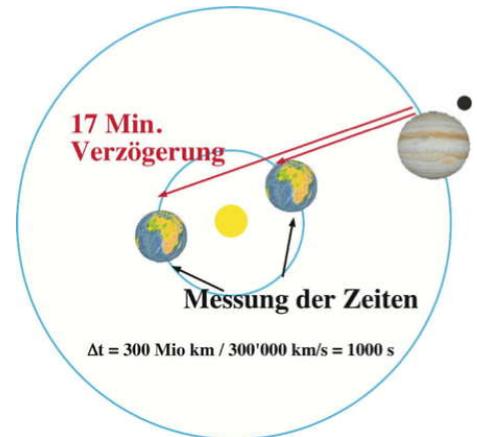


Abbildung 4.13: Die Roemer'sche Messung der Lichtgeschwindigkeit.

Befinden sich Erde und Jupiter auf entgegengesetzten Seiten der Sonne, so sind die Zeiten um etwa 17 Minuten verspätet gegenüber denjenigen, die man aufgrund von Messungen erwarten würde, bei denen Erde und Jupiter auf der gleichen Seite der Sonne

sind. Diese 17 Minuten entsprechen der Zeit, welche das Licht benötigt, um die Strecke von 300 Mio km zurückzulegen, welche dem Durchmesser der Erdbahn entsprechen.

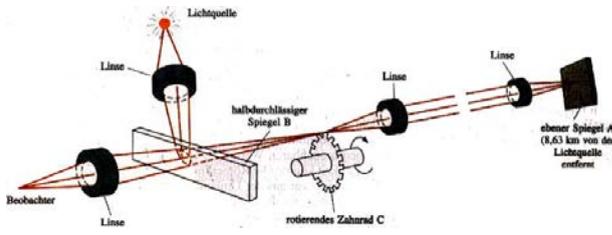


Abbildung 4.14: Messung der Lichtgeschwindigkeit nach Fizeau.

Die erste erfolgreiche terrestrische Messung der Lichtgeschwindigkeit erfolgte 1849 durch Armand Fizeau. Er verwendete ein schnell drehendes Zahnrad, welches einen Lichtstrahl unterbrach, der von einem Spiegel reflektiert wurde. Wenn die Zeit, welche der Lichtstrahl benötigt, bis er wieder beim Rad ist, gerade der Zeit entspricht, in der das Rad sich um einen halben Abstand zwischen zwei Zähnen dreht, erreicht der Strahl den Beobachter nicht mehr. Ähnliche Experimente können mit einem schnell drehenden Spiegel durchgeführt werden.

### 4.1.7 Messung der Lichtgeschwindigkeit nach Fizeau-Michelson

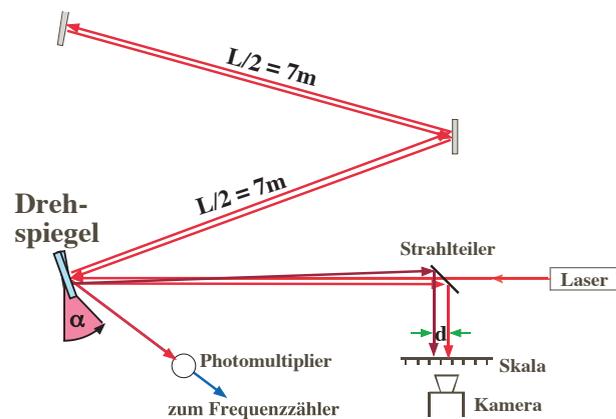


Abbildung 4.15: Messung der Lichtgeschwindigkeit nach Foucault-Michelson.

Eine moderne Variante davon, welche mit geringe-

ren Armlängen auskommt, verwendet anstelle eines Zahnrades einen schnell drehenden Spiegel. Dreht sich der Drehspiegel nicht oder nur langsam, so wird der Laserstrahl in sich selber reflektiert. Bei genügend schneller Drehung genügt die Zeit, welche das Licht vom Drehspiegel bis zum Umlenkspiegel und wieder zurück benötigt, um einen etwas anderen Winkel zu erreichen. Der reflektierte Strahl wird deshalb leicht abgelenkt. Die Zeit, welche der Laserstrahl vom Drehspiegel zum Endspiegel und wieder zurück benötigt, beträgt

$$\Delta t = \frac{2L}{c}$$

Während dieser Zeit bewegt sich der Drehspiegel um den Winkel

$$\alpha = \omega \Delta t = \frac{4\pi v L}{c}$$

wobei  $v$  die Rotationsgeschwindigkeit des Drehspiegels darstellt. Der Laserstrahl wird durch die Reflexion um den doppelten Drehwinkel des Spiegels abgelenkt und auf der Skala um die Distanz

$$d = 2\ell\alpha = \frac{8\pi v \ell L}{c}$$

ausgelenkt, wobei  $\ell$  die Distanz Drehspiegel – Skala darstellt.

Diese Messungen der Lichtgeschwindigkeit ergaben einen Wert, der extrem genau mit dem Wert übereinstimmte, den Maxwell aus der Theorie elektromagnetischer Felder erhielt:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8.854 \cdot 10^{-12} 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 299'792'458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Man konnte bis dahin nur Wellen, welche sich in einem Medium ausbreiten, wie akustische oder seismische Wellen. In diesen Wellen ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit gegeben als

$$v_p = \sqrt{\frac{C}{\rho}}$$

wobei  $C$  eine elastische Konstante und  $\rho$  eine Dichte bezeichnet. Um die gemessene hohe Geschwindigkeit zu erreichen musste somit die elastische Konstante extrem hoch und / oder die Dichte extrem gering sein. Man nannte diesen unbekanntes Stoff den "Äther". Falls ein solches Medium existiert, würde es ein bevorzugtes Bezugssystem definieren. Es wurde lange nach ihm gesucht, aber alle Messungen der Lichtgeschwindigkeit zeigten, dass sie unabhängig von der Richtung ist und dass sie nicht von der Geschwindigkeit abhängt. Deshalb musste die Theorie des Äthers aufgegeben werden.

Später wurde die Lichtgeschwindigkeit ohne bewegliche Teile gemessen, indem man gleichzeitig die Frequenz und die Wellenlänge maß und daraus

$$c = \lambda \nu$$

berechnete. Heute kann man die Lichtgeschwindigkeit nicht mehr messen – sie ist definiert als die Geschwindigkeit  $c = 299'792'458$  m/s. Heute ist auch  $\epsilon_0$  auf diese Weise definiert,

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

#### 4.1.8 Brechungsindex

In Materie ist die Lichtgeschwindigkeit geringer. Wie bereits im Kapitel 3.8.3 diskutiert, ist die allgemeine Beziehung zwischen Frequenz und Wellenlänge in einem Medium

$$\omega = \frac{kc}{n},$$

wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnet. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium ist deshalb reduziert,  $v_M = c/n$ , mit  $n =$  Brechungsindex oder Brechzahl.

Typische Werte für die Brechzahl liegen je nach Material zwischen 1 und 3.

Die Brechzahl ist abhängig von der Wellenlänge. In vielen Materialien steigt die Brechzahl an wenn die Wellenlänge kürzer wird, d.h. mit zunehmender Frequenz. Gemäß der elektromagnetischen Wellengleichung ist der Brechungsindex gegeben als

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}.$$

Substanz	Brechzahl
Festkörper	
Diamant (C)	2.417
Eis (H <sub>2</sub> O)	1.309
Flußspat (CaF <sub>2</sub> )	1.434
Kochsalz (NaCl)	1.544
Quarz (SiO <sub>2</sub> )	1.544
Gläser	
Borat-Flintglas	1.565
Quarzglas	1.458
Silicat-Flintglas	1.612
Silicat-Kronglas	1.503
Flüssigkeiten	
Ethanol	1.36
Schwefelkohlenstoff	1.628
Wasser	1.333

Tabelle 4.1: Brechungsindex einiger Substanzen bei  $\lambda = 589$  nm.

In den meisten Materialien liegt  $\mu_r$  nahe bei 1, so dass der Ausdruck vereinfacht werden kann. Die Dielektrizitätskonstante und der Brechungsindex sind stark von der Frequenz (resp. Wellenlänge) der Strahlung abhängig.

So beträgt die Dielektrizitätskonstante von Wasser für ein statisches Feld ( $\omega = 0$ ) 81, was einem Brechungsindex von  $\approx 9$  entsprechen würde. Für sichtbares Licht liegt der Brechungsindex in der Gegend von 1.33. Der Grund liegt darin, dass die unterschiedlichen Beiträge zur elektrischen Polarisation unterschiedlich schnell sind. Im optischen Bereich können nur noch die elektronischen Beiträge der äußeren Anregung folgen, während dipolare oder ionische Anregungen gemittelt erscheinen.

#### 4.1.9 Absorption und Dispersion

Wenn Licht sich in Materie ausbreitet nimmt die Intensität ab. Dies ist auf Absorption zurückzuführen. In den meisten Fällen ist die Verringerung der Intensität des Lichtes bei der Durchquerung einer dünnen Schicht direkt proportional zur Intensität des einfallenden Lichtes.

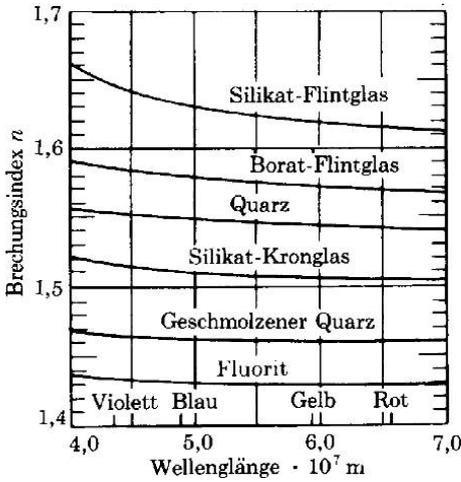


Abbildung 4.16: Brechungsindizes als Funktion der Wellenlänge.

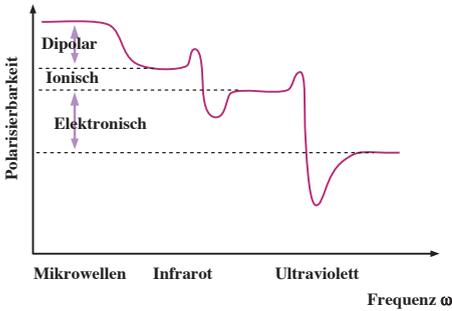


Abbildung 4.17: Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von der Frequenz.

lenden Lichtes,

$$\frac{dI}{dz} = -\alpha I,$$

wobei die Proportionalitätskonstante  $\alpha$  offenbar die Dimension einer inversen Länge aufweist. Die Lösung ist offenbar

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z},$$

d.h. die Intensität fällt exponentiell ab. Die Proportionalitätskonstante  $\alpha$  ist somit das Inverse der Distanz, über welche die Intensität auf  $1/e$  abfällt. Diese Distanz wird als Absorptionslänge bezeichnet.

Absorption und Dispersion sind eng miteinander verknüpft; auf einer mikroskopischen Ebene stellen beide nur unterschiedliche Aspekte des gleichen

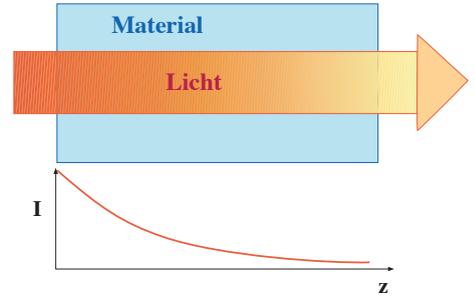


Abbildung 4.18: Abschwächung des Lichtes durch Absorption.

Phänomens dar, nämlich der resonanten Anregung von elektromagnetischen Schwingungen im Material, welche bei wohl definierten Wellenlängen, resp. Frequenzen auftreten.

### Exp III/83a Absorption

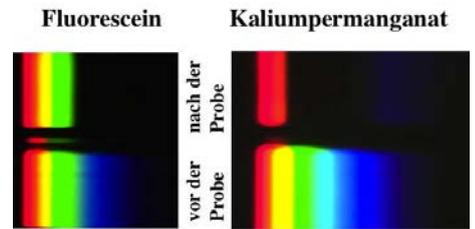


Abbildung 4.19: Änderung des Spektrums durch Absorption.

Die Absorption ist wiederum stark von der Wellenlänge abhängig. In diesem Beispiel ist unten das Spektrum einer Bogenlampe dargestellt, im oberen Teil wurde der kurzwellige Teil des Spektrums (blau, violett) durch Fluorescein absorbiert. Da Blau absorbiert wird, erscheint eine Fluorescein-Lösung gelb. Im Falle von Kaliumpermanganat wird blau, grün und gelb absorbiert, während Rot und Violett transmittiert werden. Eine Probe aus Neophanglas ergibt relativ scharfe Absorptionslinien. Dieses Glas enthält mehrere seltene Erden, welche jeweils sehr scharfe Absorptionsbanden aufweisen. Die Stärke und Wellenlänge der Absorption werden durch die mikroskopische Struktur des Materials bestimmt. Meist sind es Moleküle oder Atome, welche bestimmen, welche Wellenlänge absorbiert wird. Die

Wellenlänge, bei der die Absorption stattfindet, wird durch die Gesetze der Quantenmechanik bestimmt, welche wir im vierten Semester diskutieren.

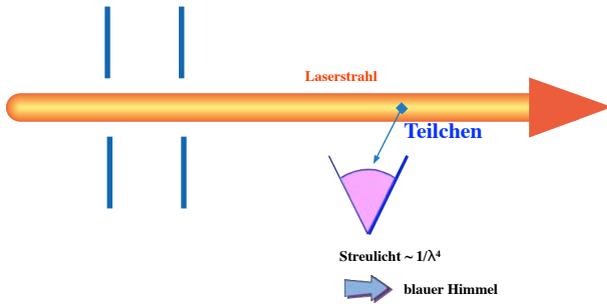


Abbildung 4.20: Streuung aus einem Lichtstrahl.

Licht wird auch gestreut, wenn das Medium inhomogen ist. In diesem Fall ist die Wellenlängenabhängigkeit nicht (nur) durch die molekulare Struktur des Materials bestimmt, sondern (auch) durch die Größe der Partikel, welche die Streuung verursachen. Über einen gewissen Bereich ist die Streuung proportional zu  $\lambda^{-4}$ , d.h. kürzere Wellenlängen werden wesentlich stärker gestreut als lange. Diese Abhängigkeit führt u. A. dazu, dass der Himmel blau ist: Der kurzwellige Anteil des Sonnenlichtes wird durch Partikel in der Erdatmosphäre stärker gestreut und erscheint als diffuses Hintergrundlicht auf der Erde. Der längerwellige rote Teil des Spektrums wird weniger stark gestreut. Der Effekt ist am stärksten wenn die Sonne einen langen Weg durch die Atmosphäre zurückgelegt hat, z.B. am Abend. Deshalb erscheint die Sonne bei Sonnenuntergang rot.

### 4.1.10 Polarisation

Im Kapitel 3.8.3, hatten wir gesehen, dass die Wellengleichung für die elektrische Komponente einer elektromagnetischen Welle geschrieben werden kann als (siehe Gl. (3.73)):

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon_r} \Delta \vec{E}.$$

Eine mögliche Lösung war, für Ausbreitungsrichtung  $\parallel z$

$$\vec{E}(x, y, z) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_z z)}$$

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{A}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_z z)}.$$

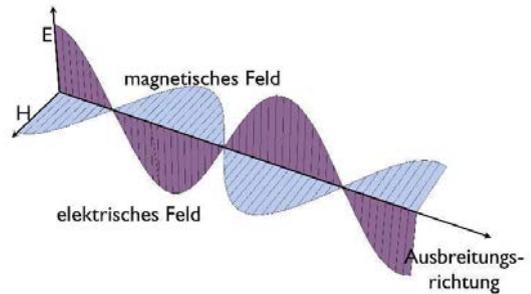


Abbildung 4.21: Elektromagnetische Welle.

Offenbar breitet sich diese Welle entlang der  $z$ -Achse aus, das elektrische Feld ist parallel zur  $x$ -Achse, das magnetische parallel zur  $y$ -Achse. Wie bei anderen transversalen Wellen muss auch hier aufgrund der Symmetrie des Problems eine gleichwertige Lösung existieren, bei der das elektrische Feld parallel zur  $y$ -Achse und das magnetische parallel zur  $-x$ -Achse liegt.

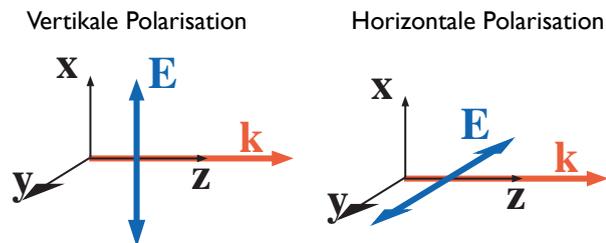


Abbildung 4.22: Vertikal und horizontal polarisierte Wellen.

Diese beiden Lösungen werden als unterschiedlich polarisierte Wellen bezeichnet. Entsprechend der Richtung der elektrischen Feldkomponente spricht man von vertikal oder horizontal polarisiertem Licht.

Im isotropen Raum besitzen diese beiden Wellen den gleichen Wellenvektor und die gleiche Frequenz. Jede Linearkombination davon ist damit ebenfalls eine Lösung mit dem selben Wellenvektor und der selben Frequenz. Wir bezeichnen die beiden Polarisierungen als  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , und deren Superposition als

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (\vec{e}_1 E_1 + \vec{e}_2 E_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

Dabei sind  $E_1$  und  $E_2$  komplexe Zahlen: der Imaginärteil bezeichnet den Phasenunterschied zwischen den beiden Wellen.

### 4.1.11 Polarisationszustände

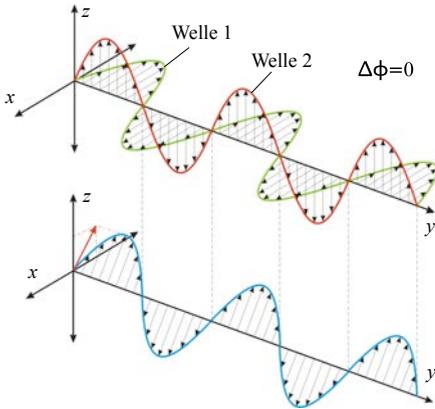


Abbildung 4.23: Linear polarisierte Welle. Oben sind die beiden Basiszustände dargestellt, unten die resultierende Welle.

Als ein Beispiel wählen wir die Polarisationszustände  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  entlang der  $x$ - und  $y$ -Achse. Für  $E_1 = 1, E_2 = 1$  sind die beiden Wellen in Phase und ihre Überlagerung ist eine linear polarisierte Welle, deren elektrische Feldkomponente entlang der Winkelhalbierenden gerichtet ist. Allgemein erhält man linear polarisiertes Licht, wenn  $E_1$  und  $E_2$  die selbe Phase aufweisen, also z.B. beide reell oder beide rein imaginär sind. Das Verhältnis der Amplituden bestimmt die Richtung der Polarisationssebene.

Als zweites Beispiel wählen wir  $E_1 = 1, E_2 = \pm i$ . Damit erhalten wir für die physikalische Lösung, al-

so den Realteil

$$\vec{E} = A \begin{pmatrix} \cos(\omega t - k_z z) \\ \sin(\omega t - k_z z) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

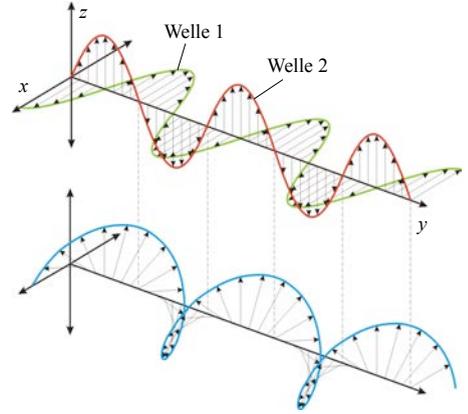


Abbildung 4.24: Zirkular polarisierte Welle.

Der elektrische Feldvektor an einer bestimmten Stelle rotiert somit um die  $z$ -Achse; als Funktion des Ortes erhält man eine schraubenförmige Ausbreitung von  $E$ - und  $H$ -Feld. Diese Lösungen werden als zirkulare Polarisierungen bezeichnet, wobei die beiden Vorzeichen einer links-, resp. rechts zirkularen Polarisierung entsprechen.

Ein interessanter Unterschied zwischen linearer und zirkularer Polarisierung ist die Abhängigkeit der Energiedichte von Ort und Zeit: Im Falle der linearen Polarisierung ist sie

$$I \propto E^2 \propto \cos^2(\omega t - k_z z),$$

d.h. sie oszilliert mit der doppelten Feldfrequenz zwischen null und einem Maximalwert. Im Fall der zirkularen Polarisierung ist der Betrag des  $E$ -Feldes (und des  $H$ -Feldes) konstant, lediglich seine Orientierung ändert sich. Damit ist auch die Energiedichte konstant.

### 4.1.12 Zirkulare Basis

Man kann Polarisationszustände aber nicht nur in einer kartesischen Basis beschreiben. Die Basisvektoren  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  können ebenso zirkulare Polarisations-

zustände beschreiben. In einer zirkularen Basis können die linearen Polarisationszustände dann wiederum als Superposition geschrieben werden. Wählen wir

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} E_x = 1 \\ E_y = i \\ 0 \end{pmatrix}$$

für rechts zirkular polarisiertes Licht und

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} E_x = 1 \\ E_y = -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

für links zirkular polarisiertes Licht. In dieser Basis ist linear polarisiertes Licht z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \vec{e}_1 - i\vec{e}_2 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1-i \\ i-1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1-i) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h. linear polarisiertes Licht, deren Polarisations-ebene bei 45 Grad liegt. Allgemein liefert jede Überlagerung mit gleichem Absolutbetrag linear polarisiertes Licht.

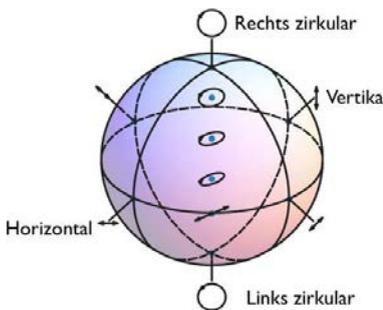


Abbildung 4.25: Polarisationszustände auf der Poincaré Kugel.

Die Polarisationszustände können mit Hilfe der Poincaré-Kugel dargestellt werden. Die Pole bezeichnen zirkuläre Polarisationszustände, der Äquator lineare Polarisation und die Zustände dazwischen

elliptische Polarisationszustände. Die meisten möglichen Polarisierungen sind somit elliptisch. Polarisationszustände, die sich auf der Poincaré Kugel gegenüber liegen sind zueinander orthogonal und bilden deshalb eine mögliche Basis.

