3 Wellen

In diesem Kapitel diskutieren wir Wellen. Eine Welle ist allgemein eine Störung, welche sich im Raum ausbreitet. Dafür benötigt man ein Medium, in der die Störung lokal eine zeitabhängige Auslenkung erzeugt. Bei der Ausbreitung wird im Allgemeinen Energie und Impuls durch das Medium übertragen.

Abbildung 3.1: Nichtlineares Wellenphänomen.

Aus der großen Vielfalt an Wellen, die man im Alltag und in der Physik antrifft, werden wir uns in diesem Kapitel nicht mit den Wellen beschäftigen, die man z.B. am Strand antrifft: dort handelt es sich um nichtlineare und chaotische Phänomene. Hier beschränken wir uns auf lineare Wellenphänomene.

3.1 Schwingungen

3.1.1 Motivation und Übersicht

Lokal betrachtet ist eine Welle äquivalent zu einer Schwingung. Wir betrachten deshalb hier nochmals einige Aspekte von Schwingungen und gehen dann darauf ein, wie die Kopplung zwischen Schwingungen zu einer Ausbreitung von Energie führt.

Schwingungen treten in der Physik in unterschiedlichsten Systemen auf. In der Physik I wurde das Pendel diskutiert. Die Tatsache, dass nur die Länge des Pendels für seine Schwingungsdauer verantwortlich ist, waren einer der größten Erfolge der frühen physikalischen Forschung. Dieses einfache Modellsystem erlaubt die Diskussion von vielen grundlegenden Eigenschaften von Schwingungen, die in der Natur in sehr unterschiedlichen Systemen auftreten. Schwingungen stellen praktisch immer die zugrunde liegenden physikalischen Prozesse dar, wenn wir periodische Vorgänge beobachten.

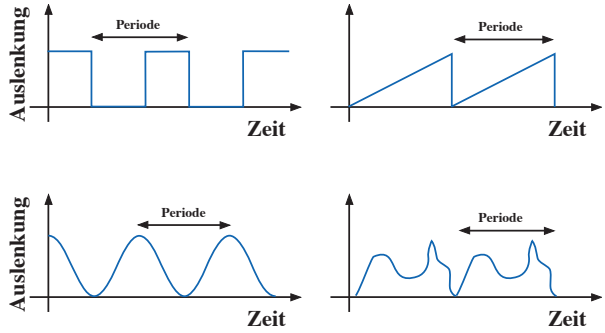

Abbildung 3.2: Periodische Signale.

Bei periodischen Vorgängen erreicht eine zeitabhängige Größe $x(t)$ nach einer Periode T wieder den ursprünglichen Wert,

$$x(t+T) = x(t).$$

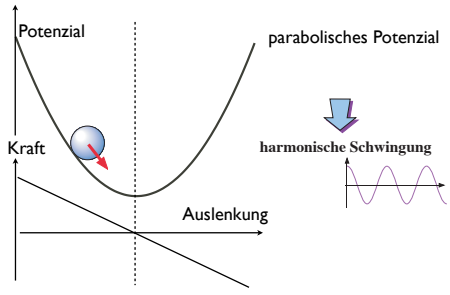

Abbildung 3.3: Harmonischer Oszillator in einer Dimension.

Im Rahmen dieses Kapitel diskutieren wir Schwingungen meist mit Hilfe des Modells des harmonischen Oszillators, d.h. eines Systems, das sich in einem parabolischen Potenzial

$$V(x) = ax^2$$

bewegt. Dies ist jedoch nicht in allen Fällen die einzige oder die fundamendalste Beschreibung. So ist es häufig der Fall, dass das Potenzial daraus entsteht, dass man weitere Freiheitsgrade vernachläßigt hat.

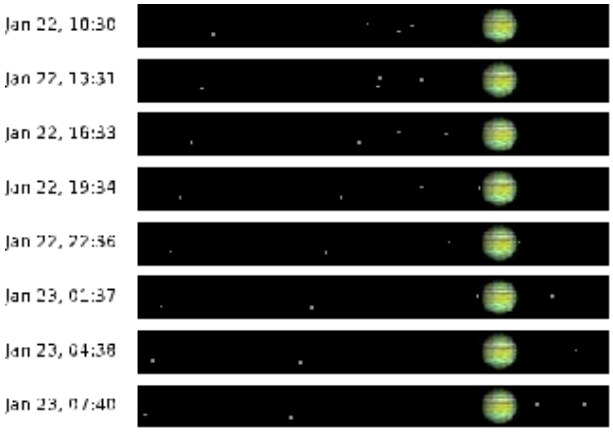

Abbildung 3.4: Simulierte Bewegung der Jupermonde, von der Erde aus gesehen.

Betrachten wir z.B. die Bewegung der Jupitermonde von der Erde aus, so führen sie die gleiche Bewegung durch wie ein harmonischer Oszillator. Die kommt dadurch zustande, dass wir die Ortskoordinate entlang der Richtung Erde - Jupiter nicht wahrnehmen können und in deshalb aus der Betrachtung entfernen.

3.1.2 Harmonischer Oszillator als Modellsystem

Ein parabolisches Potenzial tritt in der Natur nicht auf, da die Energie des Systems dabei gegen unendlich gehen würde. Trotzdem ist der harmonische Oszillator ein sehr gutes Modell für fast jedes physikalische System, sofern es sich in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes befindet. Dies liegt daran, dass in dessen Nähe das Potenzial meist quadratisch verläuft.

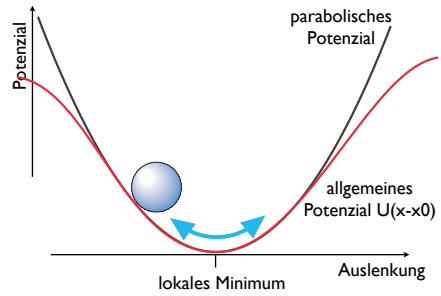

Abbildung 3.5: Parabolisches Potenzial und allgemeines Potenzial in der Umgebung eines Minimums.

Das sieht man rasch, wenn man die Energie in der Nähe eines lokalen Minimums als Taylor-Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned} U(x) &= U(x_0) + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} (x-x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} (x-x_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3U}{dx^3}\right|_{x_0} (x-x_0)^3 + .. \end{aligned}$$

Der erste Term ist unabhängig von x und hat deshalb keinen Einfluss auf die Dynamik des Systems. Der lineare Term der Entwicklung verschwindet im Gleichgewichtspunkt per Definitionem. Wenn der quadratische Term nicht verschwindet, so ist in der Nähe des Minimums immer ein Bereich vorhanden, indem er den größten Beitrag zur Dynamik des Systems liefert. Die Forderung, dass das System sich in einem stabilen Gleichgewicht befindet, bedeutet dann, dass die Energie ein Minimum besitzt, dass also die zweite Ableitung positiv ist, wie bei einem harmonischen Oszillator.

Wenn wir die erste Ableitung des Potenzials bilden,

$$-\frac{dU}{dx} = F(x) = -\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} (x-x_0) + O(x-x_0)^2,$$

so finden wir durch Vergleich mit der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2(x-x_0) = -\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} (x-x_0)$$

dass

$$m\omega_0^2 = \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0}.$$

Die Resonanzfrequenz ist damit durch die Masse des Oszillators und die zweite Ableitung des Potenzials am Gleichgewichtspunkt bestimmt. Ausdrücke dieser Art werden bei unterschiedlichen Wellen immer wieder auftauchen.