### 4.1.13 Polarisatoren

Solche unterschiedlichen Polarisierungen spielen vor allem in der Optik eine wesentliche Rolle, und es existieren viele optische Elemente, die dafür konstruiert wurden, um unterschiedliche Polarisationszustände zu erzeugen, resp. ineinander umzuwandeln.

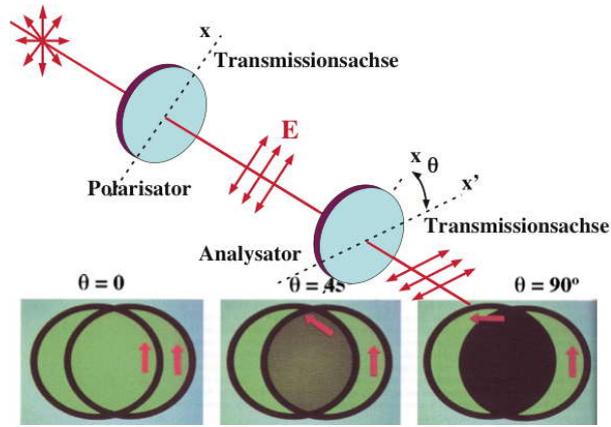


Abbildung 4.26: Polarisatoren absorbieren Licht, welches senkrecht zu ihrer Vordzugsrichtung polarisiert ist.

Am bekanntesten ist sicher der Polarisator, welcher auch in Sonnenbrillen Verwendung findet. Er erzeugt linear polarisiertes Licht, indem die Anteile des Lichtes, welche die orthogonale Polarisation aufweisen, abgelenkt oder absorbiert werden.

### Exp.: Polarisatoren

Geht Licht der Polarisation  $(E_1, E_2)$  durch einen Polarisator, der entlang  $\vec{e}_1$  ausgerichtet ist, so wird diese Komponente transmittiert, die zweite absorbiert. Das transmittierte Licht hat somit die Polarisation  $(E_1, 0)$ . Schickt man dieses Licht durch einen zweiten Polarisator, der gegenüber dem ersten um  $\alpha$  gedreht ist,

so ist die transmittierte Amplitude die Projektion auf die Richtung des zweiten Polarisators, also

$$E_1 \cos \alpha \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Die transmittierte Intensität ist proportional zum Quadrat der Amplitude,

$$I \propto \cos^2 \alpha.$$

Sie verschwindet somit, wenn die beiden Polarisatoren senkrecht zueinander stehen, erreicht 1/2 bei 45 Grad und die Transmission ist vollständig wenn die beiden parallel orientiert sind. Bei unpolarisiertem Licht oder zirkular polarisiertem Licht verschwindet die Abhängigkeit der Transmission von der Orientierung des Polarisators - sie ist dann immer 1/2.

Solche optischen Elemente sind z.B. in der Fotografie oder in Sonnenbrillen nützlich, weil das Licht in der Natur polarisiert ist. So ist Licht, welches auf einer Wasseroberfläche reflektiert ist, horizontal polarisiert. Auch das blaue Licht des Himmels, welches durch Streuung von Sonnenlicht entsteht, ist polarisiert, wobei die Polarisationsrichtung von der Richtung bezüglich der Sonne abhängt. Dies kann man einfach überprüfen, wenn man durch einen Polarisator, also z.B. eine polarisierende Sonnenbrille, den Himmel betrachtet: Die Helligkeit ist richtungsabhängig, auch wenn der Himmel ohne Sonnenbrille keine Helligkeitsunterschiede zeigt.

Neben Polarisatoren, welche Licht absorbieren, gibt es auch die Möglichkeit, Licht unter einem bestimmten Winkel zu reflektieren, dem Brewster Winkel. An diesem Winkel verschwindet der Reflexionskoeffizient für parallele Polarisation (siehe Abschnitt 4.2.13). Dies ist auch der Grund dafür, dass Licht, das von einer Wasseroberfläche reflektiert wurde, teilweise polarisiert ist.

#### 4.1.14 Doppelbrechung

Polarisiertes Licht kann mit Hilfe geeigneter optischer Elemente in einen anderen Polarisationszustand überführt werden. Die wichtigsten derartigen Bauteile sind sogenannte Verzögerungsplatten. Dabei handelt es sich um sogenannte doppelbrechende Materialien (meistens Kristalle), bei denen der

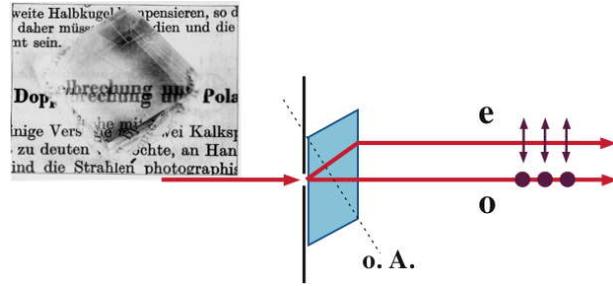


Abbildung 4.27: Doppelbrechung.

Brechungsindex von der Polarisation des Lichtes abhängt. Dadurch erscheint der Kristall für unterschiedliche Polarisationen unterschiedlich dick: die optische Länge

$$L = \ell n$$

(proportional zur Anzahl der Wellenlängen) ist gegeben durch das Produkt aus der geometrischen Länge  $\ell$  und dem Brechungsindex  $n$ . Bei doppelbrechenden Materialien sind die Brechungsindizes für unterschiedlich polarisiertes Licht unterschiedlich.

Wählt man die Dicke eines Kristalls z.B. so, dass orthogonale Polarisationen einen Weglängenunterschied von  $\lambda/4$  "sehen", so ist die eine Polarisation gegenüber der anderen um  $\pi/2$  verzögert. Schicken wir linear polarisiertes Licht, dessen Polarisations Ebene gegenüber den Hauptachsen des Kristalls um 45 Grad gedreht ist, das also in der Hauptachsenbasis des Kristalls als

$$\vec{E}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

geschrieben wird, so wird es hinter dem Kristall zu

$$\vec{E}(L) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

also zu zirkular polarisiertem Licht.

Doppelbrechung kann auch in Materialien induziert werden, welche normalerweise nicht doppelbrechend sind. Dies geschieht z.B. durch extern angelegte elektrische Felder oder durch mechanische Deformation. In diesem Fall spricht man von spannungsinduzierter Doppelbrechung. Diese kann man

Material	$n_o$	$n_e$
Kalkspat	1.6584	1.4864
Turmalin	1.6425	1.6220
Quarz	1.5442	1.5533
Rutil	2.6158	2.9029

Tabelle 4.2: Brechungsindizes einiger doppelbrechender Materialien.

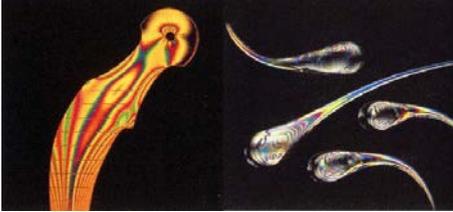


Abbildung 4.28: Spannungsinduzierte Doppelbrechung.

verwenden, um z.B. Spannungen in unterschiedlichen Materialien zu messen.

Der gleiche Effekt wird auch in LCDs verwendet: in diesem Fall kann die Doppelbrechung durch extern angelegte elektrische Felder gesteuert werden und damit die Transmission des Lichtes.

## 4.2 Reflexion und Brechung

### 4.2.1 Reflexion in einer Dimension

Bereits bei eindimensionalen Wellen hatten wir gesehen, dass eine Welle, die auf eine Grenzfläche auftrifft teilweise reflektiert wird. Ihr Wellenvektor wird dabei invertiert,

$$k^{(r)} = -k^{(i)}.$$

Grenzflächen sind hierbei Punkte, an denen sich der Wellenwiderstand ändert, also z.B. wo sich die Dicke einer Saite ändert.

Dabei hatten wir die folgenden Formeln für Reflexion und Transmission hergeleitet:

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A, \quad C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A, \quad (4.1)$$

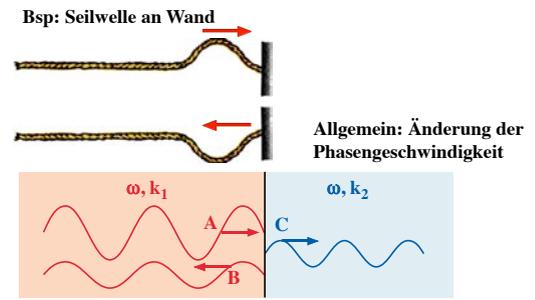


Abbildung 4.29: Reflexion in 1D.

wobei  $A$  die Amplitude der einlaufenden Welle,  $B$  diejenige der reflektierten, und  $C$  die Amplitude der transmittierten Welle bezeichnen.

Diesen eindimensionalen Fall können wir direkt auf optische Wellen übertragen, sofern die Welle senkrecht auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex auftrifft. An der Grenzfläche ändert der Wellenvektor von

$$k_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \rightarrow k_2 = n_2 \frac{\omega}{c}.$$

### 4.2.2 3D: Reflexion

In drei (oder auch in zwei Dimensionen) tritt ebenso Reflexion auf. Wir beschränken uns hier ausschließlich auf ebene Wellen und ebene Grenzflächen.

#### Exp.: Reflexion

Wenn wir eine ebene Welle betrachten, die senkrecht auf eine Grenzfläche einfällt, so ist das Problem exakt analog zum eindimensionalen Fall. Trifft die Welle unter einem Winkel auf die Grenzfläche auf, so ist nicht mehr von vornherein klar, unter welchem Winkel sie reflektiert wird.

Zunächst unterscheidet man diffuse und spekuläre Reflexion. Diffuse Reflexion ist eigentlich das allgemeinere Phänomen. Es ist z.B. dafür verantwortlich, dass Sie die Schrift an der Tafel lesen können.

Wir können es zum mindesten qualitativ darauf zurückführen, dass Licht auf eine rauhe Oberfläche auftrifft und in unterschiedliche Richtungen reflektiert wird. Offensichtlich ist dieses Phänomen sehr

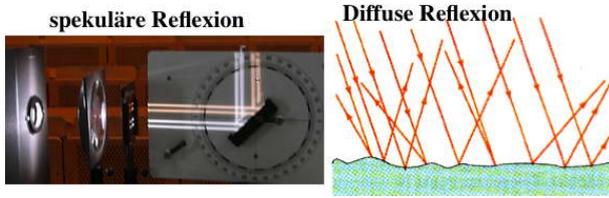


Abbildung 4.30: Spekuläre Reflexion (links) vs. diffuse Reflexion (rechts).

stark von der Beschaffenheit der Oberfläche abhängig. Da wir hier an einfach zu behandelnden Modellsystemen interessiert sind behandeln wir ausschließlich den Fall der spekulären Reflexion, also der Reflexion an einer idealen glatten Oberfläche, die entlang der gesamten Fläche identische Eigenschaften aufweist.

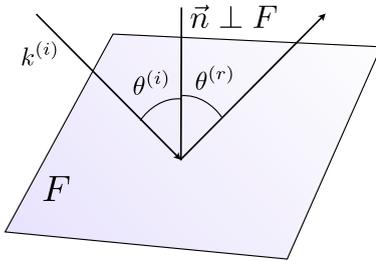


Abbildung 4.31: Reflexion eines Strahls.

In diesem Fall wird die einlaufende Welle gespiegelt, d.h. die rücklaufende Welle weist den gleichen Winkel zur Flächennormalen auf wie die einlaufende Welle:

$$\theta^{(i)} = \theta^{(r)}.$$

Um diesen Effekt zu verstehen, betrachten wir den Wellenvektor des einfallenden Strahles:

$$\vec{k}^{(i)} = k^{(i)} \begin{pmatrix} \sin \theta^{(i)} \\ 0 \\ -\cos \theta^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}.$$

Hier stellt  $k_z$  die Komponente senkrecht zur Oberfläche dar und  $k_x$  parallel dazu. Bei der Reflexion wird die senkrechte Komponente invertiert, identisch zum 1D-Fall, während die parallele Komponente für die einfallende und die reflektierte Welle auf Grund der

Randbedingungen identisch sein muss. Somit ist der Wellenvektor der reflektierten Welle gegeben durch

$$k^{(r)} = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ -k_z \end{pmatrix} = k^{(i)} \begin{pmatrix} \sin \theta^{(i)} \\ 0 \\ \cos \theta^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Dies impliziert natürlich die obige Beziehung für die Winkel.

Diese Beziehung kann man übrigens auch unter dem Gesichtspunkt der Impulserhaltung betrachten: Wie wir im Kapitel 2.3 gesehen hatten, impliziert die Translationssymmetrie Impulserhaltung. Im Kapitel 3.11.6 über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen hatten wir außerdem gefunden, dass zu jeder Welle eine Impulsdichte in Richtung des Wellenvektors gehört. Im vorliegenden Problem ist der Raum in  $x$ - und  $y$ -Richtung homogen, und die entsprechenden Komponenten des Impulses stellen deshalb Erhaltungsgrößen dar. In  $z$ -Richtung ist hingegen die Translationssymmetrie gebrochen. Die Reflexion führt nun dazu, dass die  $z$ -Komponente des Impulses für die reflektierte Welle invertiert wird - der Betrag bleibt konstant.

### 4.2.3 3D: Brechung

An einer Grenzfläche zwischen zwei transparenten Medien wird immer auch ein Teil der Welle transmittiert. Um diese transmittierte Welle zu berechnen, benötigen wir ihre Amplitude und ihren Wellenvektor.

#### Exp: Brechung

Man stellt fest, dass die transmittierte Welle eine andere Ausbreitungsrichtung hat als die einfallende Welle. Man bezeichnet diesen Effekt als Brechung.

Wir betrachten eine Welle, die in einem Winkel  $\theta_1$  von der Senkrechten auf eine Grenzfläche einfällt. Die Brechungsindizes seien  $n_1$  und  $n_2$ . Die Wellenlänge, also der Abstand zwischen den Phasenflächen, ist somit gegeben durch

$$\frac{2\pi}{k_1} \quad \text{resp.} \quad \frac{2\pi}{k_2}.$$

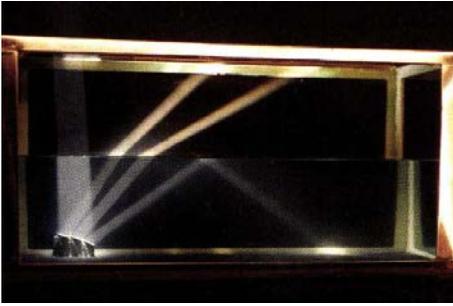


Abbildung 4.32: Brechung eines Strahls an der Wasseroberfläche.

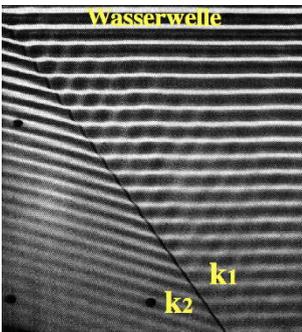


Abbildung 4.33: Stetigkeit des Wellenvektors an der Grenzfläche, am Beispiel einer Wasserwelle.

Aufgrund der Stetigkeitsbedingungen müssen die Phasenflächen an der Grenzfläche stetig sein.

Somit ist die Projektion des Abstandes zwischen den Phasenflächen, d.h.  $2\pi/k_i$  auf die Grenzfläche identisch,

$$\frac{2\pi}{k_1 \sin \theta_1} = \frac{2\pi}{k_2 \sin \theta_2}$$

Die Wellenvektoren sind in den beiden Medien i.a. nicht identisch, aber die Frequenzen. Diese sind mit den Beträgen der Wellenvektoren verknüpft über die Lichtgeschwindigkeit

$$k_{1,2} = \omega \frac{n_{1,2}}{c}$$

Damit gilt

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

oder

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

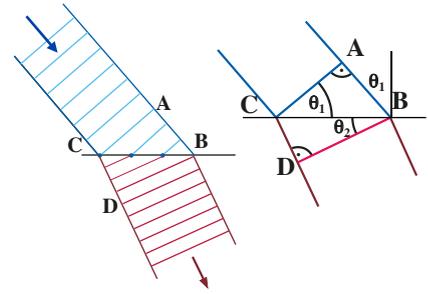


Abbildung 4.34: Brechung einer Welle.

Dies wird auch als das Brechungsgesetz von Snellius bezeichnet. Qualitativ kann man das Resultat so zusammenfassen, dass beim Übergang vom optisch dünneren zum optisch dichteren Medium der Strahl in Richtung auf die Senkrechte gebrochen wird, beim Übergang vom optisch dichteren zum optisch dünneren Medium weg von der Senkrechten.

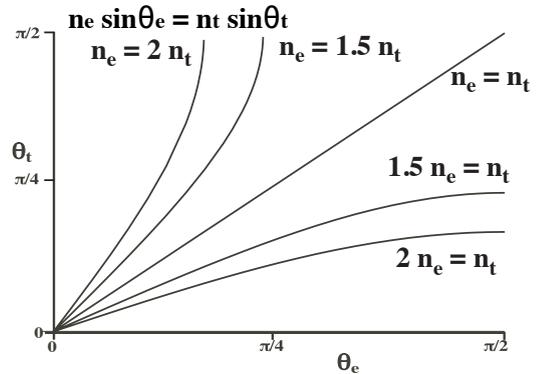


Abbildung 4.35: Einfallswinkel vs. Ausfallwinkel.

Wenn wir den Winkel des transmittierten Strahls als Funktion des einfallenden Strahls auftragen, so erhalten wir z.B. für den Übergang von Luft auf Glas ( $n_1 = 1, n_2 \approx 1.5$ ) eine Kurve, die einer Sinuskurve ähnelt. Der maximale Winkel der transmittierten Kurve beträgt allerdings beim Einfallswinkel  $\theta_i = \pi/2$

$$\theta_{max} = \sin^{-1} \frac{1}{1.5} \approx 42^\circ$$

Für den umgekehrten Fall, der Brechung beim Übergang von Glas nach Luft, sehen wir, dass der Wertebereich nur bis zu diesen 42 Grad läuft, wo der Winkel des gebrochenen Strahls auf  $\pi/2$  ansteigt.

#### 4.2.4 Alternative Herleitung des Brechungsgesetzes

Eine alternative Herleitung geht wiederum von den Wellenvektoren aus. Für alle Wellen muss gelten

$$|k|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2}.$$

Aufgrund der Stetigkeitsbedingungen müssen die  $x$ - und  $y$ -Komponente der Wellenvektoren aller Wellen identisch sein.

$$k_x^{(i)} = k_x^{(r)} = k_x^{(t)} \quad k_y^{(i)} = k_y^{(r)} = k_y^{(t)} = 0.$$

Damit erhalten wir für die  $z$ -Komponente im Medium 2 folgende Gleichung

$$\left(k_z^{(t)}\right)^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} - k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i).$$

Das Brechungsgesetz von Snellius erhalten wir, indem wir wiederum die  $z$ -Komponente durch den Winkel ausdrücken:

$$\left(k_z^{(t)}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 \cos^2 \theta_t = \frac{\omega^2}{c^2} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)$$

oder

$$n_2^2 (1 - \cos^2 \theta_t) = n_2^2 \sin^2 \theta_t = n_1^2 \sin^2 \theta_i.$$

Damit haben wir die Richtungen aller drei beteiligten Wellen zueinander in Beziehung gebracht. Im folgenden werden wir die Beziehungen für die Amplituden suchen.

#### 4.2.5 Kontinuitätsbedingungen

Wie in der Physik II gezeigt wurde, gelten für elektromagnetische Felder an einer Grenzfläche verschiedene Stetigkeitsbedingungen, welche direkt aus den Maxwell Gleichungen ableitbar sind. Ausgangspunkt sind die Maxwell Gleichungen für ein Medium ohne freie Ladungen.

Wir betrachten zunächst die dritte Gleichung: Die Rotation von  $\vec{E}$  ist gleich der zeitlichen Ableitung von  $\vec{B}$ .

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}.$$

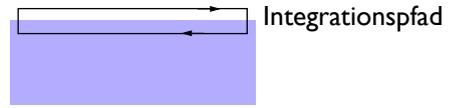


Abbildung 4.36: Rechteckiger Integrationsbereich für  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ .

Wir integrieren die Gleichung über die gezeigte Fläche.

$$\int_F d\vec{n} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = - \int_F d\vec{n} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}.$$

Gemäß dem Satz von Stokes kann das Flächenintegral der Rotation als Schleifenintegral über den Rand des Integrationsbereiches geschrieben werden.

$$\int_{\Gamma} d\vec{s} \vec{E} = - \int_F d\vec{n} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}.$$

Wenn wir die Fläche genügend schmal machen, können wir das Schleifenintegral als

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = d(E_x^{(2)} - E_x^{(1)})$$

schreiben, also direkt proportional zur Änderung der parallelen Komponente des  $E$ -Feldes. Da die Fläche dabei aber beliebig klein wird, verschwindet das Integral des Magnetfeldes, so dass auch die Differenz der  $E$ -Felder verschwinden muss. Damit folgt, dass die Komponenten des  $E$ -Feldes parallel zur Grenzfläche stetig sein müssen,

$$E_{||} \text{ stetig.}$$

Das gleiche folgt aus der vierten Maxwell Gleichung für die parallelen Komponenten des  $H$ -Feldes:

$$H_{||} \text{ stetig.}$$

Aus der ersten und zweiten Maxwell Gleichung erhalten wir Stetigkeitsbedingungen für die  $D$ - und  $B$ -Felder.

Dafür integrieren wir wiederum über einen Bereich an der Grenzfläche. Wir wählen als Integrationsbereich diesmal einen Zylinder, der sich an die Grenzfläche anschmiegt. Das Volumenintegral der Divergenz können wir mit Hilfe des Satzes von Gauß

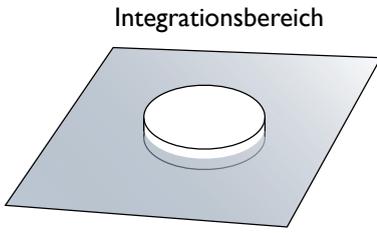


Abbildung 4.37: Integrationsbereich Zylinder an der Grenzfläche.

umformen in ein Oberflächenintegral des Feldes. Wenn die Seitenwände genügend klein werden, ist das Oberflächenintegral gerade proportional zur  $z$ -Komponente und zur Kreisfläche des Zylinders:

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{n} = \pi r^2 (D_z^{(2)} - D_z^{(1)}).$$

Wir setzen voraus dass auf der Oberfläche keine Ladungen existieren. Dann folgt offenbar, dass die senkrechte Komponente des  $D$ -Feldes stetig sein muss. Analog können wir die Stetigkeitsbedingung für  $B_z$  herleiten:

$$D_{\perp} \text{ stetig} \quad B_{\perp} \text{ stetig.}$$

### 4.2.6 Bezeichnungen für die Polarisation

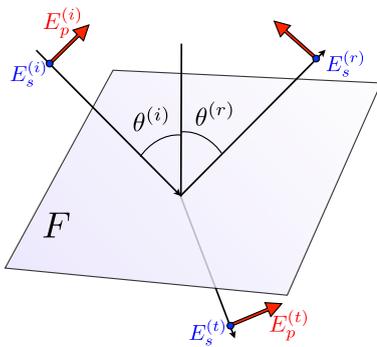


Abbildung 4.38: Parallel und senkrecht polarisierte Felder.

Die Gleichungen für die Amplituden des reflektierten, resp. transmittierten Strahls erhält man direkt aus den Stetigkeitsbedingungen. Da elektromagnetische Wellen Transversalwellen sind, müssen wir die Polarisation berücksichtigen. Wie in Kapitel 4.1.10

diskutiert, hat man allgemein 2 orthogonale Polarisationszustände. Bei der Diskussion von Reflexionsprozessen lohnt es sich, die Symmetrie des Problems zu berücksichtigen, indem man die Basiszustände für die Polarisation sinnvoll wählt. Dabei bieten sich die beiden linearen Polarisierungen parallel und senkrecht zur Ebene an, die den einfallenden Strahl enthält und senkrecht auf die Grenzfläche steht. Diese beiden werden als  $p$  und  $s$  bezeichnet, wobei  $p$  für parallel und  $s$  für senkrecht stehen. Außerdem sind auch die Bezeichnungen TE Welle für  $s$ -Polarisation und TM Welle für  $p$  Polarisation gebräuchlich.

Sind beide Medien isotrop, so wird bei der Reflexion  $p$ -Licht in  $p$ -Licht umgewandelt und  $s$ -Licht in  $s$ -Licht.

Bisher haben wir die Richtung und Wellenvektor der reflektierten und transmittierten Welle diskutiert. Wir wissen auch, dass ihre Frequenz die gleiche ist wie bei der einlaufenden Welle. Was noch fehlt ist die Amplitude. Diese leiten wir jetzt aus den Kontinuitätsgleichungen her. Aufgrund der Symmetrie ist es einfacher, diese für die beiden orthogonalen Polarisierungen getrennt herzuleiten.

### 4.2.7 Reflexion von p-Licht

Prinzipiell reicht es jeweils, wenn man für die beteiligten Wellen die  $E$ ,  $D$ ,  $H$  oder  $B$  Komponente kennt, da die andern jeweils daraus leicht bestimmt werden können. Traditionell rechnet man meist mit der  $E$ -Komponente.

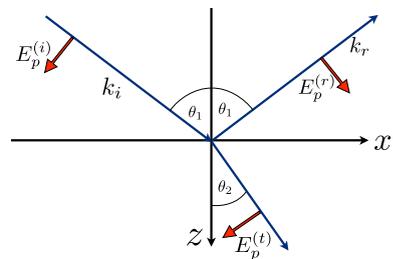


Abbildung 4.39: Reflexion von p-polarisiertem Licht.

Wir betrachten also zunächst eine p-polarisierte Welle. Mit dem gewählten Koordinatensystem besitzt das p-polarisierte Licht eine  $x$ - und eine  $z$ -

Komponente. Die  $x$ -Komponente liegt parallel, die  $z$ -Komponente senkrecht zur Grenzfläche. Die Aufteilung hängt vom Einfallswinkel ab und beträgt

$$\begin{aligned} E_x^{(i)} &= -E_p^{(i)} \cos \theta_i & E_z^{(i)} &= E_p^{(i)} \sin \theta_i \\ E_x^{(r)} &= E_p^{(r)} \cos \theta_i & E_z^{(r)} &= E_p^{(r)} \sin \theta_i \\ E_x^{(t)} &= -E_p^{(t)} \cos \theta_t & E_z^{(t)} &= E_p^{(t)} \sin \theta_t \end{aligned}$$

Wie vorher gezeigt, müssen die Komponenten des  $E$ -Feldes parallel und die Komponenten des  $D$ -Feldes senkrecht zur Grenzfläche stetig sein. Wir können deshalb zwei Kontinuitätsbedingungen schreiben. Für die parallelen Komponenten

$$E_x^{(i)} + E_x^{(r)} = E_x^{(t)}$$

und für die senkrechten Komponenten:

$$\begin{aligned} D_z^{(i)} + D_z^{(r)} &= D_z^{(t)} \\ = \epsilon_1 (E_z^{(i)} + E_z^{(r)}) &= \epsilon_2 E_z^{(t)} \\ = n_1^2 (E_z^{(i)} + E_z^{(r)}) &= n_2^2 E_z^{(t)}. \end{aligned}$$

Wir eliminieren  $E_x$  und  $E_z$  und erhalten

$$\begin{aligned} \cos \theta_i (E_p^{(i)} - E_p^{(r)}) &= E_p^{(t)} \cos \theta_t \\ n_1^2 (E_p^{(i)} \sin \theta_i + E_p^{(r)} \sin \theta_i) &= n_2^2 E_p^{(t)} \sin \theta_t. \end{aligned}$$

Wir eliminieren in der zweiten Gleichung  $\theta_t$  mit dem Gesetz von Snellius

$$n_1^2 \sin \theta_i (E_p^{(i)} + E_p^{(r)}) = n_1 n_2 E_p^{(t)} \sin \theta_i$$

und vereinfachen zu

$$n_1 (E_p^{(i)} + E_p^{(r)}) = n_2 E_p^{(t)}.$$

Wir können z.B.  $E_p^{(t)}$  eliminieren und erhalten

$$\begin{aligned} \cos \theta_i n_1 (E_p^{(i)} + E_p^{(r)}) &= n_2 \cos \theta_i (E_p^{(i)} - E_p^{(r)}) \\ E_p^{(r)} (\cos \theta_i n_1 + n_2 \cos \theta_i) &= E_p^{(i)} (\cos \theta_i n_2 - \cos \theta_i n_1). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für das Verhältnis

$$r_p = \frac{E_p^{(r)}}{E_p^{(i)}} = \frac{\cos \theta_i n_2 - \cos \theta_i n_1}{\cos \theta_i n_2 + \cos \theta_i n_1}.$$

$r_p$  wird als Reflexionskoeffizient bezeichnet. Wenn wir  $E_p^{(r)}$  eliminieren, erhalten wir

$$E_p^{(i)} 2n_1 \cos \theta_i = E_p^{(t)} (\cos \theta_i n_1 + n_2 \cos \theta_i)$$

und daraus den Transmissionskoeffizienten

$$t_p = \frac{E_p^{(t)}}{E_p^{(i)}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{\cos \theta_i n_2 + \cos \theta_i n_1}.$$

### 4.2.8 Reflexion von s-Licht

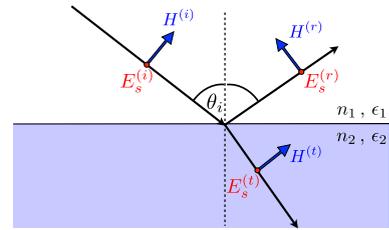


Abbildung 4.40: Reflexion von s-polarisiertem Licht.

Als zweites betrachten wir eine s-polarisierte Welle. Mit dem gewählten Koordinatensystem besitzt das s-polarisierte Licht nur eine  $y$ -Komponente, welche parallel zur Grenzfläche liegt. Dafür erhalten wir wiederum eine Kontinuitätsbedingung:

$$E_s^{(i)} + E_s^{(r)} = E_s^{(t)}.$$

Da wir zwei Unbekannte haben ( $E_s^{(r)}, E_s^{(t)}$ ), benötigen wir eine zweite Gleichung. Wir können dafür z.B. die Komponente des Magnetfeldes  $H_x$  in  $x$ -Richtung verwenden. Den Betrag der magnetischen Feldkomponente erhalten wir aus der Maxwell Gleichung. Im Vakuum war dies

$$B = \frac{E}{c}.$$

In einem Material mit Brechungsindex  $n$  wird  $c$  ersetzt durch die Lichtgeschwindigkeit im Medium, also  $c/n$ . Damit wird das Verhältnis

$$B = E \frac{k}{\omega} = E \frac{n}{c}$$

und für das  $H$ -Feld

$$H = E \frac{k}{\omega \mu_0} = E \frac{n}{c \mu_0}.$$

Die Richtung muss senkrecht zum  $E$ -Feld und zum Wellenvektor sein.

Für s-Licht liegt das  $H$ -Feld somit in der  $xz$ -Ebene. Wie beim  $E$ -Feld von p-Licht erhalten wir die  $x$ -Komponente durch Multiplikation mit  $\cos\theta$ . Die entsprechende Kontinuitätsbedingung lautet somit

$$H_x = \frac{\cos\theta_i n_1}{c\mu_0} (E_s^{(i)} - E_s^{(r)}) = \frac{\cos\theta_t n_2}{c\mu_0} E_s^{(t)}.$$

Damit haben wir wieder zwei Gleichungen. Wir eliminieren  $E_s^{(r)}$  und erhalten

$$E_s^{(i)} 2 \cos\theta_i n_1 = E_s^{(t)} (\cos\theta_t n_2 + \cos\theta_i n_1).$$

Damit haben wir den Transmissionskoeffizienten

$$t_s = \frac{2 \cos\theta_i n_1}{\cos\theta_t n_2 + \cos\theta_i n_1}.$$

Elimination des transmittierten Feldes ergibt den Reflexionskoeffizienten

$$\begin{aligned} n_1 \cos\theta_i (E_s^{(i)} - E_s^{(r)}) &= n_2 \cos\theta_t (E_s^{(i)} + E_s^{(r)}) \\ E_s^{(r)} (\cos\theta_i n_1 + \cos\theta_t n_2) &= E_s^{(i)} (\cos\theta_i n_1 - \cos\theta_t n_2) \\ r_s &= \frac{\cos\theta_i n_1 - \cos\theta_t n_2}{\cos\theta_i n_1 + \cos\theta_t n_2}. \end{aligned}$$

Diese Reflexionskoeffizienten beziehen sich auf Amplituden; die entsprechenden Ausdrücke für die Intensitäten diskutieren wir in Abschnitt 4.2.10.

### 4.2.9 Fresnel-Gleichungen

Die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten für  $p$ - und  $s$ -Licht werden zusammengefasst in den Fresnel Formeln:

$$\begin{aligned} r_{||} &= \frac{\cos\theta_i n_2 - \cos\theta_t n_1}{\cos\theta_i n_2 + \cos\theta_t n_1} \\ t_{||} &= \frac{2n_1 \cos\theta_i}{\cos\theta_i n_2 + \cos\theta_t n_1} \\ r_{\perp} &= \frac{\cos\theta_i n_1 - \cos\theta_t n_2}{\cos\theta_i n_1 + \cos\theta_t n_2} \\ t_{\perp} &= \frac{2n_1 \cos\theta_i}{\cos\theta_i n_1 + \cos\theta_t n_2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die Fresnel-Gleichungen wurden zu Beginn des 19. Jhd von Augustin Jean Fresnel hergeleitet, der auch

die Fresnel-Linse entwickelte - damals für Leuchttürme. Er untersuchte polarisiertes Licht und seine Beobachtungen gehörten damals zu den besten Hinweisen auf die transversale Natur der elektromagnetischen Wellen. Zusammen mit Thomas Young war Fresnel für einen Paradigmenwechsel im Verständnis der Optik verantwortlich: Zu Beginn der Untersuchungen von Fresnel gingen praktisch alle Physiker davon aus, dass Licht einen Teilchencharakter hat. Nach seinen Arbeiten und denen von Young, der teilweise früher arbeitete, war praktisch die ganze Welt von der Wellentheorie überzeugt.



Abbildung 4.41: Augustin Jean Fresnel (1788-1827).

Wir betrachten als Spezialfall den senkrechten Einfall

$$\theta_i = \theta_r = \theta_t = 0.$$

Hier ist keine Einfallsebene mehr definiert und entsprechend verschwindet der Unterschied zwischen  $s$ - und  $p$ -Polarisation. Wir erhalten

$$r(\theta = 0) = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad t(\theta = 0) = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}$$

Wir können diese Formel auch als Funktion der Wellenvektoren schreiben, indem wir

$$k = \frac{n\omega}{c} \rightarrow n_i = \frac{k_i c}{\omega}$$

benutzen:

$$r(\theta = 0) = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} \quad t(\theta = 0) = \frac{2k_1}{k_2 + k_1}$$

Dies stimmt mit den Ausdrücken (4.1) für den eindimensionalen Fall überein.

### 4.2.10 Intensitäten

Die Intensität des Lichtes ist proportional zum Poyntingvektor, resp. zur Energiestromdichte des Feldes. Bisher haben wir diese nur für Wellen im Vakuum diskutiert. In einem dielektrischen Medium mit Brechungsindex  $n = \sqrt{\epsilon}$  ist die Energiedichte

$$w_{el} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{\epsilon \epsilon_0}{2} E^2.$$

Die Energiestromdichte erhalten wir durch Multiplikation mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit, also mit  $c/n$  zu

$$\begin{aligned} I &= |S| = \frac{c \epsilon \epsilon_0}{n} E^2 = \frac{c \sqrt{\epsilon \epsilon_0}}{2} E^2 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu_0}} E^2 = \frac{n}{2z_0} E^2. \end{aligned}$$

Zur Erinnerung:  $z_0 = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} = 377\Omega$  ist die Wellenimpedanz für elektromagnetische Wellen im Vakuum.

Wir erhalten also die Intensität der einzelnen Strahlen, indem wir das Quadrat der Feldamplitude mit dem Brechungsindex multiplizieren und durch zweimal die Wellenimpedanz des Vakuums dividieren. Wir erhalten für senkrechten Einfall den Reflexionskoeffizienten für die Intensität

$$R = r_p(\theta_i = 0)^2 = -r_s(\theta_i = 0)^2 = \frac{(n_2 - n_1)^2}{(n_2 + n_1)^2}$$

und den Transmissionskoeffizienten

$$T = t_p(\theta_i = 0)^2 \frac{n_2}{n_1} = t_s(\theta_i = 0)^2 \frac{n_2}{n_1} = \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2}.$$

Damit gilt offenbar  $R + T = 1$ , d.h. die Energie ist erhalten. Außerdem sind sie offenbar symmetrisch unter Vertauschen von  $n_1$  und  $n_2$ , d.h. die Reflektivität hängt nicht von der Richtung des Strahls ab.

Beispiel: Reflexion an einer Glasoberfläche mit  $n_1 = 1.0; n_2 = 1.5$ :

$$R = \frac{(0.5)^2}{(2.5)^2} = \frac{0.25}{6.25} = 0.04 \quad T = \frac{6}{6.25} = 0.96.$$

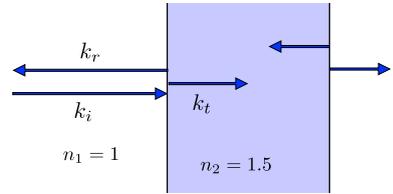


Abbildung 4.42: Reflexion an Glasplatte.

Also werden rund 4% des einfallenden Lichtes reflektiert. Bei einer Glasplatte tritt die gleiche Reflexion auch beim Austritt auf, d.h. es werden insgesamt rund 8% reflektiert. Bei grösseren Einfallswinkeln ist die Reflektivität entsprechend höher.

### 4.2.11 Energiebillanz

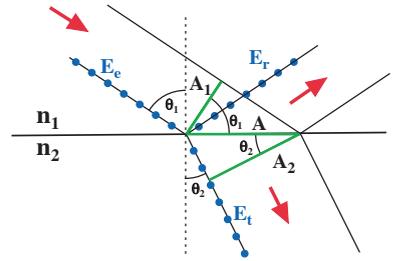


Abbildung 4.43: Energiebillanz.

Für die Intensitäten gilt bei der Reflexion / Transmission kein Erhaltungsgesetz, lediglich für die Leistungen. Hierbei muss berücksichtigt werden, dass sich nicht nur die Intensitäten ändern, sondern auch die Strahlquerschnitte. An der Grenzfläche teilen alle drei Strahlen eine Fläche

$$A = \frac{A_1}{\cos \theta_1} = \frac{A_2}{\cos \theta_2}.$$

Damit können wir die Energiebillanz formulieren als

$$R + T \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} = 1.$$

### 4.2.12 Winkelabhängigkeit bei externer Reflexion: p-Licht

Die Reflektivität hängt offenbar stark vom Einfallswinkel ab. Für kleine Einfallswinkel wird der größte

Teil des Lichtes transmittiert, für große Winkel wird das meiste reflektiert. Die Abhängigkeit ist außerdem unterschiedlich für beide Polarisierungen.

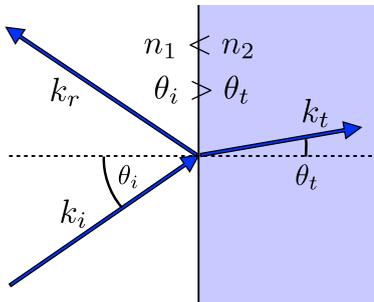


Abbildung 4.44: Externe Reflexion.

Wir betrachten zunächst den Fall der externen Reflexion. Dies entspricht dem Fall, wo das Licht vom optisch dünneren Medium auf das optisch dichtere Medium auftritt, im Gegensatz zur internen Reflexion, die dem experimentellen Beispiel entspricht.

Für die Diskussion der Winkelabhängigkeit ist es nützlich, sich zunächst die beiden Cosinusfunktionen zurechtzulegen. Der Cosinus des Einfallswinkels fällt im Wertebereich  $[0, \pi/2]$  von 1 auf 0 ab. Für den Fall der externen Reflexion bleibt der Transmissionswinkel kleiner und  $\cos \theta_t$  somit positiv. Für ein Glas mit  $n = 1.5$  sinkt er lediglich bis auf etwa 0.75.

Damit können wir die Winkelabhängigkeit von  $r_{||}$  ausrechnen - immer für  $n_1 = 1, n_2 = 1.5$ . Für senkrechten Einfall hatten wir bereits gesehen, dass

$$r_p(\theta_i = 0) = \frac{1.5 - 1}{1 + 1.5} = 0.2.$$

Betrachten wir den anderen Extremfall,  $\theta_i = \pi/2$ , so finden wir

$$r_p = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{0 - 0.75}{0 + 0.75} = -1$$

Dieses Resultat ist zum einen wie erwartet - das gesamte Licht wird reflektiert - zum andern vielleicht unerwartet: Das Vorzeichen hat sich geändert. Dies bedeutet insbesondere dass zwischen den beiden Winkeln irgendwo der Reflexionskoeffizient einen Nulldurchgang aufweist.

### 4.2.13 Der Brewsterwinkel

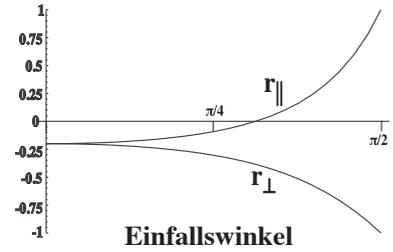


Abbildung 4.45: Reflexion als Funktion des Einfallswinkels.

Dieser Winkel wird als Brewsterwinkel  $\theta_B$  bezeichnet. Wir berechnen ihn aus

$$r_p = \frac{n_2 \cos \theta_B - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_B + n_1 \cos \theta_t} = 0.$$

Wir setzen das Brechungsgesetz ein und erhalten

$$\sin \theta_B \cos \theta_B = \sin \theta_t \cos \theta_t$$

oder

$$\sin(2\theta_B) = \sin(2\theta_t).$$

Die trivialen Lösung  $\theta_B = \theta_t = 0$  wurde durch die Substitution der Brechungsindizes hinzugefügt. Die physikalische Lösung ist

$$\theta_B + \theta_t = \pi/2.$$

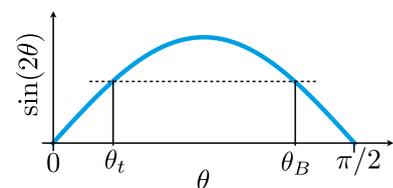


Abbildung 4.46: Konstruktion des Brewsterwinkels.

d.h. wenn der reflektierte und der transmittierte Strahl einen rechten Winkel bilden.

Dies gibt ein einfaches Bild für die Existenz des Brewsterwinkels kann man relativ einfach verstehen: Der reflektierte Strahl wird dadurch erzeugt, dass der einfallende Strahl im Material Dipole zum Schwingen anregt. Diese schwingen in Richtung der Polarisation des transmittierten Strahls. Wie von der Theorie des Hertz'schen Dipols bekannt, ist die Intensität

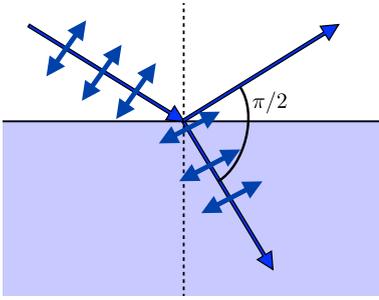


Abbildung 4.47: Strahlender Dipol beim Brewsterwinkel.

des abgestrahlten Lichtes parallel zur Achse des Dipols = 0.

Den Wert des Winkels erhalten wir, indem wir das Resultat  $\theta_B + \theta_t = \pi/2$  in die ursprüngliche Gleichung

$$n_2 \cos \theta_B = n_1 \cos \theta_t$$

einsetzen und damit den Transmissionswinkel  $\theta_t$  eliminieren:

$$n_2 \cos \theta_B = n_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_B\right) = n_1 \sin \theta_B$$

oder

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

Für Glas mit einem Brechungsindex von  $n_2 \approx 1.5$  liegt der Brewsterwinkel bei  $\theta_B \approx 56^\circ$ .

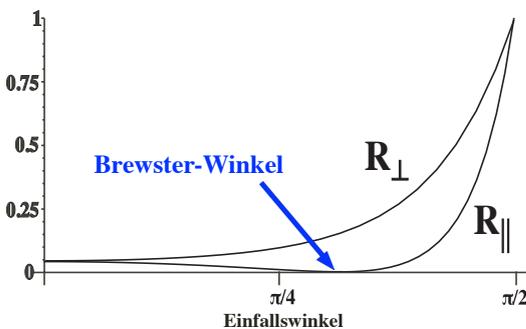


Abbildung 4.48: Reflektierte Intensität als Funktion des Einfallswinkels.

Wenn wir die Intensität des reflektierten Strahls betrachten erwarten wir also für p-Licht eine verschwindende Intensität wenn der Brewsterwinkel erreicht wird.

### Exp.: Reflexion am Brewsterwinkel

Hier wird die gesamte Intensität transmittiert. Dieser Winkel ist von großer praktischer Bedeutung: Er kann z.B. dazu verwendet werden, polarisiertes Licht zu erzeugen: Am Brewsterwinkel ist der reflektierte Strahl vollständig s polarisiert. Er wird deshalb auch als Polarisationswinkel bezeichnet. Wichtiger ist aber die Anwendung zur Reduktion der Reflexionsverluste.