3.1.3 Das Lennard-Jones Potenzial

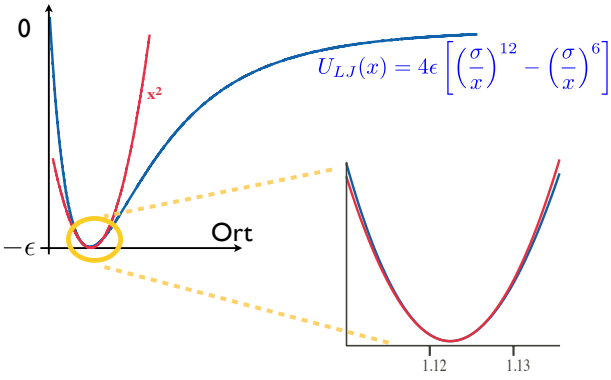

Abbildung 3.6: Vergleich eines harmonischen Potenzials mit dem Lennard-Jones Potenzial. Rechts ist der Bereich um das Potenzialminimum dargestellt.

Ein Beispiel eines solchen Potenzials ist das Lennard-Jones Potenzial, welches als

$$U_{LJ}(x) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$$

gegeben ist. Die Konstanten ε und σ bestimmen Tiefe ($= -\varepsilon$) und Position ($= \sigma$) des Minimums. Der erste Term ist positiv und beschreibt einen abstoßenden Beitrag. Der zweite Term ist negativ und beschreibt einen anziehenden Beitrag. Beide divergieren bei $x \to 0$ und verschwinden bei $x \to \infty$. Die Abstoßung überwiegt für $x < \sigma$, bei $x = \sigma$ sind beide Terme gleich groß, und für $x > \sigma$ überwiegt die Anziehung.

Dieses Potenzial beschreibt die Wechselwirkung zwischen Atomen oder Molekülen, die durch die Van der Waals Wechselwirkung aneinander gebunden sind. Das Minimum bei $x \approx 1.12\,\sigma$ bestimmt z. B. den Abstand zwischen Molekülen in einem Kristall und damit dessen Dichte.

Obwohl das Potenzial sicher nicht die Form einer Parabel besitzt, kann man es doch in der Nähe des Minimums durch eine Parabel annähern. Je näher man sich dem Minimum nähert, desto besser ist die Näherung. Man findet denn auch experimentell, dass in den meisten Systemen die Atome in der Nähe ihres Minimums mit festen Frequenzen schwingen, genau wie man es beim harmonischen Oszillator findet. Abweichungen davon findet man ebenfalls, und diese nehmen zu, wenn die Schwingungsamplitude zunimmt und somit Terme höherer Ordnung eine Rolle spielen.

3.1.4 Mehrdimensionales System nahe am Gleichgewicht

Wir betrachten ein komplexes mechanisches System mit f Freiheitsgraden. Die verallgemeinerten Koordinaten sind

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \end{pmatrix}$$

und die zugehörigen Transformationsgleichungen seien nicht explizit zeitabhägig. Wir betrachten einen Gleichgewichtspunkt und legen den Ursprung des Koordinatensystems in diesen Punkt, $\vec{q} = 0$. Hier verschwindet somit die erste Ableitung,

$$\vec{\nabla} V(\vec{q})|_{\vec{q}=0} = 0. \tag{3.1}$$

In der Umgebung des Gleichgewichtspunktes können wir das Potenzial $V(\vec{q})$ als Taylorreihe entwickeln:

$$V(\vec{q}) = V_0 + \frac{1}{2}\vec{q}^{\top}\underline{\underline{V}}\,\vec{q} + O(|\vec{q}|^3),$$

wobei wir (3.1) berücksichtigt haben. Die Konstante V_0 werden wir im Folgenden vernachlässigen, da sie

nicht in die Dynamik eingeht. $\underline{\underline{V}}$ ist die Hesse-Matrix der zweiten Ableitungen

$$\underline{\underline{V}} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial_{q_i}\partial_{q_j}}\right) = \underline{\underline{V}}^T$$

und ist somit symmetrisch. Damit es sich um ein stabiles Gleichgewicht handelt, müssen alle Eigenwerte Λ_k von $\underline{\underline{V}}$ positiv sein. Damit gilt für beliebige Vektoren $\vec{q} \neq 0$

$$\vec{q}^\top \underline{\underline{V}}\vec{q} > 0,$$

d.h. $\underline{\underline{V}}$ ist positiv definit.

Wir haben schon im Kapitel 2 gezeigt, dass die kinetische Energie bilinear in den Geschwindigkeiten ist. In der Nähe des Gleichgewichtspunktes schreiben wir sie deshalb als

$$T(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = T(\vec{q}=0,\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^\top \underline{\underline{T}}\dot{\vec{q}} + O(q|\dot{\vec{q}}|^2)$$

wobei die Matrix $\underline{\underline{T}}$ ebenfalls positiv definit und symmetrisch ist.

Damit können wir die Lagrange-Funktion in der Nähe des Gleichgewichts schreiben als

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^\top \underline{\underline{T}}\dot{\vec{q}} - \frac{1}{2}\vec{q}^\top \underline{\underline{V}}\vec{q}.$$

3.1.5 Normalkoordinaten

Wir suchen nun die optimale Basis für die Beschreibung der Dynamik. Dazu diagonalisieren wir $\underline{\underline{T}}$ durch eine orthogonale Transformation $\underline{\underline{O}}$:

$$\underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{O}}^\top = \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_f \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen neuen Koordinaten schreiben wir als

$$\vec{v} = \underline{\underline{O}}\vec{q} \qquad \vec{q} = \underline{\underline{O}}^\top \vec{v}.$$

In den neuen Koordinaten lautet die Lagrange-Funktion

$$\mathscr{L}(\vec{v}) = \frac{1}{2}\dot{\vec{v}}^\top \underbrace{\underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{O}}^\top}_{=\underline{\underline{D}}} \dot{\vec{v}} - \frac{1}{2}\vec{v}^\top \underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{O}}^\top \vec{v}.$$

Wir absorbieren die Eigenwerte d_i der Matrix $\underline{\underline{T}}$ in die neuen Koordinaten

$$\vec{Q} = \sqrt{\underline{\underline{D}}}\vec{v} \qquad \Leftrightarrow \qquad Q_i = \sqrt{d_i}v_i.$$

In diesen Koordinaten wird die Matrix $\underline{\underline{V}}$ zu

$$\underline{\underline{\tilde{V}}} = (\underline{\underline{\sqrt{D}}})^{-1}\underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{O}}^\top(\underline{\underline{\sqrt{D}}})^{-1}$$

und die transformierte Lagrange-Funktion

$$\mathscr{L}(\vec{Q}) = \frac{1}{2}\dot{\vec{Q}}^\top\dot{\vec{Q}} - \frac{1}{2}\vec{Q}^\top \underline{\underline{\tilde{V}}}\vec{Q}.$$

Wenn wir jetzt auch die Matrix $\underline{\underline{\tilde{V}}}$ diagonalisieren

$$\underline{\underline{O'}}\,\underline{\underline{\tilde{V}}}\,\underline{\underline{O'}}^\top = \underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_f^2 \end{pmatrix},$$

definieren wir nochmals neue Koordinaten

$$\vec{u} = \underline{\underline{O'}}^\top \vec{Q} \qquad \vec{Q} = \underline{\underline{O'}}\vec{u}.$$

Die kinetische Energie wird damit

$$\frac{1}{2}\dot{\vec{Q}}^\top\dot{\vec{Q}} = \frac{1}{2}\dot{\vec{Q}}^\top \underline{\underline{O'}}^\top \underline{\underline{O'}}\dot{\vec{Q}} = \frac{1}{2}\dot{\vec{u}}^\top\dot{\vec{u}}$$

und die Lagrangefunktion

$$\mathscr{L}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{f}\left(\dot{u}_i^2 - \omega_i^2 u_i^2\right).$$

Dies entspricht der Lagrange-Funktion von f unabhängigen harmonischen Oszillatoren mit den Eigenfrequenzen ω_i. Diese werden als Normalschingungen bezeichnet, die zugehörigen Koordinaten u_i als Normalkoordinaten.