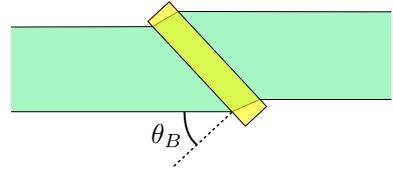


Abbildung 4.49: Transmission eines Laserstrahls durch einen Farbstoffstrahl.

Bringt man z.B. optische Elemente in einen Laser-Resonator, so stellt man sie wenn immer möglich unter dem Brewsterwinkel ein.

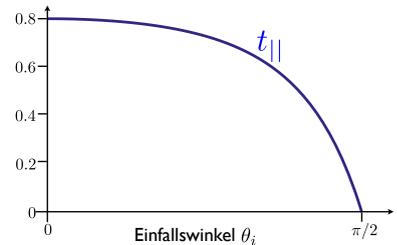


Abbildung 4.50: Transmissionskoeffizient als Funktion des Einfallswinkels.

Die Winkelabhängigkeit des Transmissionskoeffizienten ist demgegenüber relativ einfach. Für kleine Winkel hatten wir gesehen, dass er den Maximalwert von 0.8 erreicht, während er für streifenden Einfall auf Null absinkt, da  $\cos \theta_i$  im Zähler verschwindet, während  $\cos \theta_t$  im Nenner endlich bleibt.

### 4.2.14 Winkelabhängigkeit für s-Licht

Wir betrachten jetzt die Winkelabhängigkeit der externen Reflexion für s-Licht.

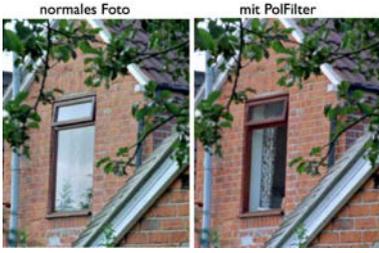


Abbildung 4.51: Eliminierung von Reflexen mit Hilfe eines Polarisationsfilters.

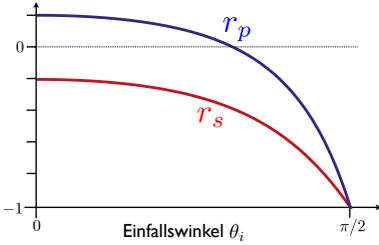


Abbildung 4.52: Reflexionskoeffizienten als Funktion des Einfallswinkels.

Der Reflexionskoeffizient für s-Licht hat eine einfachere Winkelabhängigkeit als derjenige für p-Licht. Bei senkrechtem Einfall erhalten wir

$$r_{\perp} = \frac{0.5}{2.5} = 0.2,$$

d.h. wie für p-Licht einen Betrag von 0.2. Das Vorzeichen ist in diesem Fall negativ, da der größere Brechungsindex in diesem Fall mit dem negativen Vorzeichen erscheint. Bei streifendem Einfall wird auch dieser Reflexionskoeffizient -1, ohne je durch null zu gehen.

Der Transmissionskoeffizient zeigt qualitativ das gleiche Verhalten wie bei p-Licht.

### 4.2.15 Interne Reflexion

Man spricht von interner Reflexion (im Gegensatz zu externer Reflexion), wenn der einfallende und reflektierte Strahl sich im optisch dichteren Medium befinden, d.h. wenn  $n_1 > n_2$ .

Wir werten die Fresnel-Gleichungen (4.2) zuerst für senkrechten Einfall aus. Dann sind die Transmissionskoeffizienten (für Amplituden)  $> 1$ , während

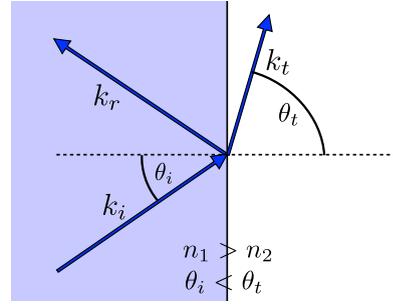


Abbildung 4.53: Interne Reflexion.

der Reflexionskoeffizient je nach Polarisation positiv oder negativ ist.

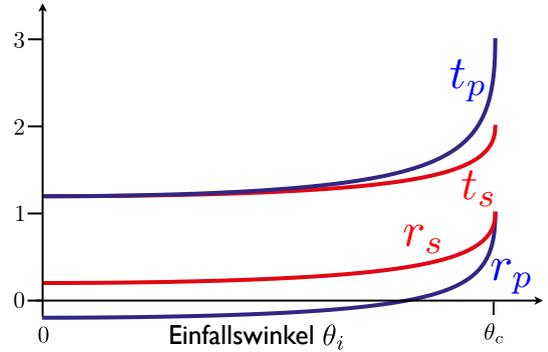


Abbildung 4.54: Reflexions- und Transmissionskoeffizienten bei interner Reflexion.

Für kleine Winkel  $\theta_i$  sind die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten gleich groß wie bei p-Licht. Für größere Winkel nimmt der Reflexionskoeffizient zu, wobei auch hier der Reflexionskoeffizient für p-Licht einen Nulldurchgang aufweist.

Im Gegensatz zum Fall der externen Reflexion nehmen hier die Transmissionskoeffizienten mit zunehmendem Winkel zu! Dies bedeutet natürlich nicht, dass die Leistung im transmittierten Strahl zunimmt. Die Erklärung dafür ist der Strahlquerschnitt, der mit  $\cos \theta$  abnimmt. Der maximale Wert des Transmissionskoeffizienten liegt bei 2 für s-Licht, resp.  $2n_1$  für p-Licht.

### 4.2.16 Totalreflexion

Wenn wir das Brechungsgesetz von Snellius

$$\sin \theta_1 n_1 = \sin \theta_2 n_2$$

betrachten, so müsste offenbar für einen gegebenen Einfallswinkel  $\theta_1$  und Brechungsindizes  $n_1, n_2$  der Winkel  $\theta_2$  des transmittierten Strahls vorgegeben sein. Es gibt aber nicht für alle Werte eine reelle Lösung: z.B. für

$$\sin \theta_1 = 1, \quad n_1 = 1.5, \quad n_2 = 1$$

müsste  $\sin \theta_2 > 1$  werden. In diesem Fall verschwindet die transmittierte Intensität, während der Reflexionskoeffizient auf 1 ansteigt.

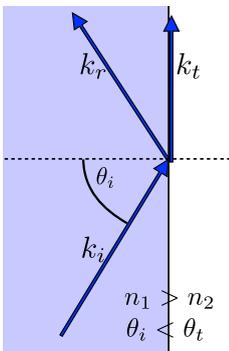


Abbildung 4.55: Brechung in der Nähe des kritischen Winkels.

Der kritische Winkel, an dem dies erstmals auftritt, ist dort, wo der transmittierte Strahl gerade um 90 Grad von der senkrechten gebrochen wird:

$$\theta_c = \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1}.$$

Für grössere Einfallswinkel wird er folgerichtig zurückgebogen und dringt nicht mehr in das optisch dünnere Medium ein. Man bezeichnet diesen Bereich als Totalreflexion.

#### Exp.: Totalreflexion

Das Feld im optisch dünneren Medium kann aber nicht einfach verschwinden, da sonst die Kontinuitätsbedingungen verletzt wären. Der Feldverlauf im

$$n_e \sin \theta_e = n_t \sin \theta_t$$

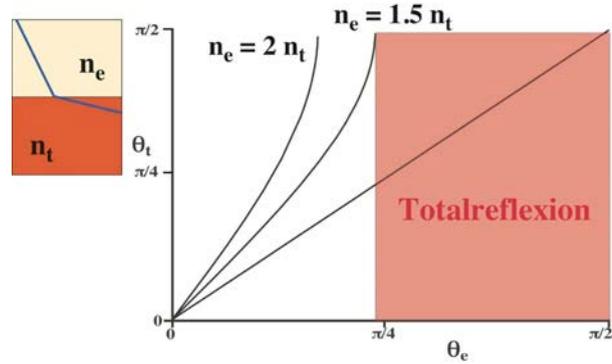


Abbildung 4.56: Brechung in der Nähe des kritischen Winkels.

Medium 2 ist in diesem Fall exponentiell. Diese Welle, die parallel zur Grenzfläche läuft und deren Amplitude im Medium exponentiell mit dem Abstand von der Grenzfläche abfällt wird als evaneszente oder quergedämpfte Welle bezeichnet.

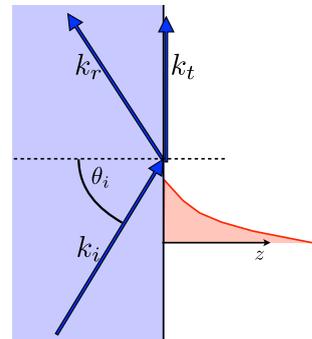


Abbildung 4.57: Evaneszente oder quergedämpfte Welle.

Man erhält die Eindringtiefe, d.h. die Distanz, über die das Feld auf  $1/e$  abfällt, aus der Bedingung

$$\left(k_z^{(t)}\right)^2 = \left(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i\right) \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Wenn der Einfallswinkel größer ist als der kritische Winkel,  $\theta_i > \theta_c$ , so wird  $\left(k_z^{(t)}\right)^2$  negativ, d.h. die  $z$ -Komponente des Wellenvektors ist imaginär. Wenn wir das in die Formel für die ebene Welle einsetzen erhalten wir ein exponentiell abfallendes Feld:

$$e^{ik_z z} = e^{-\Im\{k_z\}z}.$$

Die Eindringtiefe ist das Inverse des Imaginärteils von  $k_z^{(t)}$ . Wir berechnen diesen als

$$\Im\{k_z^{(t)}\} = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}.$$

Der Imaginärteil geht also am kritischen Winkel gegen null. Die Eindringtiefe

$$\frac{\lambda}{2\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}$$

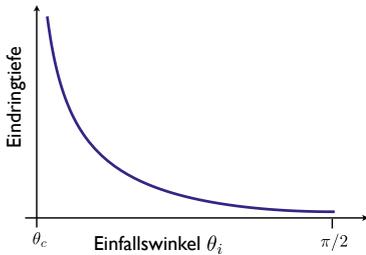


Abbildung 4.58: Eindringtiefe der evaneszenten Welle als Funktion des Einfallswinkels.

divergiert demnach am kritischen Winkel. Für größere Winkel nimmt sie rasch ab, bis auf die Größe der optischen Wellenlänge, also typischerweise  $< 1 \mu\text{m}$ . Dieser Teil des optischen Feldes wird auch gerne für Experimente verwendet. Das interessante daran ist, dass es eine Möglichkeit darstellt, Licht in der Nähe einer Grenz- oder Oberfläche zu lokalisieren. Dadurch ist es z.B. möglich, sehr hohe Intensitätsgradienten zu erzeugen.

Die Totalreflexion wird u.a. in Lichtleitern und Glasfasern genutzt: Das Licht wird deshalb in der Glasfaser geführt und kann sie nicht vor dem Ende verlassen.

### 4.2.17 Phasen

Es kann sich nicht nur die Intensität, sondern auch die Phase des Strahls verändern. Da alle Amplituden reell sind, können nur Phasen von 0 und  $\pi$  auftreten. Wichtig sind jeweils auch nicht die absoluten Phasen, sondern relative, z.B. der Phasensprung am Brewsterwinkel.

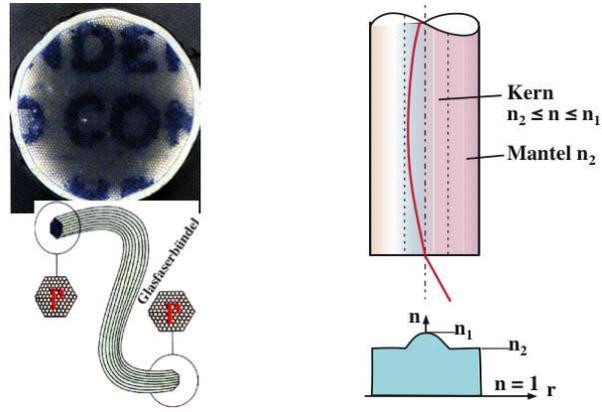


Abbildung 4.59: Lichtleiter.

Wie genau die Phasen der Reflexionskoeffizienten erscheinen, hängt allerdings von der Wahl der Richtung von  $E_p$  und  $E_s$  für die verschiedenen Richtungen ab. Bei der hier genutzten Konvention, die relativ häufig benutzt wird, besitzt  $r_p(\theta_i = 0)$  ein negatives Vorzeichen. Dies bedeutet aber physikalisch, dass bei senkrechtem Einfall die elektrischen Felder beider Wellen an der Oberfläche in Phase sind - nicht aber die magnetischen Felder.

### 4.2.18 Reflexion an Metallen

Metalle haben freie Elektronen, so dass elektromagnetische Wechselfelder darin sehr effizient gedämpft werden. Man kann diese im optischen Bereich relativ gut durch einen rein imaginären Brechungsindex mit großem Absolutbetrag beschreiben. Wir rechnen hier nur den Fall des senkrechten Einfalls für den Spezialfall  $n_1 = 1, n_2 = im$  mit  $m \gg 1$ . Damit erhalten wir für den Reflexionskoeffizienten

$$r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = \frac{im - 1}{im + 1} \approx 1$$

und für den Transmissionskoeffizienten

$$t = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} = \frac{2}{im + 1} \approx -\frac{2i}{m}.$$

Offenbar wird also Licht auf einer Metalloberfläche sehr gut reflektiert.

Spiegel basieren gerade auf der Reflexion an einer dünnen Metallschicht und bereits in der Antike wurden gut polierte Metallplatten als Spiegel verwendet.

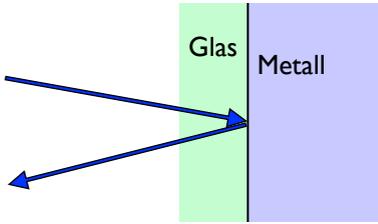


Abbildung 4.60: Metallspiegel.

Der Transmissionskoeffizient hingegen wird imaginär, d.h. die Welle wird im Metall exponentiell gedämpft. Die Eindringtiefe liegt bei typischen Metallen in der Größenordnung von einigen nm, also klein im Vergleich zur optischen Wellenlänge. Nur sehr dünne Metallschichten von wenigen Atomlagen Dicke sind deshalb für Licht durchlässig.

## 4.3 Geometrische Optik

### 4.3.1 Geltungsbereich

Die geometrische Optik ist eine vereinfachte Theorie für die Berechnung der Ausbreitung von Licht. Sie gilt solange die Dimensionen der Apparate, welche das Licht beschränken groß sind gegenüber der Wellenlänge. Dann kann das Licht in guter Näherung als eben Welle beschrieben werden, welche sich geradlinig ausbreitet. Dass Wellen durch "Strahlen" approximiert werden können gilt nicht nur in der Optik. Auch Wasserwellen mit kurzen Wellenlängen bewegen sich etwa linear durch eine Öffnung, die groß ist im Vergleich mit der Wellenlänge.

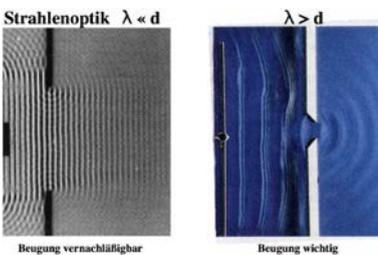


Abbildung 4.61: Beugung vs. geometrische Optik.

Werden die Dimensionen zu klein, so treten Beugungseffekte auf.

Experiment : Laserstrahl durch Blende -> Beugung  
Diese Effekte werden etwas später diskutiert.

### 4.3.2 Das Prinzip von Fermat

Bei der Berechnung des Weges, welchen das Licht beim passieren eines optischen Instrumentes nimmt leistet das Prinzip von Fermat nützliche Dienste. Es ist ein Extremalprinzip, welches praktisch identisch ist mit dem Hamilton'schen Prinzip. Die Grundidee stammt von Hero von Alexandria aus dem 2. Jhd v. Chr. Es lautete: Das Licht nimmt den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten.

Pierre de Fermat  
1601 - 1665

**"Licht nimmt den schnellsten Weg"**

Bsp.: freier Raum

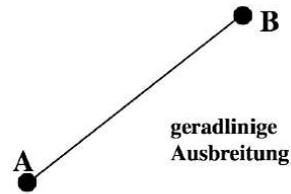


Abbildung 4.62: Das Prinzip von Fermat.

Fermat hat es erweitert auf Systeme mit mehr als einem Brechungsindex. In der Formulierung von Fermat lautet es: "Licht nimmt den Weg, für den es die kürzeste Zeit braucht". Mathematisch ausgedrückt lautet dies

$$\int_{p_0}^{p_1} n ds = \int_{p_0}^{p_1} \frac{c}{v_p} ds = c \int_{p_0}^{p_1} dt = \text{Minimum},$$

wobei  $P_0, P_1$  die Anfangs- und Endpunkt des Weges bezeichnen und das Minimum sich auf all möglichen Wege bezieht. Heute schreibt man diese Bedingung meist als Extremalprinzip. In der Form einer Variation lautet e

$$\delta \int_{p_0}^{p_1} n ds = 0,$$

ähnlich wie das Hamilton'sche Prinzip. Das einfachste Beispiel ist natürlich die Ausbreitung im freien

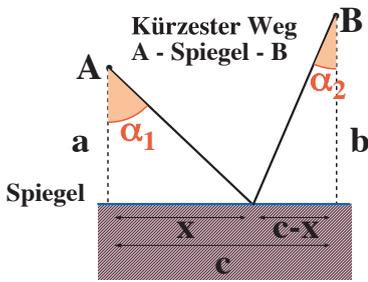


Abbildung 4.63: Reflexion als extremaler Weg.

Raum in einem homogenen Medium. Hier ist offenbar der direkteste Weg der kürzeste.

Als weiteres Beispiel betrachten wir Licht, das auf einem Spiegel reflektiert wird. Wir suchen also den kürzesten Weg, auf dem das Licht vom Punkt A über den Spiegel zu Punkt B gelangt. Aus dem obigen Resultat entnehmen wir, dass es geradlinig von A zur Oberfläche und von dort geradlinig zu B läuft. Zu bestimmen sind die Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ . Die Länge des gesamten Weges beträgt

$$\Delta = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2}.$$

Dieser Weg wird minimal für

$$\frac{d\Delta}{dx} = 0 = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}.$$

Die beiden Brüche können geschrieben werden als  $\sin \alpha_1$  und  $\sin \alpha_2$ . Wir erhalten also das Reflexionsgesetz  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

Wir können dieses Problem auf das Problem im freien Raum zurückführen indem wir (geometrisch) den Ausgangspunkt und den Weg bis zum Spiegel in diesem reflektieren. Damit ist wiederum die direkte Verbindung die kürzeste, und man sieht leicht, dass in diesem Fall der Reflexionswinkel gleich dem Einfallswinkel wird, d.h. wir haben mit Hilfe des Prinzips von Fermat sehr einfach das Reflexionsgesetz hergeleitet.

Wirklich wichtig wird das Prinzip erst, wenn das Medium nicht mehr homogen ist, z.B. wenn wir zwei Halbräume mit unterschiedlichen Brechungsindizes betrachten. Hier erreicht das Licht offenbar das Ziel

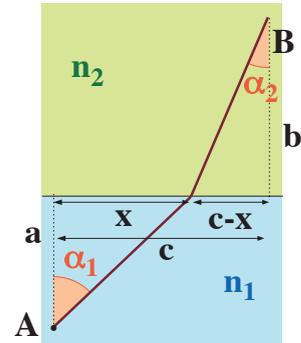


Abbildung 4.64: Extremaler Weg an einer Grenzfläche.

dann am schnellsten, wenn der Weg im langsameren Medium gering gehalten wird. Der optische Weg beträgt jetzt

$$\Delta = n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (c-x)^2}.$$

Der Extremalwert wird erreicht für

$$\frac{d\Delta}{dx} = 0 = n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - n_2 \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}.$$

Das Resultat für das Minimum ist

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2,$$

also das Snellius'sche Brechungsgesetz.

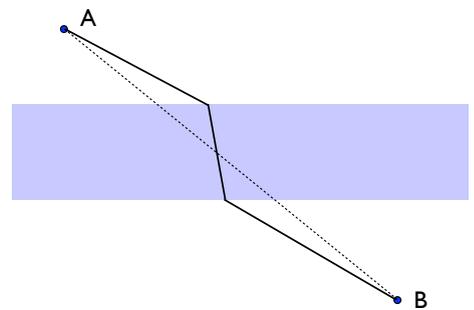


Abbildung 4.65: Durchqueren eines Flusses oder einer planparallelen Platte.

Als weiteres Beispiel betrachten wir den Weg durch eine planparallele Platte. Da sich Licht im Glas langsamer ausbreitet als außerhalb, wird der Weg in der Platte verkürzt. Das Resultat ist, dass der Lichtstrahl einen seitlichen Versatz erfährt.

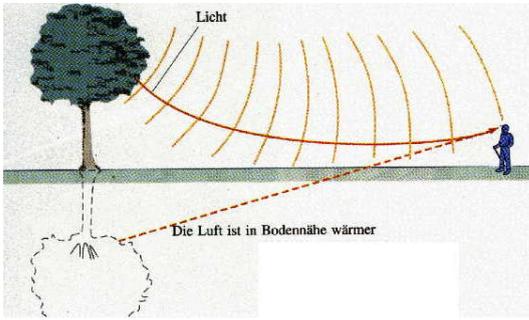


Abbildung 4.66: Luftspiegelung über einer Straße.

Wenn der Brechungsindex kontinuierlich variiert, so kann der optische Weg auch krumm sein. Qualitativ kann man diesen Effekt leicht durch das Prinzip von Fermat verstehen: der Lichtstrahl bleibt möglichst lange im Medium mit dem niedrigen Brechungsindex. Eine quantitative Analyse lässt sich leichter im Wellenbild durchführen; hier, im Kapitel über geometrische Optik verzichten wir deshalb auf eine genauere Behandlung.

Ein Beispiel dieses Effektes ist z.B., dass die Strahlen der Sonne in der Erdatmosphäre gekrümmt werden. Deshalb ist die Sonne auch noch sichtbar, wenn sie rein geometrisch betrachtet bereits unterhalb des Horizontes ist.

### Exp. 035: gekrümmter Lichtstrahl

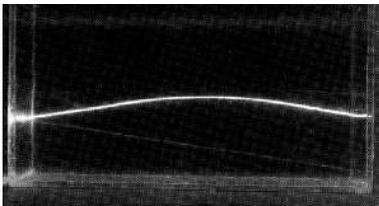


Abbildung 4.67: Gekrümmter Laserstrahl in Salzwasser.

Dies kann man bei entsprechend großer Variation des Brechungsindexes auch im Labormaßstab reproduzieren: gibt man konzentriertes Salzwasser unter eine Schicht aus reinem Wasser, so erhält man einen tiefenabhängigen Brechungsindex, der den Laserstrahl nach unten biegt.

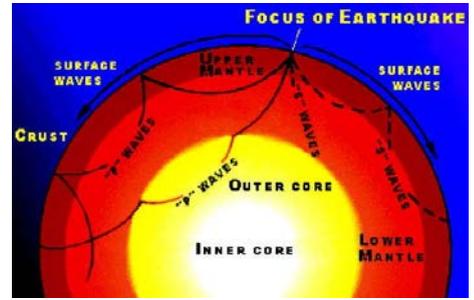


Abbildung 4.68: Ausbreitung seismischer Wellen.

Den gleichen Effekt findet man z.B. auch bei der Ausbreitung von seismischen Wellen: die Variation der Phasengeschwindigkeit mit Druck und Temperatur führt zu einer Abhängigkeit von der Tiefe und deshalb zu gebogenen Pfaden.

### 4.3.3 Brechung an einer sphärischen Oberfläche

#### Exp 038.: Strahlengang

Trifft ein Lichtstrahl auf eine gekrümmte Grenzfläche, so hängt seine Richtung nach der Grenzfläche davon ab, an welchem Punkt er auf die Grenzfläche auftrifft. Dies wird z.B. in Sammellinsen benutzt.

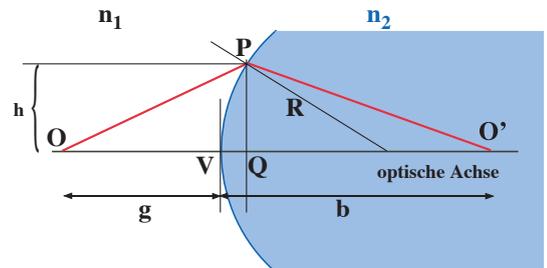


Abbildung 4.69: Brechung an einer sphärischen Oberfläche.

Wir betrachten zunächst den Fall einer einzelnen sphärischen Oberfläche, d.h. eines Glaskörpers, der nach rechts unendlich weit ausgedehnt ist. Wir berechnen den Weg, den ein Lichtstrahl nimmt, wenn er an der Oberfläche gebrochen wird indem wir das Prinzip von Fermat verwenden. Natürlich könnten wir dafür auch das Brechungsgesetz verwenden und sollten dabei das gleiche Resultat erhalten.

Wir beschränken uns auf geringe Abstände von der optischen Achse, so dass wir die Oberfläche durch eine Parabel annähern können. Der Weg  $OPO'$  durch einen Punkt  $P$  im Abstand  $h$  von der optischen Achse ist dann

$$n_1 OP + n_2 PO'.$$

Wir können die beiden Strecken in quadratischer Näherung schreiben als

$$OP \approx OQ + \frac{h^2}{2S} \quad O'P \approx O'Q + \frac{h^2}{2S'}.$$

Hier ist  $S$  die Distanz vom Objekt  $O$  zur Grenzfläche und  $S'$  die Distanz von der Grenzfläche zum Bild  $O'$ . Die Summe wird damit

$$\begin{aligned} n_1 OP + n_2 PO' &= n_1(OV + VQ + \frac{h^2}{2S}) \\ &\quad + n_2(QO' + \frac{h^2}{2S'}). \end{aligned}$$

Gemäß dem Prinzip von Fermat sollte dies gleich dem direkten Weg sein, also

$$\begin{aligned} n_1(OV + VQ + \frac{h^2}{2S}) + n_2(QO' + \frac{h^2}{2S'}) \\ = n_1 OV + n_2(VQ + QO'). \end{aligned}$$

Somit muss gelten

$$VQ(n_1 - n_2) + \frac{h^2}{2S}n_1 + \frac{h^2}{2S'}n_2 = 0.$$

In der gewählten Näherung ist

$$VQ = \frac{h^2}{2R}$$

und somit

$$\frac{n_1}{S} + \frac{n_2}{S'} = \frac{n_2 - n_1}{R},$$

also unabhängig von  $h$ . Falls diese Bedingung erfüllt ist, benötigt das Licht somit auf allen Pfaden die gleiche Zeit. Nach dem Prinzip von Fermat wird damit  $O$  auf  $O'$  abgebildet. Diese Gleichung wird als Abbildungsgleichung bezeichnet: Bei gegebenem Radius  $R$ , Brechungsindex  $n_{1,2}$  und Objektdistanz  $S$  bestimmt sie die Bilddistanz  $S'$ .

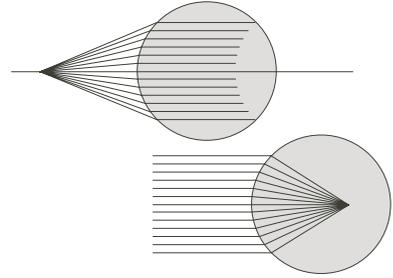


Abbildung 4.70: Brechung von parallelen Strahlen.

Einen wichtigen Spezialfall erhält man, wenn man die Objektdistanz  $S$  gegen unendlich gehen lässt, wenn also parallele Strahlen auf die Grenzfläche einfallen. Die Objektdistanz  $S'$  wird dann als Brennweite  $f$  bezeichnet. Offenbar ist

$$\frac{n_2}{f} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

oder

$$f = R \frac{n_2}{n_2 - n_1}.$$

Die Sammelwirkung einer gekrümmten Oberfläche ist somit bestimmt durch den Krümmungsradius und die Differenz zwischen den Brechungsindizes.

### 4.3.4 Linse

Anstelle einer einzelnen sphärisch gekrümmten Oberfläche betrachten wir nun einen Glaskörper mit zwei sphärisch gekrümmten Oberflächen. Dies entspricht offenbar einer Linse, wobei der Krümmungsradius von beiden Oberflächen positiv, negativ oder unendlich sein kann.

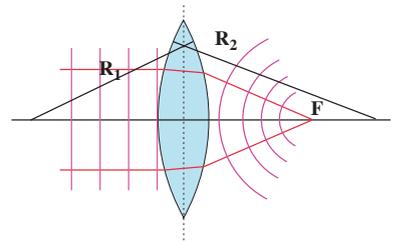


Abbildung 4.71: Sphärische Linse.

Den Strahlengang für eine Linse finden wir, indem wir das Resultat für eine sphärische Oberfläche

zweimal anwenden. Wir vereinfachen dabei für den Fall  $n_1 = 1, n_2 = n$ . Zunächst für die erste Grenzfläche gilt

$$\frac{1}{S} + \frac{n}{S'} = \frac{n-1}{R_1}$$

Die Distanz  $S'$  bis zum Bild muss gleichzeitig die Gleichung für die zweite Oberfläche

$$-\frac{n}{S'} + \frac{1}{S''} = -\frac{n-1}{R_2}$$

Dabei muss das Vorzeichen von  $S$  und  $R$  beachtet werden: es hängt von der Richtung ab. Bei der Objekt- / Bildabstand ist es gemäß unserer Definition positiv wenn das Objekt / Bild rechts der Grenzfläche liegt, negativ wenn es auf der linken Seite liegt. Beim Krümmungsradius entsprechend positiv wenn das Zentrum auf der rechten Seite liegt, negativ im umgekehrten Fall.

Wir reduzieren die beiden Gleichungen auf eine, indem wir  $S'$  eliminieren und erhalten

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S''} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f}$$

Somit ist die Brennweite der Linse

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

<b>Linsenform</b>						
<b>Bezeichnung</b>	bi-konvex	plan-konvex	positiver Meniskus	bi-konkav	plan-konkav	negativer Meniskus
<b>Radien</b>	$R_1 > 0$ $R_2 < 0$	$R_1 = \infty$ $R_2 < 0$	$R_1 < R_2 < 0$	$R_1 < 0$ $R_2 > 0$	$R_1 = \infty$ $R_2 > 0$	$R_2 < R_1 < 0$
<b>Brennweite</b>	$f > 0$			$f < 0$		

Abbildung 4.72: Linsenformen.

wobei die Radien  $R_{1,2}$  der beiden Linsenflächen jeweils vorzeichenbehaftet sind. Man kann dieses Resultat einfach so interpretieren, dass sich die Brechkraft  $(n-1)/R$  der beiden Oberflächen addiert, wobei bei der zweiten Oberfläche aufgrund des umgekehrten Verhältnisses der Brechungsindizes ein positiver Radius eine negative Sammelwirkung, d.h. eine aufweitende Wirkung hat.

Die "Brechkraft" oder Sammelwirkung einer Linse ist das Inverse der Brennweite und wird z.T. in "Dioptrien" = 1/m gemessen. 5 Dioptrien bezeichnen eine Brennweite von 20 cm. Die Brechkraft ist somit proportional zur Differenz der Brechungsindizes und invers proportional zum Radius der Linse. Die Tatsache, dass die Brechkraft von der Differenz der Brechungsindizes abhängt, kann man sehr einfach nachprüfen wenn man beim Schwimmen unter Wasser die Augen öffnet: Man sieht nicht scharf, da hier die Brechkraft der Linse im Auge kleiner ist.

Je nach Vorzeichen und Betrag der beiden Radien unterscheiden man plankonvexe, plankonkave, Meniskus- und .. Linsen.

### 4.3.5 Abbildung und Vergrößerung

Das Bild eines bestimmten Objekts, das durch eine dünne Linse erzeugt wird, kann durch folgende Konstruktion erhalten werden:

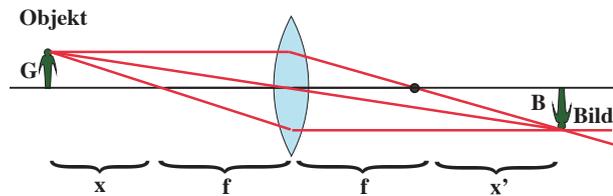


Abbildung 4.73: Abbildung an einer Linse.

- Jeder Strahl parallel zur Achse geht durch den Fokus auf der gegenüberliegenden Seite
- Ein Strahl, der durch den Fokus läuft, tritt auf der anderen Seite parallel zur Achse aus.

Damit erhalten wir folgende Gleichung

$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{x}$$

und

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{f}$$

und für die Größe  $y'$  des Bildes relativ zur Größe  $y$  des Objekts

$$\frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f}$$

Das Vergrößerungsverhältnis ist somit gegeben durch das Verhältnis der Brennweite  $f$  zum Abstand  $x$  des Objekts vom Brennpunkt, resp. durch das Verhältnis des Abstandes  $x'$  des Bildes vom zweiten Brennpunkt.

Den Bildabstand  $x'$  erhält man aus den beiden obigen Gleichungen z.B. indem man die letzte auflöst nach

$$y' = y \frac{f}{x}$$

und dies in

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{f}$$

einsetzt:

$$\frac{y f}{x x'} = \frac{y}{f}$$

oder

$$x x' = f^2.$$

Das Produkt von Objekt- und Bilddistanz (gemessen vom Brennpunkt) ist somit immer gleich dem Quadrat der Brennweite. Diese Form ist äquivalent zur Gleichung

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{1}{f}$$

wenn die Distanzen durch

$$S = x + f \quad S' = x' + f$$

ersetzt werden.

Die wichtigsten Spezialfälle sind  $x = x' = f$ , d.h. Objekt und Bild sind je um  $f$  von den Brennpunkten entfernt, resp. um  $2f$  von der Linse. Dabei sind Objekt- und Bilddistanz identisch und das Abbildungsverhältnis gerade gleich 1. Wenn wir einen der beiden Abstände, z.B.  $x$ , gegen Null gehen lassen, so muss der andere gegen unendlich gehen. Dies entspricht den beiden Fällen wo ein paralleler Strahl in den Brennpunkt der Linse fokussiert wird, resp. wo eine punktförmige Quelle im Brennpunkt der Linse kollimiert wird.

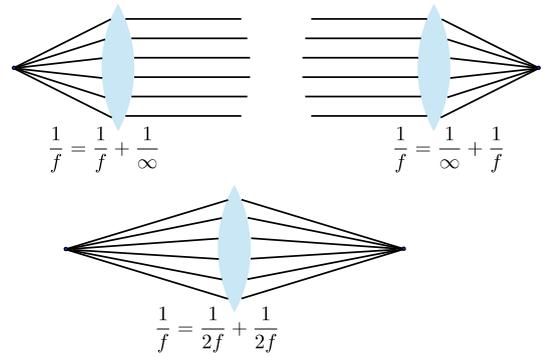


Abbildung 4.74: Spezielle Abstände.

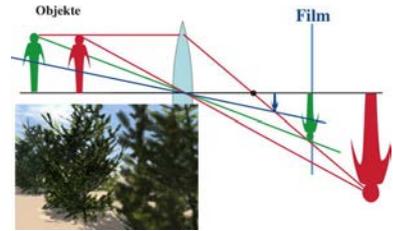


Abbildung 4.75: Tiefenschärfe.

Die Tatsache, dass unterschiedlich entfernte Gegenstände auf unterschiedliche Bildebenen abgebildet werden ist jedem Hobby-Fotografen bekannt. Sie führt zur endlichen ‘‘Tiefenschärfe’’ eines Bildes: Da der Film einen bestimmten Abstand zum Objektiv aufweist werden nur Gegenstände in der ‘‘richtigen’’ Entfernung scharf abgebildet.

### 4.3.6 Linsenfehler

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass die Linsen perfekt seien. Allerdings haben wir bei der Herleitung der Linsengleichung verschiedene vereinfachende Annahmen gemacht, die in der Praxis nie exakt erfüllt sind. So hatten wir z.B. angenommen dass die Dicke der Linsen vernachlässigt werden kann, oder dass die Oberfläche durch eine Parabel angenähert werden kann. In der Praxis benutzt man hingegen sphärische Oberflächen, da solche Linsen sehr viel einfacher herzustellen sind. Aus diesen Unterschieden ergeben sich sogenannte ‘‘Linsenfehler’’, d.h. Unterschiede zwischen den hier angenommenen ‘‘Gesetzen’’ und den wirklichen Strahlengängen. Technisch werden diese folgendermaßen klas-

sifiziert:

### Exp 038a: Linsenfehler

1) sphärische Aberration: Die hier benutzten Gleichungen gelten nur für Strahlen in der Nähe der optischen Achse. Strahlen, die zu weit davon entfernt sind, werden nicht mehr in den gleichen Punkt fokussiert.

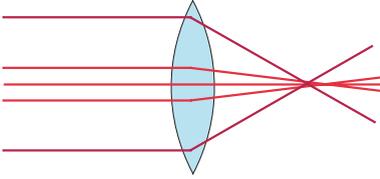


Abbildung 4.76: Sphärische Aberration einer Linse.

Natürlich kann man eine Linse immer klein genug machen, dass solche Fehler vernachlässigbar sind. Andererseits ist die Lichtstärke einer Linse proportional zu ihrer Fläche, also zum Quadrat des Durchmessers. Es gibt zwei Möglichkeiten, sphärische Aberration auch bei großen Linsen gering zu halten:

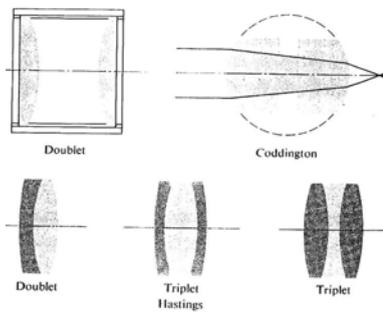


Abbildung 4.77: Kombination von Linsen.

i) Man kombiniert verschiedene Linsen in ein Objektiv

ii) Man benutzt asphärische Linsen, d.h. man optimiert die Form der Linse so, dass diese Fehler verschwinden. Dies wird allerdings nur für teure Spezialoptiken gemacht, weil das Herstellungsverfahren wesentlich aufwendiger ist. Heute ist dies aber eindeutig ein zunehmender Trend.

2) Chromatische Aberration:

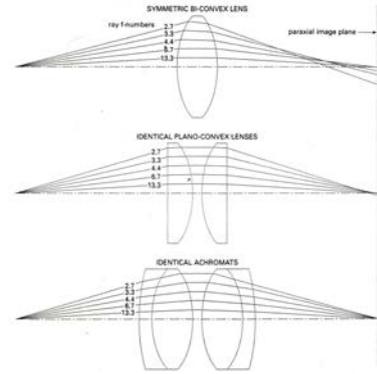


Abbildung 4.78: Aberrationskorrektur durch Kombination von Linsen.

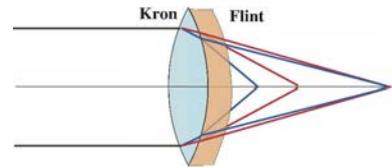


Abbildung 4.79: Chromatische Aberration.

Aufgrund der Dispersion des Glases werden unterschiedliche Wellenlängen unterschiedlich stark gebrochen. Auch dieses Problem kann durch die Kombination unterschiedlicher Linsen weitgehend vermieden werden. Dabei werden Linsen mit unterschiedlichem Brechungsindex verwendet.

Solche Linsenkombinationen werden kommerziell als "Achromaten" angeboten. Das hier gezeigte Beispiel reduziert die Dispersion über den sichtbaren Spektralbereich auf weniger als 0.5%.

Astigmatismus: Ist die Linse nicht symmetrisch um ihre Achse, so erhält man für unterschiedliche Ebenen unterschiedliche Brennweiten. Dieser Effekt wird als Astigmatismus bezeichnet. Er führt dazu, dass man kein scharfes Bild erhält. Man kann als Bildenebene die Brennebene für Strahlen in der horizontalen oder vertikalen Ebene wählen, und erhält dann jeweils eine Verschmierung in der anderen Richtung.

### 4.3.7 Maximale Auflösung

Aufgrund dieser Gleichungen könnte man meinen, dass man Objekte beliebig vergrößern kann. Dies

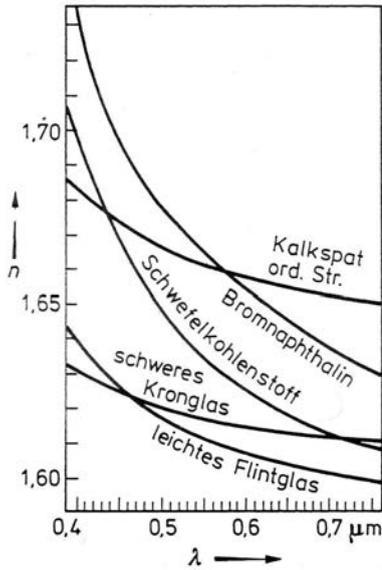


Abbildung 4.80: Dispersion unterschiedlicher Glassorten.

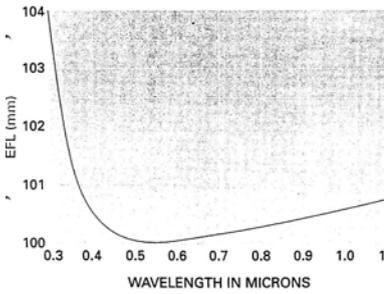


Abbildung 4.81: Dispersionskurve eines nominellen Achromaten.

ist aber nicht möglich, da man dann in einen Bereich kommen würde, wo die geometrische Optik nicht mehr gültig wäre. Wir hatten als Voraussetzung für deren Anwendbarkeit ja angenommen, dass die relevanten Dimensionen groß seien im Vergleich zur Wellenlänge des Lichtes. Eine Abschätzung für das maximal erreichbare Auflösungsvermögen erhält man mit folgender Überlegung:

Die Weglängendifferenz des Lichtes bei der Linse muss mindestens  $\lambda$  sein, damit die Punkte P und P' im Abstand  $D$  unterschieden werden können. Damit wird

$$2nD \sin \theta \geq \lambda.$$

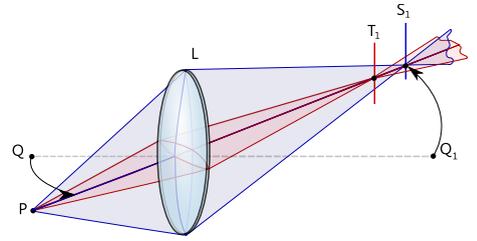


Abbildung 4.82: Astigmatismus.

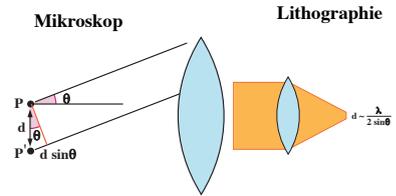


Abbildung 4.83: Grenze der Auflösung.

Für eine unendlich große Linse und sichtbares Licht würde man somit erhalten

$$2 \cdot 1.5D \geq 0.6 \mu\text{m}$$

oder  $D \geq 0.2 \mu\text{m}$ .

### 4.3.8 Das Auge

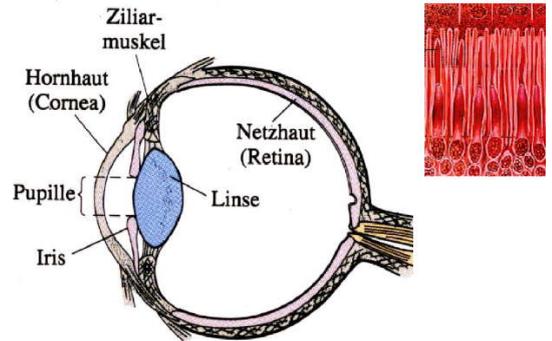


Abbildung 4.84: Das Auge.

Das Auge besteht aus einer Linse, welche das einfallende Licht auf die Netzhaut abbildet, wo es in Nervenimpulse umgewandelt wird. Die Brechkraft der Linse kann über einen gewissen Bereich variiert werden, so dass bei konstantem Bildabstand Objekte in unterschiedlicher Distanz scharf abgebildet werden können.

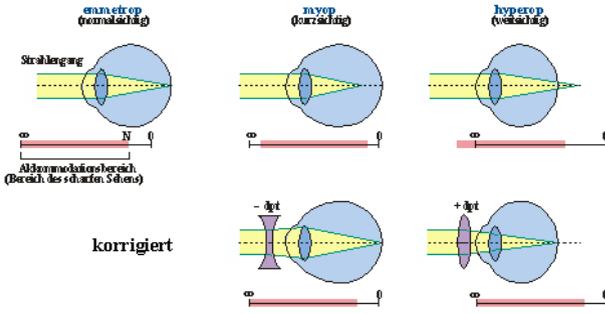


Abbildung 4.85: Korrektur verschiedener Fehlsichtigkeiten.

Im Falle von Kurzsichtigkeit ist die Brennweite zu kurz, d.h. das Bild entsteht im Inneren des Auges, und auf der Netzhaut erscheint deshalb ein verschwommenes Bild. In diesem Fall benötigt man eine Zerstreuungslinse für die Korrektur (negative Dioptrien). Im Falle der Weitsichtigkeit muss die Brennweite verkürzt werden. Die Brille besteht in diesem Fall aus Sammellinsen.

Es kommt vor, dass der Augapfel wächst und das Auge dadurch immer stärker kurzsichtig wird. Dies wird als progressive Myopie bezeichnet und kann Korrekturen um bis zu 15 Dioptrien erfordern.