Bemerkungen:

- Eine notwendige Bedingung für diese Zerlegung ist, dass $\underline{\underline{V}}$ und $\underline{\underline{T}}$ positiv definit sind.
- Die Normalschingungen sind nur für kleine Amplituden unabhängig, so weit die harmonische Näherung um das Potenzialminimum gültig bleibt.

3.1.6 Normalschwingungen

Die Bewegungsgleichungen für die Normalschwingungen lauten

$$\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i = 0.$$

Wie bei jedem harmonischen Oszillator können wir die Lösung schreiben als

$$u_i(t) = a_i e^{\pm i\omega_i t}$$

oder, in reeller Schreibweise $\cos(\omega_i t)$ und $\sin(\omega_i t)$. Die Frequenzen sind gegeben durch die Wurzel aus den Diagonalelementen der Matrix

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Omega}} &= \underline{\underline{O'}}\,\underline{\underline{\tilde{V}}}\,\underline{\underline{O'}}^{\top} \\ &= \underline{\underline{O'}}\,(\underline{\underline{\sqrt{D}}})^{-1}\underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{O}}^{\top}(\underline{\underline{\sqrt{D}}})^{-1}\underline{\underline{O'}}^{\top}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Abgesehen von den orthogonalen Transformationen steht hier die Hesse-Matrix $\underline{\underline{V}}$ im Zähler und die diagonalisierte Massematrix $\underline{\underline{D}}$ im Nenner - in offensichtlicher Verallgemeinerung des eindimensionalen Falles.

Die allgemeine Lösung ist die Linearkombination

$$\begin{aligned} u(t) &= \alpha_i \cos(\omega_i t) + \beta_i \sin(\omega_i t) \\ &= A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i). \end{aligned}$$

Im hier diskutierten mehrdimensionalen System können alle Eigenmoden gleichzeitig angeregt sein. Im Allgemeinen tragen alle Eigenmoden zur Bewegung aller einzelner Teile bei.

Bemerkungen:

- Für kleine Auslenkungen um das Gleichgewicht tritt keine chaotische Dynamik auf: das System ist integrabel, da es f verschiedene Integrale der Bewegung gibt, nämlich die Energie jedes einzelnen harmonischen Oszillators.
- Die Eigenvektoren (=Normalkoordinaten) können immer reell gewählt werden und bilden eine vollständige Basis.
- Die Diagonalisierung ist in sehr großen System in der Regel sehr schwierig.

3.1.7 Molekülschwingungen

Die Untersuchung von Schwingungen mit Hilfe von Normalkoordainten ist u.a. für mikroskopische Systeme sehr gut geeignet.

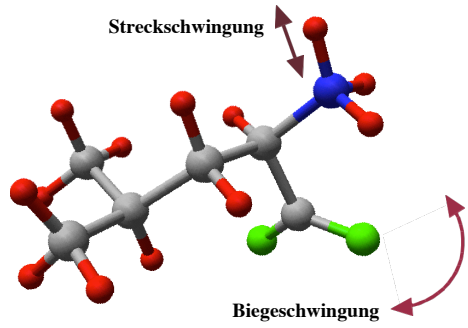

Abbildung 3.7: Molekülschwingungen.

In Molekülen hängt die Energie von den Koordinaten der beteiligten Atome ab. Die “Strutkur” des Moleküls definiert den Zustand niedrigster Energie, also den stabilen Gleichgewichtspunkt. Um diesen Punkt führt das Molekül Schwingungen durch, welche durch Stöße oder durch resonante Absorption von Strahlung angeregt werden können. Die Frequenzen der Normalmoden liegen bei $10^{12} - 10^{13}$ Hz.

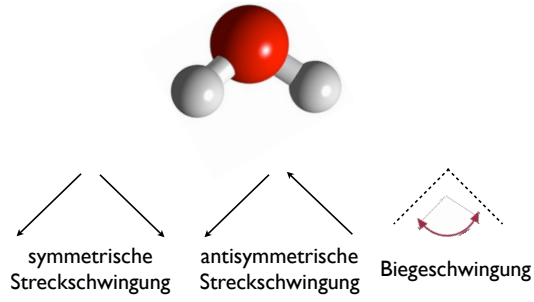

Abbildung 3.8: Molekülschwingungen in H_2O.

Ein Molekül mit N Atomen besitzt $3N$ Freiheitsgrade. Dementsprechend erwarten wir $3N$ Normalkoordinaten. Wenn wir die entsprechenden Schwingungsfrequenzen ausrechnen, finden wir allerdings, dass sie für einige der Koordinaten null werden. Dies sieht man einfach, wenn man alle Atome um den gleichen Vektor verschiebt. Dies entspricht einer Verschiebung des Koordinatensystems und lässt

die potenzielle und kinetische Energie des Moleküls konstant. Wie schon im Kapitel 2 gezeigt, gilt das gleiche für eine Rotation. Diese Freiheitsgrade, deren Rückstellkraft und damit Frequenz verschwindet, werden als nicht-oszillatorische Freiheitsgrade bezeichnet. Jedes Molekül besitzt 3 translatorische Freiheitsgrade und i. a. auch 3 rotatorische Freiheitsgrade. Abb. 3.8 zeigt die Normalmoden für das Wassermolekül.

Ein lineares Molekül hat nur 2 rotatorische Freiheitsgrade, deren Rotationsachse senkrecht zur Symmetrieachse liegen. Die Rotation um die Symmetrieachse lässt das Molekül invariant. Die verbleibenden Freiheitsgrade entsprechen Oszillationen.

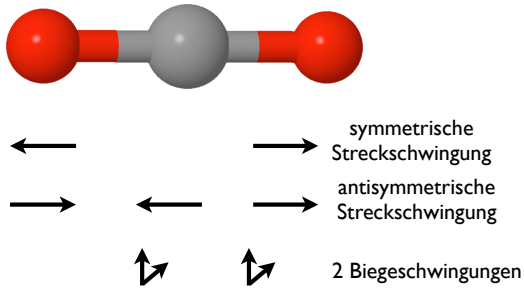

Abbildung 3.9: Molekülschwingungen in einem linearen Molekül (CO_2).

Wir betrachten als Beispiel für ein lineares Molekül das CO_2-Molekül. Wir erwarten $3N-3-2=4$ oszillatorische Freiheitsgrade. Wir betrachten zunächst die Koordinaten in Richtung der Symmetrieachse. Wenn alle Atome in die gleiche Richtung ausgelenkt werden, so ändert sich die Energie des Moleküls nicht - es handelt sich um eine Translationsbewegung des Gesamtmoleküls. Die andern beiden Linearkombinationen werden als symmetrische, resp. antisymmetrische Streckschwingung bezeichnet.

In jeder Ebene, welche die Symmetrieachse enthält, gibt es wiederum 3 linear unabhängige Auslenkungen. Je eine ist wiederum eine Translationsbewegung und eine Rotationsbewegung. Die dritte entspricht einer Biegeschwingung. Damit besitzt das Molekül zwei unabhängige Streck- und Biegeschwingungen, also 4 unabhängige oszillatorische Freiheitsgrade.

3.1.8 Symmetrie

Es lohnt sich immer, die Symmetrie eines Moleküls in die Überlegungen miteinzubeziehen. Im Falle des CO_2-Moleküls hatten wir gezeigt, dass das Molekül 4 oszillatorische Freiheitsgrade besitzt. Gemäß der allgemeinen Herleitung muss in diesem Fall die Säkulargleichung einer 4x4 Matrix gelöst werden - oft eine schwierige Aufgabe. Das Problem wird aber sehr einfach wenn wir die Symmetrie des Systems berücksichtigen. Es lässt sich zeigen, dass jeder Eigenvektor gemäß einer irreduziblen Darstellung des Moleküls transformiert, d. h. dass die Schwingungen die Symmetrie des Moleküls widerspiegeln.