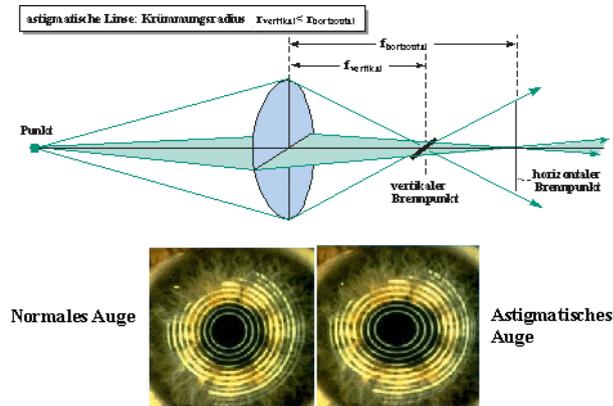


Abbildung 4.86: Astigmatismus im Auge.

Ein weiterer Fehler des Auges, der relativ häufig auftritt, ist Astigmatismus: Die vertikale und horizontale Krümmung und damit die Brechkraft des Auges (allgemein: einer Linse) sind unterschiedlich. Dann wird das Licht, das von einem Punkt stammt, nicht mehr auf einen Bildpunkt fokussiert, sondern auf zwei Linien in unterschiedlicher Distanz zueinander.

Je stärker der Astigmatismus, desto größer der Abstand der beiden Linien voneinander. Astigmatismus tritt bei Kleinkindern relativ häufig auf, geht dann aber meist zurück. Bei Erwachsenen tritt er vor allem zusammen mit Weit- oder Kurzsichtigkeit auf.

### 4.3.9 Lupe und Mikroskop

#### Lupe

Die Lupe kann als zusätzliche Linse vors Auge gehalten werden, so dass man Gegenstände betrachten kann, die sich näher beim Auge befinden. Die Vergrößerung wird somit primär durch die Verringerung des Objektabstandes erreicht. Mit blossen Auge kann man typischerweise bis auf eine Distanz von ca. 25 cm scharf sehen, mit einer Linse je nach Brennweite bis auf etwa 1 cm. Der Vergrößerungsfaktor ist gegeben als das Verhältnis der Längen, wie sie auf der Netzhaut erscheinen, und damit über das Verhältnis der Sehwinkel.

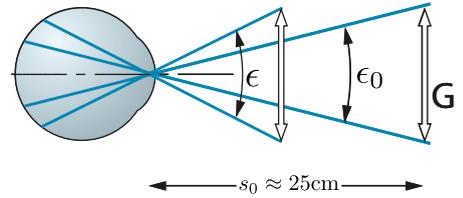


Abbildung 4.87: Definition des Vergrößerungsfaktors.

Der Vergrößerungsfaktor ist somit

$$s = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

Eine Lupe der Brennweite  $f$  erlaubt einem, den Abstand zum Gegenstand bis auf  $f$  zu reduzieren, anstelle des sonst möglichen minimalen Sehabstandes  $s_0 \approx 25$  cm. Damit vergrößert sie den Sehwinkel um den Faktor

$$s = \frac{s_0}{f}$$

#### Mikroskop

Das Mikroskop besteht aus einer Kombination von 2 Linsen. Die erste Linse, das Objektiv, erzeugt ein

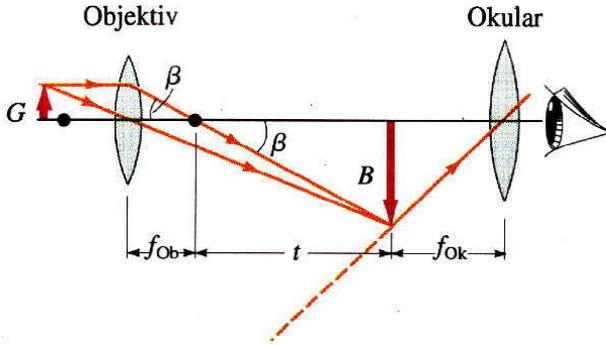


Abbildung 4.88: Mikroskop.

Zwischenbild, welches grösser ist als das Objekt. Für die Berechnung des Vergrößerungsfaktors machen wir die Näherung, dass die Tubuslänge  $t$  groß sei im Vergleich zur Brennweite  $f_{obj}$  des Objektivs. Dann wird der Vergrößerungsfaktor

$$v_{ZB} = \frac{t}{f_{obj}}$$

Eine zusätzliche Vergrößerung dieses Zwischenbildes erreicht man, indem man es nicht mit dem nackten Auge betrachtet, sondern mit einem Okular und damit wie bei einer Lupe einen geringeren Objektstand erreicht. Dadurch wird eine weitere Vergrößerung um den Faktor

$$v_O = \frac{s_O}{f_{ok}}$$

erreicht. Die gesamte Vergrößerung des Mikroskops ist damit

$$v_{Mic} = v_{ZB} v_O = \frac{t s_O}{f_{obj} f_{ok}}$$

### 4.3.10 Fernrohr

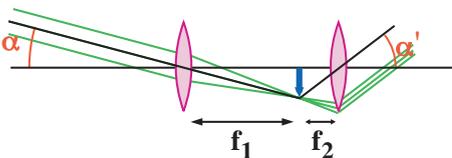


Abbildung 4.89: Fernrohr.

Der wesentliche Unterschied zwischen dem Fernrohr und dem Mikroskop besteht darin, dass beim

Fernrohr ein weit entferntes Objekt in ein Zwischenbild abgebildet wird. Damit ist  $v_{ZB}$  immer kleiner als 1, d.h. das Zwischenbild ist kleiner als das Objekt. Es ist aber auch näher als das Objekt und erscheint deshalb größer, sofern die Brennweite  $f$  des Objektivs größer ist als die entspannte Sehweite  $s_0$ . Betrachtet man das Zwischenbild mit einem Okular (einer Lupe) der Brennweite  $f_2$ , so erhält man insgesamt eine Vergrößerung von

$$v_F = \frac{f}{f_2}$$

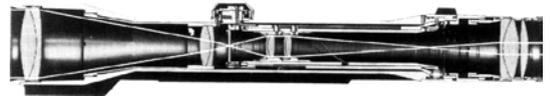


Abbildung 4.90: Terrestrisches Fernrohr mit Umkehroptik.

Das Objekt ist aber auch invertiert, d.h. es steht auf dem Kopf. Man kann dies auf verschiedene Weisen korrigieren. Beim Galilei-Fernrohr erreicht man dies, indem man als Okular eine Zerstreuungslinse verwendet, welche vor das Zwischenbild gesetzt wird. Alternativ verwendet man eine weitere Linse, welche ein zweites Zwischenbild erzeugt, das wieder aufrecht steht.

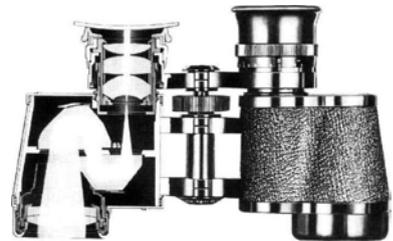


Abbildung 4.91: Prismenfeldstecher.

In einem Feldstecher korrigiert man das, indem man das Bild durch zwei Prismen nochmals invertiert. Diese falten gleichzeitig den Strahlengang, so dass auch relative große Distanzen zwischen Objektiv und Okular noch in ein handliches Gerät passen.

Die grössten Fernrohre werden in der Astronomie benutzt. Allerdings benutzt man dort nicht Linsen für die Abbildung. Diese wären zum einen zu groß

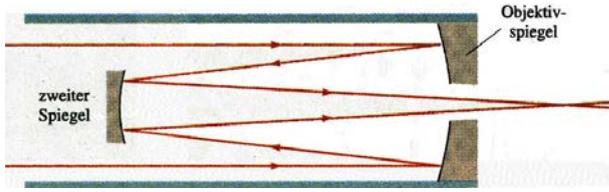


Abbildung 4.92: Spiegelteleskop.

und würden andererseits zu starke Abbildungsfehler, insbesondere chromatische Aberration erzeugen. Dies wird eliminiert indem man Spiegel verwendet: diese weisen keine chromatische Aberration auf, da die Wellenlänge beim Reflexionswinkel nicht auftaucht.

### 4.3.11 Brechung am Prisma

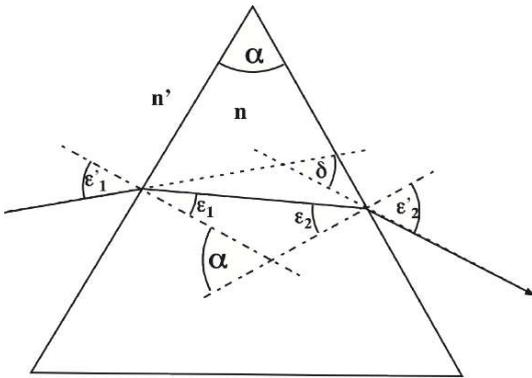


Abbildung 4.93: Strahlengang durch ein Prisma.

Wir betrachten einen Lichtstrahl, der durch ein Prisma mit Brechungsindex  $n$  und Winkel  $\alpha$  läuft. Er wird beim Eintritt und beim Austritt gebrochen. Der Ablenkwinkel  $\delta$  beträgt

$$\delta = \epsilon_1' + \epsilon_2' - \alpha.$$

Wir setzen hier  $n' = 1$ . Nach Snellius ist

$$\sin \epsilon_1' = n \sin \epsilon_1 \quad \sin \epsilon_2' = n \sin \epsilon_2.$$

Außerdem ist  $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \alpha$  und somit

$$\epsilon_2' = \sin^{-1}(n \sin \epsilon_2) = \sin^{-1}(n \sin(\alpha - \epsilon_1)).$$

Wir verwenden

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

um alle Variablen außer dem Einfallswinkel  $\epsilon_1'$  zu eliminieren:

$$\begin{aligned} \epsilon_2' &= \sin^{-1}[n(\sin \alpha \cos \epsilon_1 - \cos \alpha \sin \epsilon_1)] \\ &= \sin^{-1}[n(\sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \epsilon_1} - \cos \alpha \sin \epsilon_1)] \\ &= \sin^{-1}[\sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \epsilon_1'} - \cos \alpha \sin \epsilon_1']. \end{aligned}$$

Damit wird der Ablenkwinkel

$$\delta = \epsilon_1' - \alpha + \sin^{-1}[\sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \epsilon_1'} - \cos \alpha \sin \epsilon_1'].$$

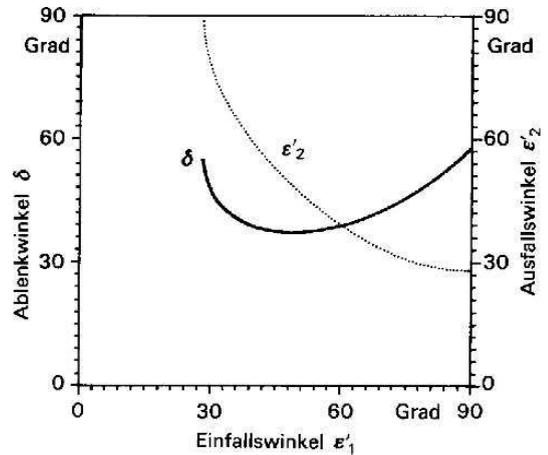


Abbildung 4.94: Ablenkwinkel als Funktion des Einfallswinkels.

Die Strahlablenkung  $\delta$  wird minimal, wenn der Eintrittswinkel gleich dem Austrittswinkel ist, d.h. für einen symmetrischen Strahlengang. Dann ist

$$\epsilon_1' = \epsilon_2' = \frac{1}{2}(\delta_{min} + \alpha).$$

Dann sind die Winkel im Inneren des Prismas ebenfalls gleich,

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\alpha}{2}.$$

Wir verwenden diese Beziehung mit dem Brechungsgesetz und erhalten den minimalen Ablenkwinkel als

$$\delta_{min} = 2 \sin^{-1}(n \sin \frac{\alpha}{2}).$$

Er nimmt somit mit dem Brechungsindex und mit dem Winkel  $\alpha$  zu.

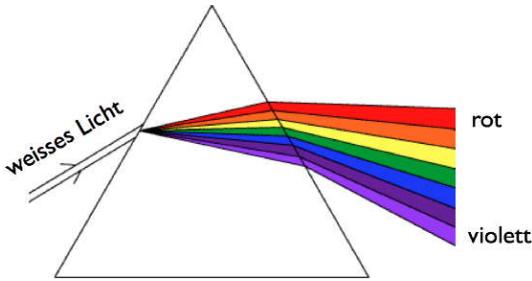


Abbildung 4.95: Dispersion am Prisma.

Ist der einfallende Lichtstrahl nicht eine einheitliche Farbe, so werden die einzelnen Komponenten unterschiedlich stark gebrochen. Violette Licht wird am stärksten gebrochen, Komponenten mit längerer Wellenlänge schwächer.

Prismen werden außerdem gerne verwendet für die Umlenkung von Strahlen, oder als Umkehrprismen zur Umkehrung von Bildern in Feldstechern.

### 4.3.12 Reflektive Optik

Bilder können nicht nur mit Linsen, sondern auch mit Spiegeln erzeugt werden.

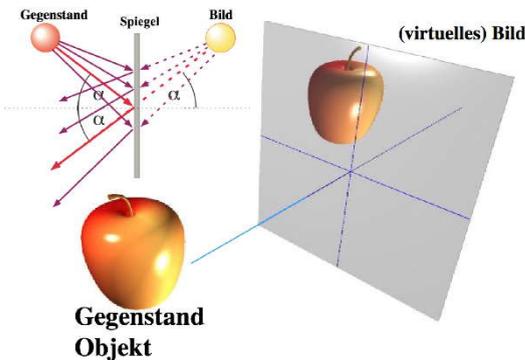


Abbildung 4.96: Bild in einem ebenen Spiegel.

Das einfachste Beispiel ist ein ebener Spiegel. Hier erzeugt die Reflexion ein virtuelles Bild hinter dem Spiegel.

Ein Parabolspiegel bildet parallele Strahlen in einen Brennpunkt ab. Im Gegensatz zu Linsen haben Spiegel keine Dispersion und damit auch keine chromatische Aberration. Parabolspiegel haben zudem keine

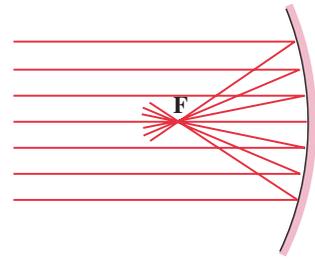


Abbildung 4.97: Parabolspiegel.

sphärische Aberration. Sie bilden alle Strahlen, die parallel zur Achse einfallen, in den Brennpunkt ab. Allerdings werden parallele Strahlen, die unter einem anderen Winkel einfallen, nicht in die gleiche Ebene abgebildet. Dies kann man leicht verstehen, wenn man berücksichtigt, dass die Krümmung für diese Strahlen geringer ist, als für die Strahlen parallel zur Achse.

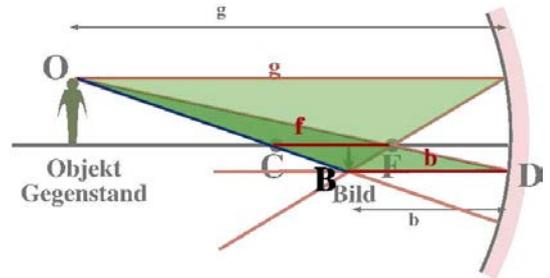


Abbildung 4.98: Bildentstehung bei einem sphärisch gekrümmten Spiegel.

Der Ort und Vergrößerungsfaktor eines Bildes lässt sich analog zum Fall einer Linse berechnen. Strahlen, die parallel zur Achse einfallen, werden durch den Brennpunkt reflektiert. Wenn wir den Spiegel als sphärischen Spiegel betrachten, werden Strahlen, die durch den Punkt C der Kugel laufen, in sich selbst reflektiert. Der Brennpunkt F befindet sich in der Mitte zwischen Kugelmittelpunkt C und Spiegeloberfläche.

Spiegel bilden die Basis aller Großteleskope. Die heute existierenden Teleskope mit Spiegeldurchmessern von 10 m und geplanten Teleskope mit Durchmessern bis 42 m müssen dabei so genau gefertigt werden, dass Verzerrungen im Betrieb aktiv ausgeglichen werden müssen.



Abbildung 4.99: Radioteleskop.

Dies gilt nicht nur für den optischen Bereich, sondern z.B. auch für die Radioastronomie oder für Satellitenfernsehen.

### 4.3.13 Elektronenoptik

Nicht nur die Ausbreitung von Licht kann mit Hilfe der Optik beschrieben werden. So können z.B. Elektronen oder Ionen sich im Vakuum wie Strahlen ausbreiten - nicht nur gradlinig, sondern sie können auch abgelenkt und fokussiert werden.

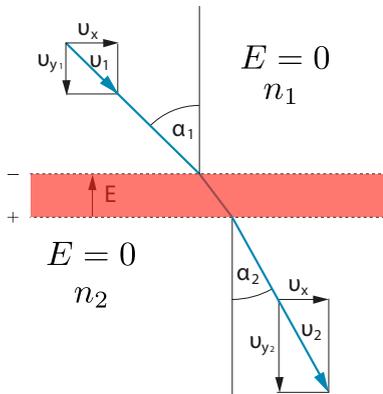


Abbildung 4.100: Brechung eines Elektronenstrahls an einer Beschleunigungsstrecke.

Eine brechende Grenzfläche kann man z.B. durch eine Beschleunigungsstrecke erreichen. Diese ändert die Geschwindigkeitskomponente in Feldrichtung, während die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht dazu nicht beeinflusst werden. Der Sinus des Einfallswinkels ändert sich somit von

$$\sin \alpha_1 = \frac{v_x}{v_1} \rightarrow \sin \alpha_2 = \frac{v_x}{v_2}.$$

Das Verhältnis zwischen den beiden beträgt

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Man kann somit den beiden Gebieten einen Brechungsindex zuordnen, welcher von den Potenzialen abhängt.

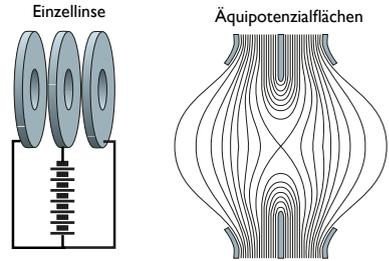


Abbildung 4.101: Elektronische Linse.

Über geeignete Potenzialverteilungen kann man somit z.B. Linsen aufbauen.

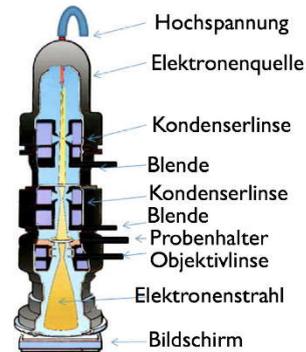


Abbildung 4.102: Elektronenmikroskop.

Damit baut man z.B. Elektronenmikroskope. Analog kann man die Ausbreitung von Ionen und Elektronen auch mit Magnetfeldern kontrollieren. Dies verwendet man z.B. bei Beschleunigern, wie z.B. DELTA.

### 4.3.14 Optik für ungeladene Teilchen

Während man bei geladenen Teilchen relativ leicht die Strahlen mit elektrischen und magnetischen Feldern ablenken kann, ist dies bei neutralen Teilchen, wie z.B. Atomen, nicht möglich. Trotzdem kann man Atomstrahlen fokussieren und ablenken, indem

man Laserstrahlen verwendet. Dabei wird, genau wie bei Elektronen, die Energie der Atome durch die Wechselwirkung mit dem Lichtfeld verändert, so dass z.B. ein Strahl abgelenkt oder beschleunigt werden kann. Dies ist jedoch vor allem in einem Bereich von Interesse, in dem auch die Welleneigenschaften der Atome wichtig sind. Wir werden es deshalb später diskutieren.

Licht kann nicht nur mit Hilfe von Linsen und Spiegeln umgelenkt werden, sondern auch mit Hilfe der Schwerkraft. Dies wurde bereits im Rahmen der klassischen Maxwell Theorie vorhergesagt. Einstein konnte dann aber im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie zeigen, dass der Effekt doppelt so groß sein sollte. Dies wurde erstmals 1919 während einer Sonnenfinsternis nachgewiesen.

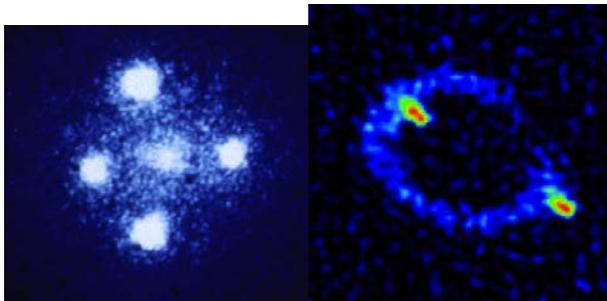


Abbildung 4.103: Effekte von Gravitationslinsen: Links ein Einsteinkreuz, rechts ein Einsteinring.

Schwere Astronomische Objekte, wie z.B. Galaxien, können außerdem als Linsen wirken und ferne Objekte auf mehrere Bilder oder Ringe abbilden.

#### Exp 044b: Optisches Modell einer Gravitationslinse

Dieser Effekt kann auch mit entsprechend geformten Linsen beobachtet werden, sie z.B. dem Fuß eines Weinglases.

## 4.4 Matrixformalismus für paraxiale Optik

Lit: Pedrotti & Pedrotti, Kap. 4

A. Gerrard, J.M. Burch: Introduction to matrix methods in optics

### 4.4.1 Paraxiale Optik

Wenn man die Eigenschaften eines optischen Gerätes verstehen will, muss man den Strahlengang durch sämtliche optischen Elemente verfolgen. Dies gilt für Laserstrahlen genau so wie für elektronische Strahlen. Wenn man dazu an jeder Oberfläche Richtung und Amplitude der reflektierten und transmittierten Welle ausrechnen muss, wird das ganze rasch unübersichtlich. Heute benutzt man dafür natürlich häufig Computerprogramme ('ray tracing'). Wenn es aber um das optimieren oder das detaillierte Verständnis eines Gerätes geht, sind analytische Lösungen immer vorteilhaft. Es ist deshalb nützlich, das Vorgehen möglichst zu vereinfachen und zu formalisieren. Ein nützlicher Zugang sind verschiedene Matrixformalismen, von denen hier aber nur der wichtigste vorgestellt werden soll.

Wir beschränken uns weiterhin auf axial symmetrische Systeme, wie z.B. ein Teleskop oder das Teleskopobjektiv einer Kamera, und betrachten nur Strahlen, die in einer Ebene mit der Achse des Systems liegen. Das erlaubt uns nur die Zeichenebene zu betrachten. Weiter betrachten wir nur Strahlen, die einen geringen Winkel zur optischen Achse aufweisen. Diese Näherung wird als paraxiale Näherung bezeichnet und erlaubt es, die Winkelfunktionen  $\sin \alpha$  und  $\tan \alpha$  durch den Winkel  $\alpha$  zu ersetzen.