Im Falle des CO_2 besitzt das Molekül einerseits Rotationssymmetrie um die Achse, andererseits Inversionssymmetrie am C-Atom. Aufgrund der Rotationssymmetrie können wir die Auslenkungen entlang der Achse unabhängig von den Auslenkungen senkrecht dazu betrachten. Die drei z-Koordinaten der Atome ergeben somit drei unabhängige Normalschwingungen. Eine davon entspricht der Translationsbewegung. Die beiden andern können durch ihre Transformationseigenschaften bezüglich der Inversion unterschieden werden: Die symmetrische Streckschwingung entfernt beide O-Atome gleichzeitig vom C-Atom, während die antisymmetrische Streckschwingung das eine Atom entfernt und das andere Atom annähert. Die Auslenkungen haben somit umgekehrtes Vorzeichen, sind also antisymmetrisch. Für die Koordinaten senkrecht zur Symmetrieachse hatten wir schon vorher gezeigt, dass die drei Freiheitsgrade je einen Translations-, Rotations- und Vibrationsfreiheitsgrad ergeben. Der Vibrationsfreiheitsgrad entspricht in diesem Fall einer Biegeschwingung.

3.1.9 Frequenzen

Wir betrachten die z-Komponenten des CO_2 Moleküls. Hier sind die Matritzen der Kraft, resp. der Masse gegeben durch

$$m_{ij} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$f_{ij} = \begin{pmatrix} C & -C & 0 \\ -C & 2C & -C \\ 0 & -C & C \end{pmatrix}.$$

Die Determinantengleichung wird

$$(C-\omega^2 m)^2(2C-\omega^2 M) - 2C^2(C-\omega^2 m) = 0.$$

Eine Lösung ist offensichtlich

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{C}{M}}.$$

Die andern beiden erhalten wir aus

$$\begin{aligned} (C-\omega^2 m)(2C-\omega^2 M) - 2C^2 &= 0 \\ \omega^2(-2Cm - CM + \omega^2 mM) &= 0 \end{aligned}$$

zu

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{C}{\mu}} = \sqrt{C(\frac{1}{m}+\frac{2}{M})} > \omega_2.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (1,1,1) \\ \xi_2 &= (1,0,-1) \\ \xi_3 &= (1,-2\frac{m}{M},1). \end{aligned}$$

Im Nenner von ω_3 steht die reduzierte Masse

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{m}+\frac{2}{M}}.$$

Solche reduzierten Massen treten in allen Systemen auf. Sie sind immer kleiner als die beteiligten Massen. Ist eine der Massen relativ klein (z.B. das Wasserstoffatom in einem Molekül), so liegt die reduzierte Masse leicht unterhalb der entsprechenden Masse.

3.1.10 Anwendungen: IR-Spektroskopie

Die Messung von Vibrationsfrequenzen in Molekülen ist eine der wichtigsten analytischen Methoden bei der Untersuchung von molekularen Substanzen.

Man regt dabei das Molekül mit elektromagnetischer Strahlung von geeigneter Wellenlänge an und misst

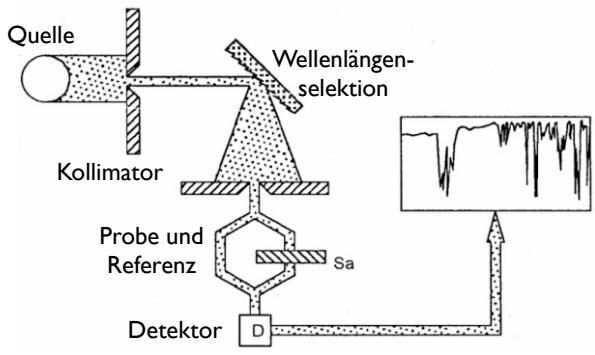

Abbildung 3.10: Prinzip der IR Spektroskopie.

die Absorption der Strahlung als Funktion der Wellenlänge. Aus der gemessenen Absorptionswellenlänge kann man die Kraftkonstanten des untersuchten Moleküls ausrechnen. Bei einem zweiatomigen Molekül geht dies relativ einfach, indem man die Formel (3.2) für die Frequenzen schreibt als

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}}$$

und nach der Kraftkonstanten k auflöst.

Molekül	k/aJÅ^{-2}
HCl	5.16
HF	9.64
Cl_2	3.2
F_2	4.45
O_2	11.41
NO	15.48
CO	18.55
N_2	22.41

Tabelle 3.1: Kraftkonstaten von 2-atomigen Molekülen

Tabelle 3.1 gibt eine Übersicht über Kraftkonstanten von zweiatomigen Molekülen. Die Einheit aJÅ^{-2} = 10^{-18}J/10^{-10}m kann man auch schreiben als

$$1\frac{\text{aJ}}{\text{Å}^2} = 1\frac{10^{-18}\text{Nm}}{10^{-20}\text{m}^2} = 100\frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Bei polyatomaren Molekülen ist es nicht mehr so direkt möglich, die Kraftkonstanten zu bestimmen, da

im Prinzip sämtliche Atome an einer Normalschwingung beteiligt sind. Allerdings koppeln lokalisierte Schwingungen, deren Frequenz weit voneinander entfernt sind, nur schwach aneinander. Deshalb kann man in den meisten Fällen die beobachteten Absorptionsbanden einer bestimmten lokalisierten Schwingung zuordnen.

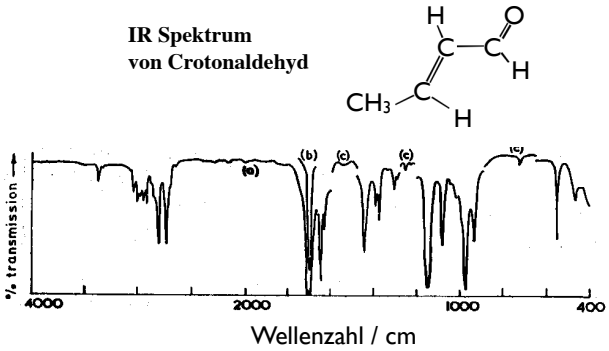

Abbildung 3.11: IR-Spektrum von Crotonaldehyd.

Ein solches Beispiel eines Spektrums zeigt, wie auch in einem relativ einfachen Molekül eine große Zahl von Absorptionsbanden beobachtet werden kann. Während es in der Praxis schwierig ist, ohne aufwändige numerische Rechnungen die einzelnen Banden eindeutig einer bestimmten Normalkoordinate zuzuordnen, kann man direkt Aussagen machen, welche Bereiche welcher Art von Schwingungen zugeordnet werden kann. Die höchsten Frequenzen sind immer den Streckschwingungen des Wasserstoffatoms zuzuordnen, da hier die geringste Masse bewegt wird.

Physikalische Chemiker haben eine große Zahl von spektralen Bereichen charakterisiert. Diese Übersicht stellt eine grobe Klassifizierung dar. Sehr viel genauere Aussagen sind möglich, wenn größere Teile von Molekülen verglichen werden, und aus Abweichungen von den errechneten Werten kann man Rückschlüsse auf strukturelle Besonderheiten ziehen. Die empirischen Erfahrungen, welche in solchen Tabellen liegen, sind bis heute auch relativ aufwändigen quantenmechanischen Rechnungen noch überlegen.

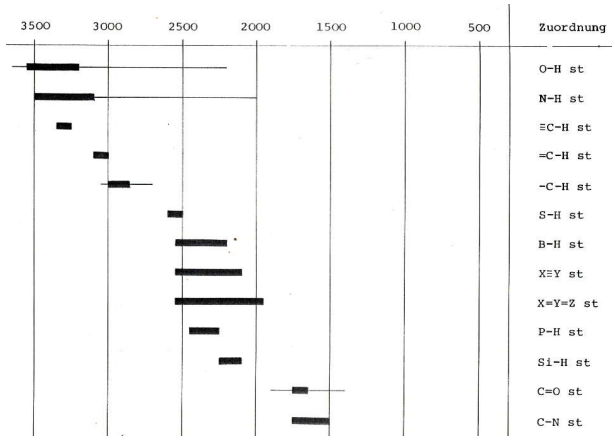

Abbildung 3.12: Spektralbereiche von Schwingungsspektren.

3.1.11 Weitere schwingende Systeme

Systeme, die um ihr Gleichgewicht schwingen, findet man nicht nur in Pendeln und Molekülen.

Genauso führen Atome und Ionen in Festkörpern

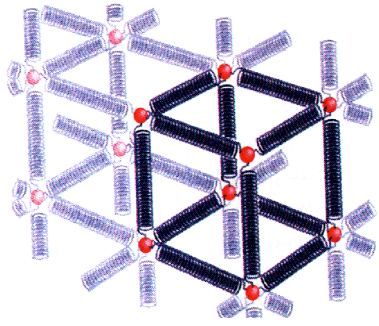

Abbildung 3.13: Schwingungen in Festkörpern.

Schwingungen um ihre Gleichgewichtslage durch. Schwingungen spielen in vielen täglichen Anwendungen eine Rolle. Sogar das einfache Pendel hat seine Anwendung in der Wanduhr gefunden. Jede Armbanduhr besitzt ein schwingendes Element; in mechanischen Uhren ähnelt es diesem Schwingpendel, in elektronischen Uhren wurde dieses durch einen Quarzstab ersetzt. In den Atomuhren, welche den internationalen Zeitstandard definieren, sind es Schwingungen der Elektronenhülle von Atomen. Alle elektrischen und elektromagnetischen Systeme verwenden Schwingungen. Elektromagnetische

Wellen, also auch Licht, stellen schwingende Systeme dar.

Bei der Erzeugung von Licht gehen die Schwingungen von atomaren Dipolen auf das elektromagnetische Feld über und beim Nachweis, also auch im Auge, überträgt das elektromagnetische Feld diese Schwingungen wieder auf ein materielles System, in diesem Fall die Sinneszellen der Netzhaut.

Wie in anderen Gebieten der Physik können wir hier sehr viele Gemeinsamkeiten feststellen. So können wir die Resultate, die uns die Diskussion des schwingenden Pendels liefert, direkt auf viele andere Systeme übertragen. Es ist deshalb nützlich, zunächst einige Eigenschaften zu diskutieren, die allen schwingenden Systemen gemeinsam sind.

3.2 Gekoppelte Oszillatoren

Im Folgenden betrachten wir, was passiert, wenn wir nicht nur einen, sondern mehrere gekoppelte Oszillatoren haben.

3.2.1 2 Gekoppelte Oszillatoren

Wie im Beispiel der Moleküle gezeigt, sind Oszillatoren in reellen Systemen meist an andere gekoppelt. Das einfachste Beispiel eines solchen Verhaltens sind 2 Pendel, welche durch eine Feder aneinander gekoppelt sind.

Das System zeigt im Vergleich zum einzelnen Pendel eine wesentlich interessantere Dynamik.

- Wenn wir beide Pendel in die gleiche Richtung auslenken, d.h. $x_1(0) = x_2(0)$, so schwingen sie parallel, $x_1(t) = x_2(t)$; in diesem Fall verhält sich das System identisch zu einem einfachen Pendel.
- Wenn wir die beiden Pendel in entgegengesetzte Richtung auslenken $x_1(0) = -x_2(0)$, so bleibt das System in diesem symmetrischen Zustand, $x_1(t) = -x_2(t)$. Die Periode ist kürzer als im ersten Fall, $\omega_2 > \omega_1$.

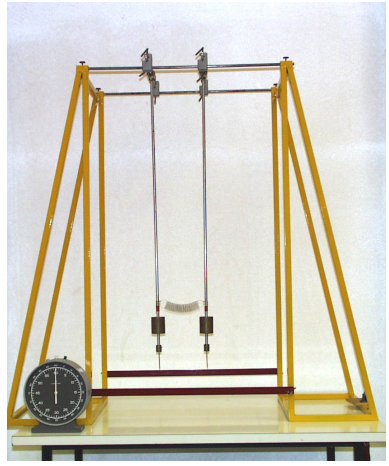

Abbildung 3.14: 2 gekoppelte Pendel.

- Wenn wir eines der gekoppelten Pendel anstoßen, $x_1(0) > 0$, $x_2(0) = 0$, so wird die Schwingung des ersten Pendels gedämpft bis es ganz stillsteht, diejenige des zweiten Pendels baut sich auf, bis der Vorgang sich umkehrt. Offenbar wird hier Energie von einem Pendel auf das andere übertragen. Genau diese Übertragung von Energie vom einen auf das andere Pendel ist die erste Vorstufe der Wellenausbreitung.

Hier wird anstelle dieses Systems von 2 gekoppelten Pendeln ein eindimensionales System von zwei Massen diskutiert, welche durch Federn aneinander gekoppelt sind.

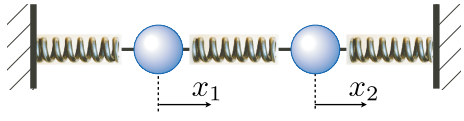

Abbildung 3.15: 2 gekoppelte schwingende Massen.

Wenn wir die beiden Auslenkungen aus der Ruhelage mit x_1 und x_2 bezeichnen, so lauten die Bewegungsgleichungen Wir können die Bewegungsgleichung des Systems schreiben als

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -2\kappa x_1 + \kappa x_2 = \kappa(-x_1 + (x_2 - x_1)) \\ m\ddot{x}_2 &= -2\kappa x_2 + \kappa x_1 = \kappa(-x_2 + (x_1 - x_2)). \end{aligned}$$

Hier stellt m die Masse einer Kugel und κ die Federkonstante dar. Offenbar betrachten wir jetzt ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen.

Wir können dieses lösen, indem wir die Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen.

3.2.2 Normalmoden

Wir können die Eigenvektoren aber auch durch Symmetrieüberlegungen finden: Die beiden Gleichungen entkoppeln wenn $x_1 = x_2$, d. h. wenn die beiden Auslenkungen gleich sind, d. h. wenn die beiden Massen in Phase schwingen. Damit finden wir sofort die eine Lösung:

$$x_1 = x_2 = A\,e^{i(\omega_1 t+\delta)} \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}},$$

wobei Amplitude A und Phase δ durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind.

Die zweite, linear unabhängige Lösung erhalten wir aus der Forderung, dass die Eigenvektoren orthogonal sind, d. h. $x_1 = -x_2$. Damit wird die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}_1 = -3\kappa x_1.$$

Hier ist die Lösung

$$x_1 = -x_2 = A\,e^{i(\omega_2 t+\delta_2)} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3\kappa}{m}}.$$

Die allgemeine Lösung ist eine lineare Superposition der beiden Normalmoden:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1\,e^{i(\omega_1 t+\delta_1)} + A_2\,e^{i(\omega_2 t+\delta_2)} \\ x_2 &= A_1\,e^{i(\omega_1 t+\delta_1)} - A_2\,e^{i(\omega_2 t+\delta_2)}. \end{aligned}$$

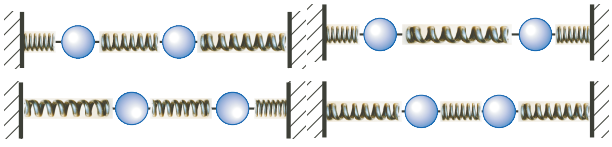

Abbildung 3.16: Normalmoden für eine lineare Kette aus 2 gekoppelten Massen.

Die Lösung ist deshalb so einfach, weil sich das System für diese beiden Auslenkungen wie ein einfacher harmonischer Oszillator verhält, wobei die Frequenz gegeben ist als ω_1, resp. ω_2. Der einfachste Lösungsweg für die Bewegungsgleichungen des gekoppelten Systems besteht deshalb darin, zunächst die Normalkoordinaten und die zugehörigen Normalfrequenzen zu bestimmen. Häufig erhält man damit schon genügend Informationen. Falls vollständige Lösungen der Bewegungsgleichungen nötig sind, so kann man diese finden, indem man die Anfangsbedingungen in die Normalkoordinaten transformiert. Sucht man die zeitliche Entwicklung einer bestimmten Koordinate, so findet man diese durch Inversion der Transformation in Normalkoordinaten.