Wir können nun jeden Strahl durch seine Position  $y$  und seine Steigung  $\alpha$  als Funktion der Ortskoordinate  $x$  darstellen.

Wir möchten nun den Strahlengang, also die Änderung von Position und Steigung durch das optische System berechnen.

### 4.4.2 Translation und Brechung

Zunächst betrachten wir die Änderungen im freien Raum. Offensichtlich gilt für zwei Punkte im Ab-

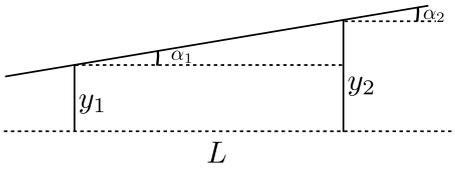


Abbildung 4.104: Ausbreitung im freien Raum.

stand  $L$

$$y_2 = y_1 + L \tan \alpha_1 \approx y_1 + L \alpha_1$$

$$\alpha_2 = \alpha_1.$$

Diese Beziehung können wir auch in Matrixschreibweise schreiben:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Die 2 mal 2 Matrix für die Ausbreitung im freien Raum wird Translationsmatrix genannt.

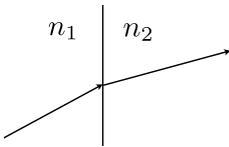


Abbildung 4.105: Brechung.

Bei der Brechung an einer ebenen Grenzfläche wird die Position nicht verändert, der Winkel (für kleine Einfallswinkel) gemäß dem Brechungsgesetz mit dem Verhältnis der Brechungsindizes multipliziert:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

### 4.4.3 Brechung an sphärischer Oberfläche

Wir betrachten jetzt einen Lichtstrahl, der im Abstand  $y$  von der Achse auf eine Grenzfläche auftrifft und an dieser gebrochen wird. Die Koordinaten des Lichtstrahl unmittelbar vor der Grenzfläche sind wieder  $y_1, \alpha_1$ . Die Position bleibt beim Durchgang durch die Grenzfläche gleich,

$$y_2 = y_1 = y.$$

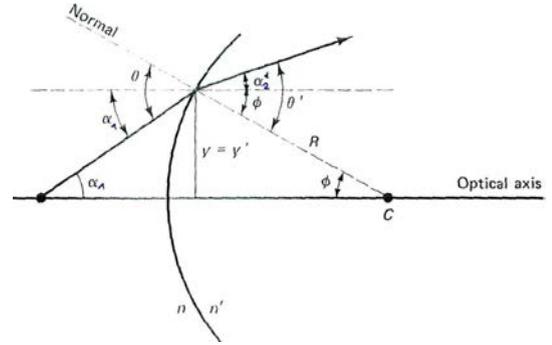


Abbildung 4.106: Brechung an Kugelfläche.

Die Richtung ist durch das Brechungsgesetz von Snellius gegeben, das in der paraxialen Form

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$$

lautet. Die Steigungen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sind durch folgende Beziehungen gegeben:

$$\alpha_2 = \theta_2 - \varphi = \theta_2 - \frac{y}{R}$$

$$\alpha_1 = \theta_1 - \varphi = \theta_1 - \frac{y}{R}.$$

Mit dem Brechungsgesetz wird daraus

$$\alpha_2 = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 - \frac{y}{R} = \frac{n_1}{n_2} \left( \alpha_1 + \frac{y}{R} \right) - \frac{y}{R}$$

$$= \frac{y}{R} \left( \frac{n_1}{n_2} - 1 \right) + \frac{n_1}{n_2} \alpha_1.$$

Die Matrixform für die Brechung an der sphärischen Oberfläche ist demnach

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \left( \frac{n_1}{n_2} - 1 \right) & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

### 4.4.4 Linsen

Wir kombinieren nun zwei sphärische Oberflächen zu einer Linse. Die Matrizen für die beiden Oberflächen bezeichnen wir als  $B_1$  und  $B_2$ , die Translationsmatrix mit  $T$ . Dann ist der Strahl am Ausgang gegeben durch

$$\begin{pmatrix} y_4 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = B_2 \begin{pmatrix} y_3 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = B_2 T B_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$= S \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

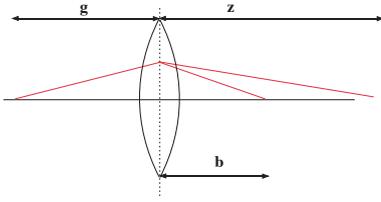


Abbildung 4.107: Linse mit 2 sphärischen Oberflächen.

Dabei ist die Systemmatrix  $S$  gegeben durch  $S = B_2 T B_1$ , also als Produkt der drei einzelnen Matrizen. Wir beschränken uns auf eine dünne Linse ( $L \rightarrow 0$ ) und nehmen an, dass sich auf beiden Seiten der Linse das gleiche Material mit Brechungsindex  $n_1$  befindet:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_1} \left( \frac{n_1}{n_2} - 1 \right) & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}.$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_1} \left( \frac{n_1}{n_2} - 1 \right) + \frac{1}{R_2} \left( 1 - \frac{n_1}{n_2} \right) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix},$$

mit der Brennweite  $f$  der Linse definiert durch

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

in Übereinstimmung mit der vorherigen Herleitung.

Dieses Resultat erlaubt uns nun, den Effekt der Linse auf beliebige Strahlen zu berechnen. Man kann aus der Systemmatrix auch einige Eigenschaften des optischen Systems sehr direkt ablesen: Die erste Zeile besagt, dass der austretende Strahl den gleichen Achsenabstand hat wie der eintretende Strahl, unabhängig von seiner Steigung. Diese ist offensichtlich eine direkte Konsequenz der Annahme einer dünnen Linse.

Die zweite Zeile sagt, dass die Steigung

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{y_1}{f}$$

des austretenden Strahls gegenüber derjenigen des eintretenden Strahls  $\alpha_1$  um  $y/f$ , also das Verhältnis von Achsenabstand zu Brennweite reduziert wird.

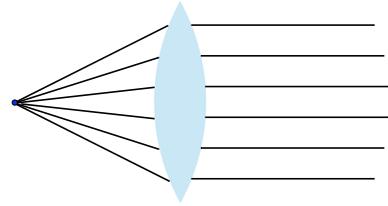


Abbildung 4.108: Kollimation.

Wir können nun z.B. fragen, welche Strahlen hier horizontal sind, d.h.  $\alpha_2 = 0$ . Wir erhalten

$$\alpha_1 - \frac{y}{f} = 0.$$

Somit werden Strahlen, die aus dem vorderen Brennpunkt kommen ( $y = f\alpha_1$ ) in horizontale Strahlen abgebildet.

#### 4.4.5 Interpretation einer Systemmatrix

Auf diese Weise kann man offenbar beliebig komplexe optische Systeme berechnen, solange die Voraussetzungen für die Herleitung erfüllt sind. Natürlich lernt man mit der Systemmatrix nichts über den Strahlengang im System selbst, doch kann für jeden Strahl der Gesamteffekt sehr rasch gefunden werden.

Als weiteres Beispiel, das die Bedeutung der Systemmatrix illustrieren soll, betrachten wir ein einfaches optische System, das aus einer Linse und einer freien Strecke besteht, dessen Länge gerade gleich der Brennweite  $f$  der Linse sei.

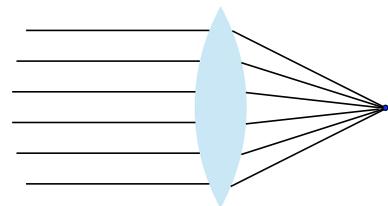


Abbildung 4.109: Fokussierung.

Die Gesamtmatrix ist

$$S = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Null an der ersten Stelle zeigt, dass die Position, d.h. der Achsenabstand eines Strahls in der Brennebene (am Ausgang dieses einfachen Systems) nicht von seinem Achsenabstand vor der Linse abhängt. Für alle Strahlen beträgt er  $f\alpha_1$ . Parallele Strahlen, d.h. Strahlen mit der gleichen Steigung  $\alpha_1$  werden somit in der Brennebene auf einen Punkt abgebildet; für horizontal einfallende Strahlen liegt dieser Punkt auf der optischen Achse.

## 4.5 Interferenz

### 4.5.1 Linearität für Felder, nicht für Intensitäten

Wie mehrfach betont sind die Maxwell Gleichungen oder auch andere Wellengleichungen lineare Gleichungen (sofern die Materialgleichungen auch linear sind). Verschiedene Wellen beeinflussen sich deshalb nicht. Allerdings beobachtet man in den meisten Fällen nicht die Felder selbst, sondern die Intensität oder Leistung einer Welle. Diese sind proportional zum Quadrat des Feldes,

$$s \propto |E|^2.$$

Man bezeichnet sie deshalb als quadratische Detektoren. Praktisch alle Detektoren funktionieren nach diesem Prinzip, so z.B. auch das menschliche Auge, Halbleiterdetektoren oder fotografische Filme.

Die Maxwellgleichungen beschreiben somit nicht direkt die gemessene Größe; für diese, also für die Intensität, ist die Physik nicht linear. Damit haben wir eine weitere Grenze der geometrischen Optik erreicht, welche davon ausgeht, dass einzelne Strahlen voneinander unabhängig sind.

Wenn zwei Felder  $A$  und  $B$  auf einen Detektor fallen, so misst dieser das Quadrat der Summe, d.h. das Signal ist proportional zu

$$s \propto (A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB.$$

Im Signal sehen wir somit nicht einfach die Summe der beiden Teilsignale ( $= A^2 + B^2$ ), sondern es enthält einen zusätzlichen Term  $2AB$ , der als Interferenzterm bezeichnet wird.

### 4.5.2 Der Interferenzterm

Für komplexe Amplituden müssen wir zusätzlich die relative Phase der beiden Wellen berücksichtigen. Das Signal ist in diesem Fall proportional zum Absolutquadrat der Gesamtwellen, d.h.

$$\begin{aligned} s &\propto |A + B|^2 = (A + B)(A + B)^* \\ &= AA^* + AB^* + A^*B + BB^* \\ &= |A|^2 + |B|^2 + 2\Re\{AB^*\}. \end{aligned}$$

Der Interferenzterm kann auch geschrieben werden als

$$2\Re\{AB^*\} = 2|AB| \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

wobei  $\varphi_{1,2}$  die Phasen der einzelnen Wellen darstellen.

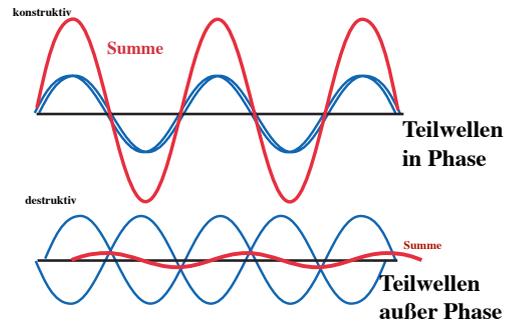


Abbildung 4.110: Amplitude der Summenwelle .

Die Interferenz wird somit maximal, wenn die beiden Phasen identisch sind. Man spricht dann von konstruktiver Interferenz. Unterscheiden sich die beiden Phasen um  $\pi$ , so wird der Signalbeitrag negativ und man spricht von destruktiver Interferenz. Die Interferenz verschwindet, wenn die beiden Wellen um  $\pi/2$  außer Phase sind.

Für gleich starke Felder,  $A = B$  wird die kombinierte Intensität als Funktion der Phasendifferenz; für einige Winkel ist dies in Tabelle 4.3 zusammengestellt.

Neben der Phasenlage muss auch die Polarisation der beiden Felder übereinstimmen: Sind die beiden Felder z.B.  $x$ , resp.  $y$ -polarisiert, so entsteht keine Interferenz. Das gleiche gilt für unpolarisiertes Licht.

$\varphi_1 - \varphi_2$	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
s	$4 A ^2$	$2 A ^2$	0	$2 A ^2$	$4 A ^2$
Interferenz	konstruktiv	0	destruktiv	0	konstruktiv

Tabelle 4.3: Signal und Interferenz als Funktion der Phasendifferenz.

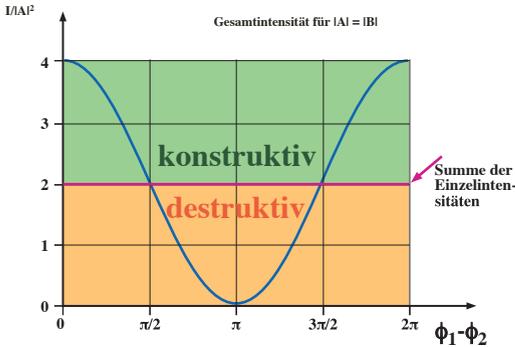


Abbildung 4.111: Intensität als Funktion der Phasendifferenz zwischen den beiden Wellen.

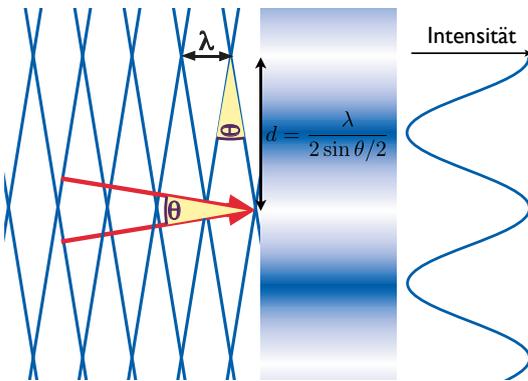


Abbildung 4.112: Interferenz von 2 ebenen Wellen.

### 4.5.3 Interferenz von 2 ebenen Wellen

Wir können solche Interferenzeffekte untersuchen, wenn wir zwei Laserstrahlen überlagern. Die beiden Strahlen können näherungsweise als ebene Wellen betrachtet werden. Genauer betrachten wir zwei ebene Wellen, die unter einem kleinen Winkel  $\theta$  auf einen Schirm fallen.

Die beiden Felder verstärken sich gegenseitig, wenn sie in Phase sind und interferieren destruktiv, wenn sie außer Phase sind. Dies geschieht jeweils entlang

einer Geraden senkrecht zum Schirm. Der Abstand zwischen zwei solchen Geraden ist offenbar

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta/2}.$$

Der Abstand wird also um so größer, je kleiner der Winkel wird. Für parallele Strahlen verschwindet die Ortsabhängigkeit, für gegenläufige Strahlen erreicht der Abstand sein Minimum bei der halben Wellenlänge.

Man beobachtet je nach Phasenlage konstruktive oder destruktive Interferenz in der Form von dunklen und hellen Streifen.

Der Winkel zwischen den beiden Strahlen kann z.B. dadurch erzeugt werden, dass man einen Laserstrahl unter streifendem Einfall auf einen geteilten Spiegel fallen läßt, dessen eine Hälfte beweglich ist.

### 4.5.4 Zweistrahlinterferenz an dünnen Schichten

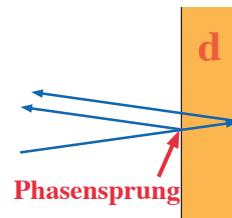


Abbildung 4.113: Zweistrahlinterferenz an einer dünnen Schicht.

Wenn Licht an einer planparallelen Platte reflektiert wird, so erhält man je einen Reflex von der Vorder- und der Rückseite. Diese beiden reflektierten Wellen stammen von der gleichen Welle und können deshalb interferieren.

Man kann dies benutzen, um Reflexionen zu eliminieren. Wir betrachten als Beispiel eine Glasober-

fläche mit Brechungsindex  $n = 1.5$ . Monochromatisches Licht der Wellenlänge  $\lambda$  soll senkrecht auf diese Oberfläche auftreffen. Normalerweise erhält man von der Oberfläche eine Reflexion von etwa 4% des Lichtes.

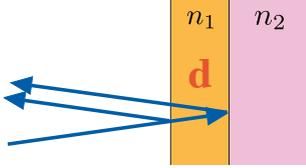


Abbildung 4.114: Zweistrahlinterferenz an einer dünnen Schicht.

Wir berechnen nun die resultierende Reflexion, wenn wir auf diese Oberfläche eine Schicht der Dicke  $d$  mit dem Brechungsindex  $n_1$  aufbringen. Wir haben dann zwei Grenzflächen, eine zwischen Luft ( $n_0 = 1$ ) und  $n_1$  und die andere von  $n_1$  nach  $n_2$ . Die Reflektivität der ersten Grenzfläche ist

$$\frac{E^{(r_1)}}{E^{(i)}} = \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1}.$$

Wir nehmen weiterhin an, dass die transmittierte Welle nicht wesentlich abgeschwächt ist, so dass die zweite reflektierte Teilwelle als

$$\frac{E^{(r_2)}}{E^{(i)}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}.$$

geschrieben werden kann. Die zweite Teilwelle hat dabei eine zusätzliche optische Weglänge von  $2n_1d$  und dadurch eine Phasenverzögerung um

$$\delta\varphi = 4\pi n_1 \frac{d}{\lambda_0},$$

wobei  $\lambda_0$  die Vakuum-Wellenlänge darstellt.

Diese Summe der beiden Teilwellen ist

$$E^{(r_1)} + E^{(r_2)} = E^{(i)} \left( \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} + \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} e^{i\delta\varphi} \right).$$

Wir suchen jetzt eine Lösung, bei der destruktive Interferenz zwischen den beiden Teilwellen dazu führt, dass diese Summe verschwindet. Damit dies der Fall ist, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

1. Der zweite Term muss reell und negativ sein, d.h. der Phasenfaktor  $e^{i\delta\varphi} = -1$  oder

$$d = \frac{\lambda_0}{4n_1}.$$

Man spricht deshalb von einer  $\lambda/4$  Beschichtung.

2. Der Betrag der beiden Terme muss gleich sein,

$$\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}.$$

Dies können wir schreiben als

$$\begin{aligned} (n_1 - 1)(n_2 + n_1) &= (n_1 + 1)(n_2 - n_1) \\ n_1 n_2 + n_1^2 - n_2 - n_1 &= n_1 n_2 - n_1^2 + n_2 - n_1 \\ n_1 &= \sqrt{n_2}. \end{aligned}$$

Die reflektierte Feldstärke verschwindet somit genau dann, wenn

$$n_1 = \sqrt{n_2} \quad \text{und} \quad d = \frac{\lambda}{4n_1}.$$

### Exp.: Interferenz an einer Seifenlamelle

Eine solche dünne Schicht kann man z.B. sehr gut durch eine Seifenhaut darstellen. Da die Interferenzbedingung von der Wellenlänge abhängt wird sie nicht für alle Farben des Spektrums gleichzeitig erfüllt. Dieser Fall unterscheidet sich allerdings leicht vom Fall der Entspiegelungsschicht: da hier das dritte Medium einen kleineren Brechungsindex aufweist als die dünne Seifenhaut, besteht zwischen den beiden reflektierten Wellen eine zusätzlich Phasendifferenz von 180 Grad, d.h. für senkrechten Einfall wird die Phasendifferenz zu

$$\delta\varphi = \pi + 4\pi n_1 \frac{d}{\lambda_0},$$

Außerdem ist die Dicke der Seifenhaut nicht überall gleich: Die Schwerkraft zieht die Lösung nach unten und führt deshalb zu einer Abfolge von Interferenzstreifen.

Eine andere Anwendung sind die sog. Newton'schen Ringe: Sie ergeben sich durch Zweistrahlinterferenz wenn man eine Linse auf einen ebenen Spiegel legt.



Abbildung 4.115: Interferenz an einer Seifenlamelle erzeugt farbige Streifen.

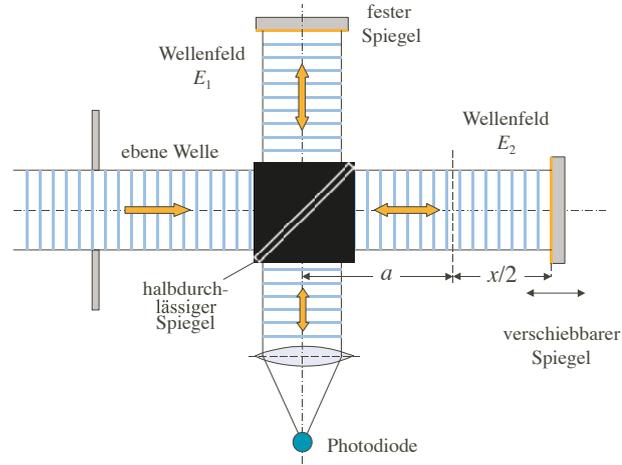


Abbildung 4.117: Michelson-Interferometer.

am Eingang  $E_0$ , so sind die beiden Teilwellen

$$E_1 = E_2 = E_0 \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nach Reflexion an einem Spiegel werden sie auf dem gleichen Strahlteiler wieder kombiniert zu

$$E_1 e^{ik2\ell_1} + E_2 e^{ik2\ell_2} = E_0 \frac{1}{2} \left( e^{ik2\ell_1} + e^{ik2\ell_2} \right).$$

Diese Welle wird auf dem vierten Ausgang auf einen Detektor fokussiert. Das Signal ist dann

$$I \propto |E_0|^2 \frac{1}{2} (1 + \cos(2k(\ell_1 - \ell_2))).$$

Haben beide Strahlen den gleichen optischen Weg zurückgelegt,  $\ell_1 = \ell_2$ , so beobachtet man konstruktive Interferenz: das gesamte Licht wird transmittiert. Ist der Wegunterschied gerade gleich der halben Wellenlänge, so beobachtet man destruktive Interferenz: es wird kein Licht transmittiert, das gesamte einfallende Feld wird reflektiert.

Bei diesem Interferometer kann die Länge des einen Arms durchgeföhren werden. Je nach Weglängenunterschied beobachtet man konstruktive oder destruktive Interferenz, d.h. hell oder dunkel.

Heute werden solche Geräte vor allem für die exakte Messung von Weglängenunterschieden und zur Messung von Brechungsindexänderungen verwendet. Dabei stellt man die zu untersuchende Probe in

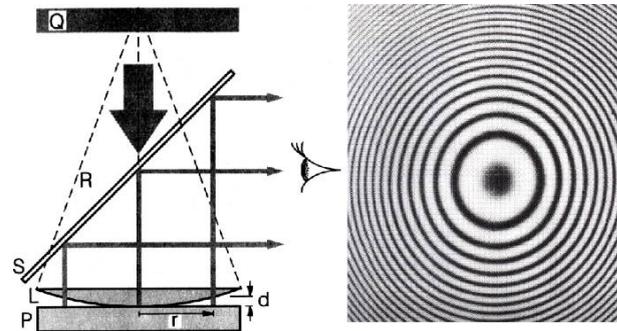


Abbildung 4.116: Newton'sche Ringe. Links ist das Messprinzip dargestellt, rechts ein Beispiel.