Da verschiedene Normalkoordinaten mit unterschiedlichen Frequenzen beitragen, findet man für die Bewegung der einzelnen Koordinate eine Superposition unterschiedlicher Frequenzen. Gemäß dem Additionstheorem für trigonometrische Funktionen

$$\cos(\omega_1 t)+\cos(\omega_2 t) = 2\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$$

schwingt die Koordinate damit mit der mittleren Frequenz, wobei die Amplitude mit der Differenzfrequenz moduliert ist. Man bezeichnet dies als eine Schwebung. Die Schwebungsfrequenz ist die halbe Differenz zwischen den beiden Normalfrequenzen und damit gerade gleich der Kopplungskonstanten.

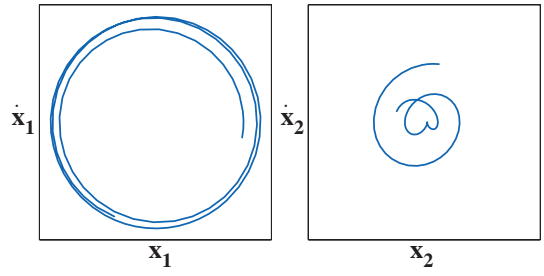

Abbildung 3.17: Phasenraumtrajektorien für die beiden gekoppelten Massen.

Man kann die Trajektorien der beiden Massen wie üblich im Phasenraum darstellen. Dabei zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zum Fall der nicht gekoppelten Oszillatoren: Wenn wir jeweils einen Unterraum betrachten, der nur einem einzelnen Oszillator entspricht (z.B. den $x_1, \dot{x}_1$-Unterraum, so schneidet sich die Trajektorie mit sich selber. Dies liegt daran, dass diese Darstellung nicht alle Dimensionen

enthält, sondern eine Projektion auf einen Unterraum darstellt. Die Trajektorie selber schneidet sich nicht, lediglich die Projektion auf den Unterraum.

3.2.3 5 Gekoppelte Massen in einer linearen Kette

Von der Diskussion von zwei gekoppelten Massen gehen wir über zu einer Kette von Massen, welche über Federn aneinander gekoppelt sind. Die ist z. B. ein wichtiges Modell für die Diskussion von Schwingungen in kristallinen Festkörpern. Das Gitter eines Festkörpers ist dadurch definiert, dass die Atome sich an der Stelle befinden, welche die Gesamtenergie der Anordnung minimiert. Dies ist deshalb die Position, die sie - abgesehen von der Nullpunktsbewegung - am absoluten Nullpunkt ($T = 0$ K) einnehmen. Bei endlichen Temperaturen hingegen können sie aus dieser Position ausgelenkt sein und damit eine höhere Energie besitzen. Die rücktreibende Kraft des Potenzials führt dann zu einer Oszillationsbewegung.

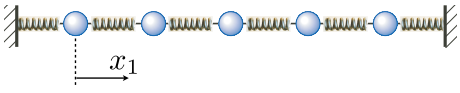

Abbildung 3.18: Lineare Kette.

Als einfachstes Modell für die Bewegung von Atomen in einem Festkörper betrachten wir zunächst die eindimensionale Kette. Die darin enthaltenen Atome seien über Federn aneinander gekoppelt. Wichtig ist nun aber, dass in der Kette die Kraft, die auf ein Atom wirkt, nicht nur von seiner eigenen Position, sondern auch von der seiner Nachbaratome abhängt. Für eine einatomige Basis gilt

$$M\ddot{x}_s = C(x_{s+1} + x_{s-1} - 2x_s),$$

wobei C die Kraftkonstante und M die atomare Masse beschreibt. Jedes Atom ist in diesem Modell an seine Nachbaratome gekoppelt. Dies führt dazu, dass die Auslenkung nicht auf einem Atom lokalisiert bleiben kann.

Für ein einfaches System von 5 Massen, die durch Federn verbunden sind, lauten die Bewegungsglei-

Abbildung 3.19: Exp.: Federkette mit 5 Massen.

chungen

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \frac{C}{M}\underline{\underline{A}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

mit der Kopplungsmatrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenvektoren und Eigenwerte dieses Systems sind

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1^2 = \frac{C}{M}(\sqrt{3} - 2)$$

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2^2 = -\frac{C}{M}$$

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3^2 = -2\frac{C}{M}$$

$$\xi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_4^2 = -3\frac{C}{M}$$

$$\xi_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 2 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_5^2 = \frac{C}{M}(-2-\sqrt{3}).$$

Die numerischen Werte für die Frequenzen betragen damit

$$\lambda_i \approx \{0.52, 1, 1.41, 1.73, 1.93\}\sqrt{-\frac{C}{M}}.$$

Diese Werte kann man im Experiment verifizieren, indem das System resonant anregt. Wenn die Resonanzfrequenz getroffen wird, wird das System so aneregt, dass die Amplituden der einzelnen Massen den entsprechenden Komponenten der Eigenvektoren entsprechen.

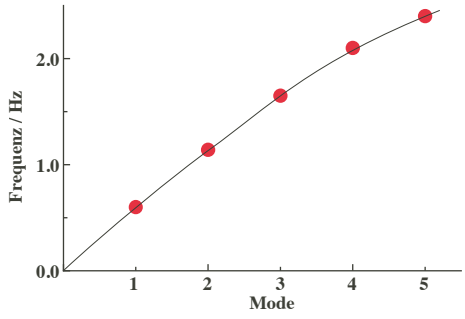

Abbildung 3.20: Gemessene Eigenfrequenzen der linearen Kette mit 5 Massen.

Die gemessenen Eigenfrequenzen stimmen recht gut mit den theoretisch berechneten Werten überein.

Wenn man die Komponenten der Eigenvektoren grafisch aufträgt, sieht man ebenfalls eine interessante Abhängigkeit. Offenbar haben beim Eigenvektor mit der niedrigsten Eigenwert alle Elemente das gleiche Vorzeichen. Bei den anderen EV wechselt das Vorzeichen jeweils 1, 2, 3, 4 mal. Dieses Verhalten ist sehr universell, man findet es sowohl bei Schwingungen und Wellen in klassischen Systemen wie auch in der Quantenmechanik.

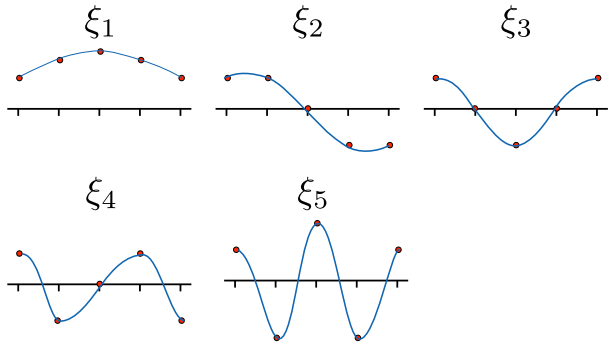

Abbildung 3.21: Eigenschwingungen der linearen Kette mit 5 Massen.

3.2.4 Unendliche Kette

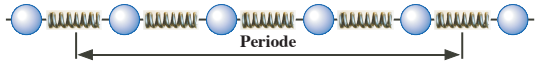

Abbildung 3.22: Unendliche Kette mit periodischen Randbedingungen.

Einfacher als die Kette mit fünf Gliedern ist die unendliche Kette. Dieses System wird einfacher, weil jetzt die Bewegungsgleichung für alle Massen die gleiche ist:

$$M\ddot{x}_s = C(x_{s+1} + x_{s-1} - 2x_s), \tag{3.3}$$

während wir vorher eine Bewegungsgleichung für die mittleren Massen hatten (die gleiche wie hier) und eine andere für die Massen am Rand.