Immer wenn die Dicke des Luftspaltes um  $\lambda/2$  zunimmt, erhalten wir einen zusätzlichen Interferenzring. Solche Muster werden z.B. zur Qualitätssicherung verwendet, da man sehr genau die Oberfläche ausmessen kann. Bei einer sphärischen Linse nimmt der Luftspalt quadratisch mit dem Abstand vom Auflagepunkt zu. Der Abstand zwischen den dunklen Ringen nimmt deshalb invers mit dem Abstand ab.

### 4.5.5 Michelson Interferometer

Wahrscheinlich das bekannteste optische Interferometer ist das Michelson Interferometer. Dieses System wurde von Michelson und Morley zur Messung der Lichtgeschwindigkeit verwendet. Dabei wird ein Lichtstrahl an einem Strahlteiler in zwei Teile aufgeteilt, die zwei unterschiedliche Wege durchlaufen.

Wir betrachten ideale ebene Wellen. Beträgt das Feld

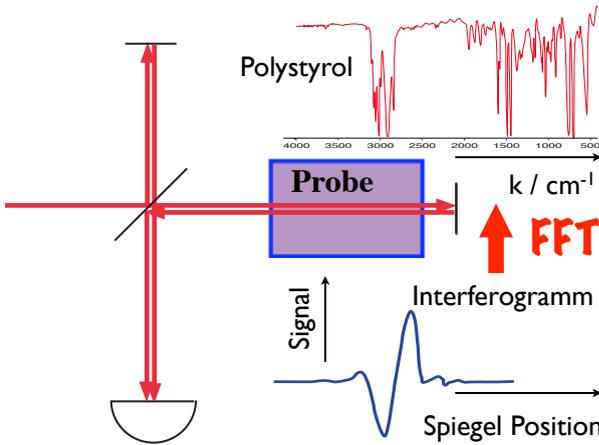


Abbildung 4.118: Michelson-Interferometer als Spektrometer.

einen der Arme. Das resultierende Signal als Funktion der Weglängendifferenz,  $I(\ell_1 - \ell_2)$ , wird Fourier-transformiert und liefert auf diese Weise das Spektrum

$$s(k) = \mathcal{F}\{I(\ell_1 - \ell_2)\} \propto I(v).$$

Die größten Michelson-Interferometer weisen eine Armlänge von mehreren km auf und sollen für den Nachweis von Gravitationswellen verwendet werden. Solche Geräte wurden in mehreren Ländern gebaut, z.B. GEO600 zwischen Hannover und Hildesheim, VIRGO in Italien oder LIGO in den USA. Damit können relative Längenänderungen von etwa

$$\frac{\delta\ell}{\ell} \approx 10^{-22}$$

detektiert werden. Das bedeutet auf die Armlänge von etwa 3 km bezogen eine Längenänderung um weniger als ein Promill eines Atomkerndurchmessers.

#### 4.5.6 Mach-Zehnder Interferometer

Ein anders wichtiges Gerät ist der Mach-Zehnder Interferometer. Der wesentliche Unterschied ist der, dass die Aufteilung und Rekombination der beiden Teilstrahlen auf unterschiedlichen halbdurchlässigen Spiegeln geschieht.

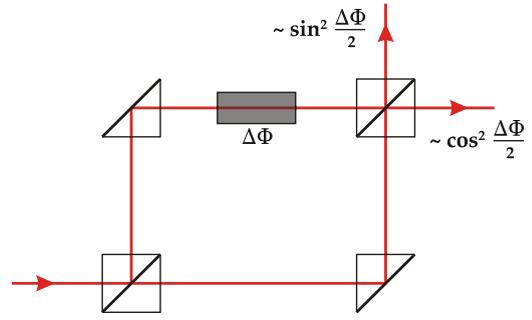


Abbildung 4.119: Mach-Zehnder Interferometer.

Wir betrachten wiederum ideale ebene Wellen. Sind die beiden Arme gleich lang, so interferieren die beiden Strahlen konstruktiv am rechten Ausgang und destruktiv am oberen Ausgang. Sind die beiden Arme ungleich lang, so führt dies zu einem Phasenunterschied

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta\ell}{\lambda} 2\pi.$$

Sind beide Strahlteiler symmetrisch, d.h. sie teilen die Strahlen im Verhältnis 50:50, so addieren sich die Felder im rechten Ausgang zu

$$E^{(r)} = E^{(i)} \cos(\Delta\varphi)$$

und im oberen Ausgang zu

$$E^{(o)} = E^{(i)} \sin(\Delta\varphi).$$

Die entsprechenden Intensitäten sind

$$I^{(r)} \propto \cos^2(\Delta\varphi) \quad I^{(o)} \propto \sin^2(\Delta\varphi).$$

Grundsätzlich können mit dem Mach-Zehnder Interferometer die gleichen Messungen durchgeführt werden, wie mit dem Michelson Interferometer. Weil die beiden Strahlen eine Fläche umschließen gibt es hier noch weitere Möglichkeiten: Dreht man ein Mach-Zehnder Interferometer, so ändert das den Unterschied in den Armlängen, da ein Strahl mit dem Drehsinn umläuft, der andere dagegen. Aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit folgt, dass die beiden Strahlen nicht mehr gleich lange brauchen. Diesen Effekt bezeichnet man als Sagnac-Effekt. Man verwendet ihn in Rotations-Sensoren.

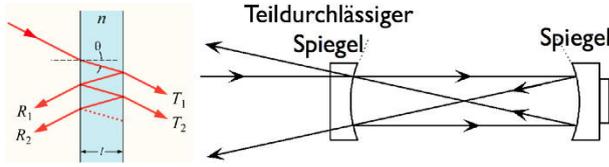


Abbildung 4.120: Prinzip des Fabry-Perot Interferometes; links: Etalon; rechts: konfokales.

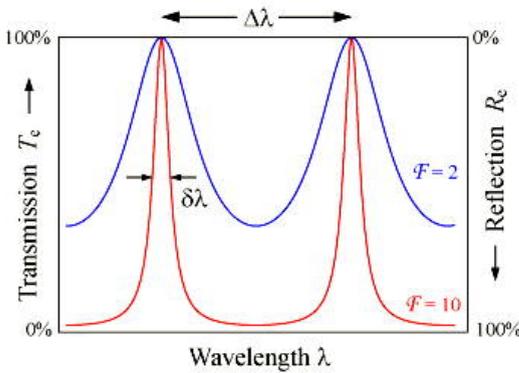


Abbildung 4.121: Transmissionsmaxima eines Fabry-Perot Interferometers (Airy-Peaks) für 2 unterschiedliche Reflektivitäten.

### 4.5.7 Fabry-Perot Interferometer

Ein weiterer häufig verwendeter Typ ist das Fabry-Perot Interferometer. Während die beiden ersten Typen jeweils eine Zweistrahlinterferenz erzeugen, nutzt der Fabry-Perot Typ eine Vielstrahlinterferenz: das transmittierte Signal ist

$$E_t = \sum_i E_{ti}$$

Hier stellt  $E_{t1}$  das Signal dar, welches ohne Reflexion direkt transmittiert wurde,  $E_{t2}$  wurde an beiden Flächen je einmal reflektiert,  $E_{t3}$  zweimal etc.. Diese Felder interferieren konstruktiv, wenn die Weglängendifferenz, also  $2dn$  gerade ein Vielfaches der optischen Wellenlänge beträgt,

$$2d = k \frac{\lambda_0}{n}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Die Bedingung für konstruktive Interferenz und damit maximale Transmission im Fabry-Perot Interfe-

rometer lautet also, dass die Länge des Interferometers ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge sei. Man verwendet einerseits Fabry-Perot Etalons, also im Wesentlichen Glasplatten, mit einer Dicke von wenigen mm, oder Resonatoren aus gekrümmten 2 Spiegeln mit Längen im Bereich von einigen cm. In diesem Fall beträgt die Ordnung  $k$  etwa  $10^5$ .

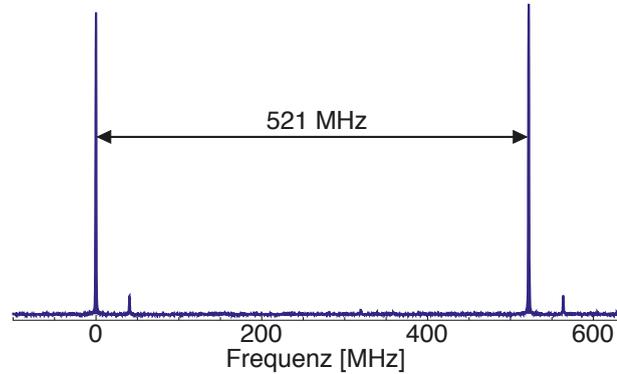


Abbildung 4.122: Detektiertes Signal hinter einem Fabry-Perot Interferometer.

Wenn man die Resonatorlänge verändert, so kann Licht durch den Resonator durchlaufen wenn diese Resonanzbedingung erfüllt ist. Abb. 4.122 zeigt als Beispiel das transmittierte Signal eines Fabry-Perot Interferometers mit einer Länge von 30 cm. Der Abstand zwischen zwei Moden beträgt deshalb

$$\delta\nu = \frac{c}{2d} = \frac{3 \cdot 10^8}{0.6} \text{ s}^{-1} = 500 \text{ MHz.}$$

Die Breite einer einzelnen Transmissionsmode ist rund 560 kHz. Das bedeutet, dass das Licht rund 100 mal zwischen den beiden Spiegeln reflektiert wird.

### 4.5.8 Vielstrahlinterferenz

Vielstrahlinterferenz erhält man z.B. am Beugungsgitter, also an einer regelmäßigen Anordnung von Drähten oder Spalten. Als Modell dafür betrachten wir  $n$  gleiche Quellen, die sich auf einer Geraden befinden. Sie sollen die gleiche Frequenz haben. Wir betrachten das resultierende Intensitätsmuster in einer Richtung, die durch den Winkel  $\varphi$  gegenüber der Normalen gegeben sei, in einer Distanz, welche groß

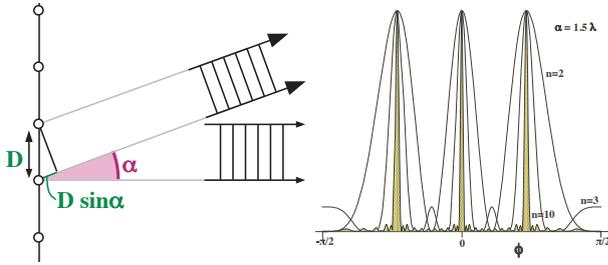


Abbildung 4.123: n identische Punktquellen.

ist im Vergleich zu den Abständen zwischen den Quellen. Die Weglängendifferenz in diese Richtung zwischen den Beiträgen zweier benachbarter Quellen beträgt

$$\Delta = a \sin \varphi.$$

Sind alle Quellen in Phase, so führt diese Weglängendifferenz beim Beobachter zu einer Phasendifferenz zwischen dem Beitrag benachbarter Quellen von

$$\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi a \sin \varphi}{\lambda}.$$

Wir suchen nun die Bedingung, dass die verschiedenen Beiträge konstruktiv interferieren. Dies ist offenbar dann der Fall, wenn  $\delta$  ein Vielfaches von  $2\pi$  ist, d.h. wenn

$$\delta = \frac{2\pi a \sin \varphi}{\lambda} = 2\pi m,$$

d.h. wenn

$$a \sin \varphi = m\lambda$$

oder

$$\sin \varphi = \frac{m\lambda}{a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

In diese Richtungen erhalten wir eine maximale Abstrahlung. Für den Fall von  $n = 2$  Quellen variiert die Intensität zwischen den beiden Maxima sinusförmig; Für  $n$  Quellen addieren sich  $n$  Cosinusfunktionen zur Amplitude

$$A(\sin \varphi) = \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\delta).$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, ist das Resultat proportional zu  $n$ , wenn die obige Bedingung für konstruktive Interferenz erfüllt ist. Das Resultat ist offenbar einfach eine Fourierreihe, deren Koeffizienten  $a_k$  durch die Amplituden der einzelnen Quellen gegeben sind. Wir betrachten hier zunächst identische Amplituden,  $a_k = a_0$ .

Zwischen den Interferenzmaxima nähert sich die Kurve der Nulllinie. Da die Interferenz nur in eine Richtung konstruktiv ist, erreicht man auf diese Weise eine Richtungsabhängigkeit der abgestrahlten Welle. Je größer die Anzahl der beteiligten Wellen, desto stärker die Richtungsabhängigkeit.

Die Richtung, in die konstruktive Interferenz auftritt, ist durch die obige Bedingung, aber auch durch die Phase der Quellen bestimmt. Indem man die Phase der einzelnen Quellen verschiebt, kann man die Richtung des Interferenzmaximums steuern. Der allgemeinste Fall ergibt sich, wenn die Quellen unterschiedliche Amplituden und Phasen  $A_k, \varphi_k$  besitzen. Die resultierende Amplitude wird dann

$$A(\sin \varphi) = \sum_{k=1}^n e^{i2\pi k a \sin(\varphi)/\lambda} A_k e^{i\varphi_k}.$$

Diese Amplitude ist offenbar gerade die diskrete Fouriertransformierte der Quellenfunktion. Diese Aussage bleibt gültig auch wenn wir vom diskreten Fall zu einem kontinuierlichen Fall übergehen.

#### 4.5.9 Strahlsteuerung

Ein einfacher Fall liegt dann vor, wenn zwischen benachbarten Quellen eine Phasendifferenz von  $\alpha$  geschaltet wird. Dann verschiebt sich die Interferenzbedingung zu

$$a \sin \varphi - \alpha = m\lambda.$$

Damit kann man die Abstrahlrichtung verschieben.

In diesem Beispiel wurde die Phasendifferenz  $\alpha$  zu  $\pi/2$  gewählt. Dadurch verschiebt sich die Lage der Interferenzmaxima um

$$\frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4}$$

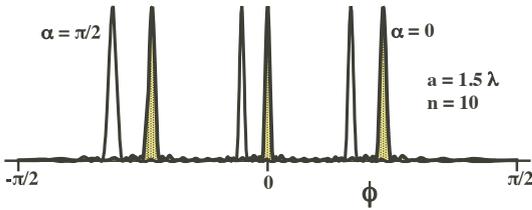


Abbildung 4.124: Intensität als Funktion der Richtung bei Phasendifferenz 0 und  $\pi/2$ .

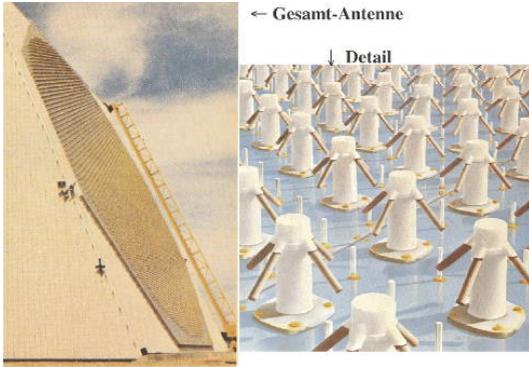


Abbildung 4.125: "Phased array" Radarantenne (Sci. Am., Feb. 1985).

des Abstandes der Maxima.

Diese Möglichkeit wird z.B. beim medizinischen Ultraschall oder beim Radar verwendet. Man kann Radarstrahlen in bestimmte Richtungen abstrahlen, die durch die relative Phase zwischen einer großen Zahl von kleinen Antennen festgelegt sind.

Man kann die Fourierreihe auch als Summe in der komplexen Ebene betrachten. Die Phasendifferenz  $\varphi$  erscheint hier als Polarwinkel zwischen benachbarten Strahlen. Diese Summe hat bei  $\varphi = 0$  und den andern genannten Richtungen den maximalen Wert  $n$ . Für andere Richtungen ist der Wert geringer und wird für eine große Zahl von Quellen eine Zahl nahe bei Null an. Dies erklärt, warum die Breite der Maxima mit zunehmender Zahl von Quellen abnimmt: Die Intensität fällt dann zum ersten Mal auf 0, wenn der Weglängenunterschied zwischen 2 von  $n$  Quellen gerade  $= \lambda/n$  beträgt, da dann die destruktive Interferenz vollständig ist.

Diese Summierung von komplexen Zahlen erklärt

auch das Prinzip von Fermat: wenn der Weg der Lichtstrahlen in der Nähe eines Extremums liegt, so ändert sich die Weglänge und damit die Phase nur wenig. Benachbarte Wege interferieren deshalb konstruktiv.

#### 4.5.10 Kohärenz

Wir haben bisher angenommen, dass die verschiedenen Lichtquellen eine konstante Phasendifferenz (die gleich null sein kann) besitzen. Dies ist eine zwingende Voraussetzung dafür, dass Interferenz vollständig ist. In der Praxis treten aber ideale ebene Wellen nicht auf, es gibt immer Abweichungen davon. Diese Abweichung wird über die Kohärenz quantifiziert.

Die Phase einer optischen Lichtquelle kann zeitlich und räumlich variieren. Man quantifiziert die Phasenkonstanz sowohl bezüglich ihres räumlichen wie auch ihres zeitlichen Verhaltens und bezeichnet diese als Kohärenz. Eine zeitlich kohärente Lichtquelle ist per Definitionem monochromatisch. Diese Bedingung wird für keine Lichtquelle absolut erfüllt.

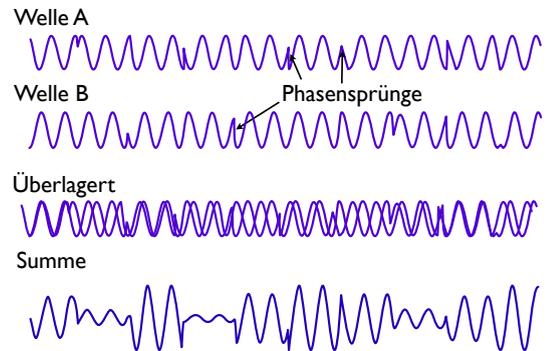


Abbildung 4.126: Kohärenzlänge eines Wellenzuges.

Eine thermische Lichtquelle hat vollständig zufällige Phasen, während ein Laser über eine gewisse Zeit konstante Phasen aufweist. Für einen kommerziellen Laser liegt diese Zeit bei etwa einer  $\mu\text{s}$ , bei einem hochgezüchteten Forschungsgerät kann sie bis auf etwa eine Sekunde verlängert werden. Man kann solche Kohärenzzeiten praktisch nur messen, indem man die Phasen von zwei unabhängigen Lasersystemen vergleicht.

Licht	Bandbreite	Kohärenzlänge
“weisses Licht”	200 THz	1.5 $\mu\text{m}$
Spektrallampe	1.5 GHz	20 cm
Halbleiterlaser	10 MHz	30 m
HeNe Laser, stab.	150 kHz	2 km
stab. Laser	1 Hz	300000 km

zeitliche Kohärenz

räumliche Kohärenz

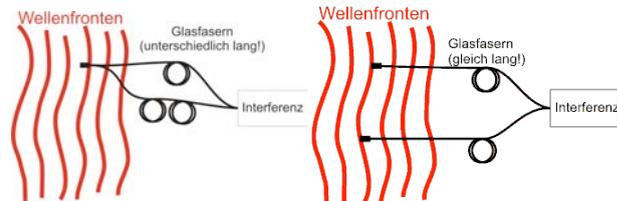


Abbildung 4.127: Zeitliche vs. räumliche Kohärenz.

Man unterscheidet zwischen zeitlicher Kohärenz, bei dem die Korrelationsfunktion der Phase an einem bestimmten Ort zu unterschiedlichen Zeiten gemessen wird, und räumlicher Kohärenz, bei der die Korrelationsfunktion zwischen unterschiedlichen Orten verglichen wird. Bei einer thermischen Lichtquelle existiert hier zunächst wiederum keine Kohärenz, d.h. die Kohärenzlänge ist von der gleichen Grössenordnung wie die optische Wellenlänge.

Ein Laser hingegen besitzt eine gute räumliche Kohärenz, die praktisch beliebig hoch sein kann. Auch mit thermischen Quellen können räumlich kohärente Quellen erzeugt werden, indem man z.B. einen dünnen Spalt oder ein kleines Loch beleuchtet. Sofern die Dimensionen dieser Sekundärquellen klein sind im Vergleich zur Kohärenzlänge der Primärquelle, verbessert man damit die Kohärenzeigenschaft. Die räumliche Kohärenz bestimmt, z.B., wie gut das entsprechende Licht fokussiert werden kann.

Die Messung der räumlichen Kohärenz einer Lichtquelle erlaubt z.B. die Messung des Durchmessers von Sternen: eine punktförmige Quelle ist immer räumlich (aber nicht unbedingt zeitlich) kohärent. Ein Stern hat aber eine endliche Oberfläche, deren Teile zueinander nicht kohärent sind.

Indem man die Phase von Lichtstrahlen im Abstand von einigen Dutzend m misst kann man die Ausdehnung eines Sterns bestimmen. Die Bedingung hierfür

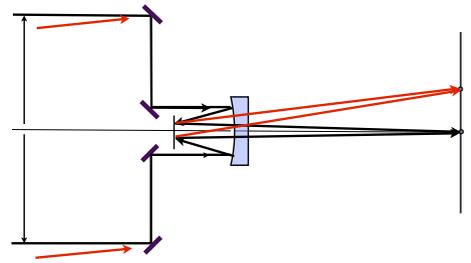


Abbildung 4.128: Messung eines Sterndurchmessers mit Hilfe eines Interferometers.

ist praktisch identisch wie die Auflösungsbedingung von Abbé.

Das grundsätzliche Idee dafür stammt von Fizeau, ein genauer Vorschlag von Michelson. Er wurde zuerst am Mount Wilson Observatorium in den USA realisiert und dazu verwendet, den Durchmesser von Beteigeuze zu bestimmen (1920). Nach aktuellem Wissensstand beträgt er etwa 662 Sonnendurchmesser.

Im Bereich der Radioastronomie verwendet man ähnliche Interferometer mit Basislinien von bis zu 10000 km.

## 4.6 Beugung

### 4.6.1 Grenzen der geometrischen Optik

Im Rahmen der geometrischen Optik hatten wir angenommen, dass die Wellenlänge des Lichtes klein sei im Vergleich zu allen relevanten Distanzen. Jetzt lassen wir diese Näherung fallen und betrachten die sich daraus ergebenden Konsequenzen. Als erstes Beispiel betrachten wir Licht einer punktförmigen, weit entfernten Quelle, welches durch ein Loch in einem Schirm durchtritt. Im Rahmen der geometrischen Optik würden wir erwarten, dass sich vom Loch aus ein paralleles Lichtbündel, also ein Lichtstrahl ausbreitet.

Das Experiment zeigt, dass diese Näherung durchaus sinnvoll ist wenn das Loch groß genug ist.

Wenn das Loch sehr viel kleiner ist als die optische Wellenlänge, so wirkt das Loch als eine punktförmige