Es bleibt die Frage nach den Randbedingungen. Da wir von einer unendlich langen Kette ausgehen, erwarten wir, dass das Resultat unabhängig ist von den Randbedingungen. Es ist aber nützlich, zunächst in einem endlichen System geeignete Randbedingungen einzuführen und dann die Größe des Systems gegen unendlich laufen zu lassen. Dabei sollte man aber die Symmetrie des unendlichen Systems beibehalten. Dies kann man erreichen, indem man periodische Randbedingungen verwendet: Man betrachtet N Massen, wobei N eine große aber endliche Zahl ist, und ordnet diese Massen ringförmig an. Die N-te Masse ist somit an die erste gekoppelt. Die Bedingung der Periodizität lautet dann

$$x_{s+N} = x_s \quad \forall s. \tag{3.4}$$

Wir suchen jetzt die Eigenfunktionen der Bewegungsgleichung (3.4), also diejenigen Lösungen dieser Bewegungsgleichung, die eine harmonische Zeitabhängigkeit aufweisen. Ein möglicher Ansatz, der die periodischen Randbedingungen erfüllt, ist

$$x_s = X_0\, e^{iksa}\, e^{i\omega t}, \tag{3.5}$$

wobei k die Dimension einer inversen Distanz hat und a den Abstand zwischen nächsten Nachbarn darstellt. Die räumliche und die zeitliche Abhängigkeit sind hier getrennt, man spricht von einem Separationsansatz.

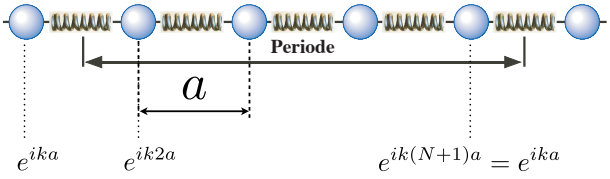

Abbildung 3.23: Auslenkungen in der unendlichen Kette mit periodischen Randbedingungen (hier: $N = 4$).

Aufgrund der periodischen Randbedingungen (3.4) muss

$$x_{s+N} = e^{ik(s+N)a} = e^{iksa} = x_s$$

sein, d.h.

$$e^{ikNa} = 1.$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn kNa ein Vielfaches von 2π ist, d.h. wenn

$$k = \frac{2\pi n}{Na}, \quad n = 0, 1, 2, ..N.$$

Da Na die Länge des Rings ist, muss also k ein ganzzahliges Vielfaches von 2π durch die Länge des Rings sein. Offenbar ist der Abstand

$$k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{Na}$$

zwischen aufeinanderfolgenden Werten von k relativ groß, wenn N klein ist, aber für $N \to \infty$, also für die unendliche Kette, verschwinden die Abstände, d. h. k wird kontinuierlich.

Durch Einsetzen des Ansatzes (3.5) in die Bewegungsgleichung (3.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} -\omega^2 &= \frac{C}{M}(e^{ika} + e^{-ika} - 2) \\ \omega^2 &= 2\frac{C}{M}(1 - \cos(ka)) = 4\frac{C}{M}\sin^2(\frac{ka}{2}). \end{aligned}$$

Offenbar stellt unser Lösungsansatz eine Normalmode dar. Die zugehörige Frequenz ist

$$\omega = 2\sqrt{\frac{C}{M}}\left|\sin(\frac{ka}{2})\right|.$$

Jedes Wertepaar (k, ω) charakterisiert eine Eigenschwingung der Kette. Innerhalb der harmonischen Näherung sind diese Schwingungen unabhängig voneinander. In einer Kette mit N Gliedern gibt es N diskrete Moden. In einer unendlichen Kette wird daraus eine kontinuierliche Funktion des Wellenvektors k.

3.2.5 Dispersion

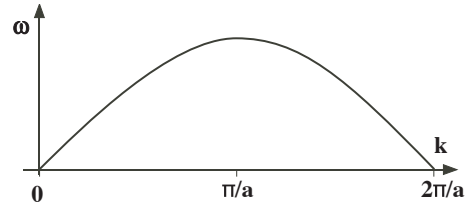

Abbildung 3.24: Die Dispersionsrelation $\omega(k)$ für die unendliche Kette.

Die Beziehung zwischen k und ω, welche als Dispersionsrelation bezeichnet wird, ist in Abb. 3.24 dargestellt. Für kleine Wellenvektoren, also große Wellenlängen, geht die Frequenz gegen Null. Hier gilt

$$\omega \approx \sqrt{\frac{C}{M}}\,|ka|,$$

d. h. die Frequenz ist direkt proportional zum Betrag des Wellenvektors. Diese Porportionalität ist intuitiv ersichtlich, wenn man berücksichtigt, dass bei gegebener Auslenkung einerseits die Federspannung

indirekt proportional zur Anzahl N der parallel ausgelenkten Massen ist, andererseits die Masse proportional zu N:

$$\omega(N) = \sqrt{\frac{C/N}{MN}} = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{C}{M}}.$$

Ein kleiner Wellenvektor, resp. große Periodenlänge bedeutet, dass benachbarte Atome praktisch in Phase schwingen.

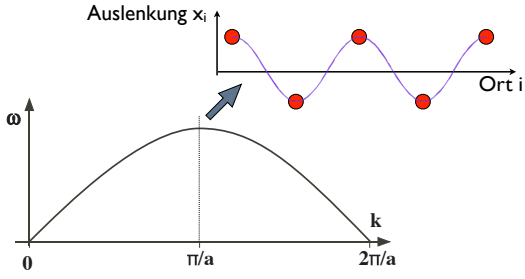

Abbildung 3.25: Benachbarte Atome schwingen für $k = \pi/a$ in Gegenphase.

Anders sieht es beim Wellenvektor $k = \pi/a$ aus. Hier sind benachbarte Atome gerade in Gegenphase. Hier wird gleichzeitig die Frequenz unabhängig vom Wellenvektor k.

Wenn wir zu noch größeren Wellenvektoren, also kürzeren Wellenlängen gehen, so wird die Auslenkungsdifferenz zwischen benachbarten Atomen wieder kleiner. Dies äußert sich auch in der Frequenz, wie man in der Dispersionsrelation erkennen kann. Offenbar ist die Frequenzabhängigkeit periodisch in k, mit Periode $2\pi/a$. Dies ist eine direkte Konsequenz des diskreten Modells: Es ist physikalisch nicht möglich, Schwingungen zu unterscheiden, deren Wellenvektoren sich um $2\pi/a$ unterscheiden.

Anders ausgedrückt: die Auslenkung ist nur bei den Massen beobachtbar und die Auslenkung bleibt identisch wenn die Phase um Vielfache von 2π ändert.

Physikalisch von Bedeutung ist deshalb nur der Bereich zwischen $-\pi/a < k < \pi/a$. Diese Unterscheidung wird in der Festkörperphysik von großer Bedeutung, wo dieser Bereich als die erste Brillouin-Zone bezeichnet wird.

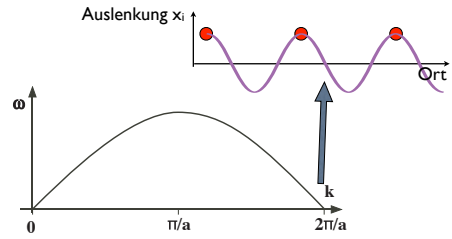

Abbildung 3.26: Auslenkungen bei $k = 2\pi/a$ sind identisch zu Auslenkungen bei $k = 0$.

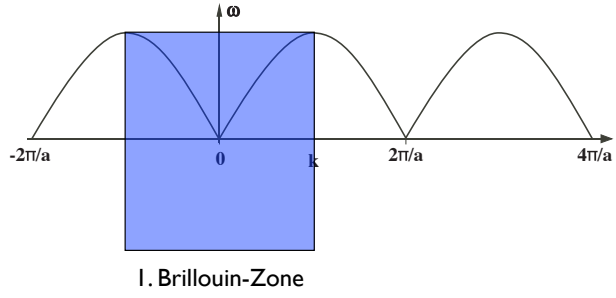

Abbildung 3.27: Periodizität im k-Raum und Definition der 1. Brillouin-Zone.

3.2.6 Transversalschwingungen

Massen auf einer Kette können nicht nur in Richtung der Achse ausgelenkt werden, sondern auch senkrecht dazu. Wir betrachten die senkrechte Auslenkung unabhängig, d. h. wir nehmen an, dass die Abstände in x-Richtung konstant sind, so dass die potenzielle und kinetische Energie nur durch die y-Verschiebung zustande kommen.

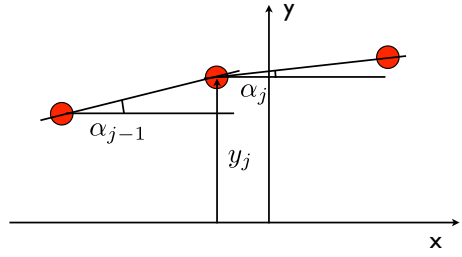

Abbildung 3.28: Transversalschwingungen.

Unter dieser Voraussetzung muss die x-Komponente

der Kraft im Gleichgewicht sein, d. h. die Kräfte auf benachbarte Segmente stehen im Verhältnis

$$S_{j-1}\cos\alpha_{j-1} = S_j\cos\alpha_j,$$

wobei S_j die Federkraft an der Position j darstellt und α der Winkel zwischen der Verbindungsgerade der ausgelenkten Massen und der Kettenachse.

Für kleine Auslenkungen gilt außerdem $\alpha\approx 0$ und

$$\cos\alpha_{j-1} \approx \cos\alpha_j \approx 1,$$

so dass

$$S_{j-1} = S_j = S,$$

d. h. alle Kräfte sind identisch.

Die transversale Kraft ist

$$\begin{aligned} F_j &= -S\sin\alpha_{j-1} + S\sin\alpha_j \\ &\approx -S\frac{y_j - y_{j-1}}{a} + S\frac{y_{j+1}-y_j}{a} \\ &= S\frac{y_{j+1}-2y_j+y_{j-1}}{a}. \end{aligned}$$

Dies ist exakt analog zum longitudinalen Fall, außer dass die Auslenkung jetzt in y-Richtung liegt und die Kraftkonstante C durch das Verhältnis S/a aus Saitenspannung und Abstand ersetzt wurde. Entsprechend können können die Schwingungen auch hier als

$$y_s = Y_0\, e^{iksa}\, e^{i\omega t}$$

geschrieben werden. Die Frequenzen werden hier

$$\omega = 2\sqrt{\frac{S}{Ma}}\left|\sin(\frac{ka}{2})\right|.$$

Die Dispersionsrelation ist demnach die gleiche wie beim longitudinalen Fall. Der einzige Unterschied liegt in der Skala der y-Achse.

Wenn wir den kontinuierlichen Grenzfall $a \to 0$ betrachten, so wird der Bruch zur Krümmung an der Stelle j, d. h. zur zweiten Ableitung. Somit erhalten wir die Bewegungsgleichung für das j-te Element als

$$F_j = m\ddot{y} = Sa\frac{d^2y}{dx^2}$$

oder

$$\frac{m}{a}\ddot{y} = S\frac{d^2y}{dx^2}.$$

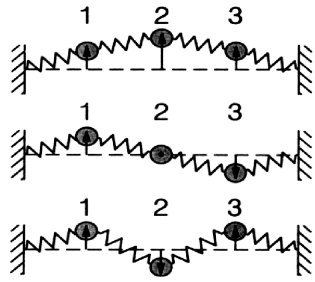

Abbildung 3.29: Transversale Moden.

3.2.7 Parametrische Resonanz

Eine Art, Resonatoren anzuregen, die nicht durch die oben beschriebenen Bewegungsgleichungen beschrieben wird, ist die parametrische Resonanz. Hier greift die externe Kraft nicht an der Auslenkung x an, sondern an einem Systemparameter wie der Frequenz oder der Dämpfung. Meist wird die Frequenz des Oszillators variiert, z. B. durch periodische Verkürzung / Verlängerung eines Pendels. Ein solches Pendel kann durch die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$$

mit

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h\cos(2\omega_0 t))$$

beschrieben werden. Resonante Anregung erfolgt wenn die Modulationsfrequenz gerade $2\omega_0$ entspricht.

Wir suchen Lösungen der Art

$$x(t) = ae^{\lambda t}e^{i\omega_0 t} = ae^{(\lambda + i\omega_0)t}.$$

Die entspricht einem harmonischen Oszillator mit zeitabhängiger Ampltide. Je nach Vorzeichen von λ wächst die Amplitude oder sie nimmt ab.

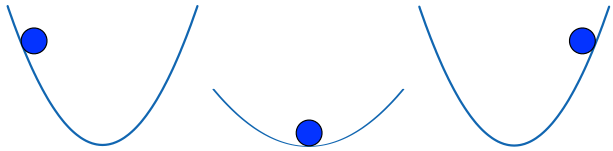

Abbildung 3.30: Transversale Moden.

Eine analytische Lösung ist etas aufwändig, aber qualitativ lässt sich das Verhalten leicht verstehen:

Wir betrachten dazu eine Kugel, die sich in einem harmonischen Potenzial mit variabler Krümmung bewegt. Wird die Krümmung so moduliert, dass die Krümmung maximal ist, wenn die Kugel hinunterrollt, und minimal, wenn sie hinaufrollt, so wird ihr von außen Energie zugeführt.

Offensichtlich ist $x = 0$ ein Fixpunkt dieses Systems. Er ist aber instabil: eine kleine Abweichung führt dazu, dass dem System Energie zugeführt wird, und es beginnt mit eponentiell ansteigender Amplitude zu schwingen. Dies zeigt klar, dass es sich hier um einen nichtlinearen Effekt handelt.

Grundsätzlich kann dem System auch Energie entzogen werden: ist die Phasenlage ungünstig, ist also die Krümmung maximal wenn die Kugel hinaufrollt, so wird dem System Energie entzogen. Dabei ändert es jedoch seine Phasenlage, so dass es nach kurzer Zeit wieder zu einer Zunahme kommt.

Der Effekt der parametrischen Oszillation wird z.B. in der Optik verwendet. Hier nutzt man die Möglichkeit, dass das System bei einer Anregung mit einer Frequenz ω_0 nicht nur mit ω_0 und deren Harmonishen schwingt, sondern auch mit der halben Frequenz antworten kann.

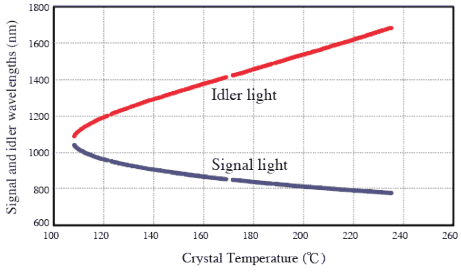

Abbildung 3.31: Erzeugen von Licht mit variabler Wellenlänge in einem optischen parametrischen Oszillator.

Noch allgemeiner kann die Systemantwort Frequenzen enthalten, deren Summe der Anregungsfrequenz entspricht, also z.B. 2 Frequenzen ω_1 und $\omega_2 = \omega_0 - \omega_1$. Dies nutzt man z.B., um aus einem Laser, der mit einer festen Frequenz schwingt, Licht mit einstellbarer Wellenlänge zu erzeugen. Etwas plakativ kann man das so ausdrücken, dass dabei ein Photon in zwei kleienre ”aufgeteilt” wird.