

Abbildung 2.36: Phasenraum-Trajektorien für den Duffing Oszillator mit  $D = -1$  und  $E = 0.02$ , wobei Dämpfung  $c = 0$  und äußere Kraft  $F_0 = 0$  zu Null gesetzt wurden.

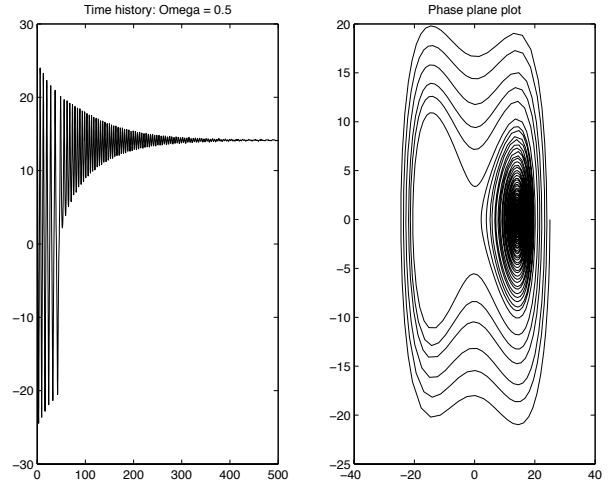


Abbildung 2.37: Links: Zeitabhängigkeit der Oszillatoramplitude. Rechts: Trajektorie im Phasenraum. In welchem Minimum das System landet, hängt empfindlich von den Parametern und von den Anfangsbedingungen ab.

wird. In Abb. 2.38 ist ein Beispiel gezeigt. Hier wird das System resonant getrieben. Für  $F_0 = 0.1$ , also relativ schwache externe Kraft, schwingt das System in der Nähe eines Potenzialminimums. Um welches Minimum es sich handelt hängt von den Anfangsbedingungen ab. Wird die externe Kraft soweit erhöht, dass die Schwingungsamplitude den Wert des lokalen Maximums erreicht, so kann es in das andere Minimum hinüber wechseln. Je nach Phasenlage wird es daran manchmal reflektiert, manchmal kann es das Maximum überqueren. Unter den hier gewählten Bedingungen wird das System chaotisch. Wird die Amplitude weiter erhöht, so erreicht wird die Auslenkung groß genug, dass es nicht mehr reflektiert wird. Die Bewegung wird dann wieder regulär.

Wie an diesem Beispiel gezeigt, können Bewegungsgleichungen normalerweise relativ problemlos numerisch integriert werden. Allerdings gibt es hierbei eine Reihe von Einschränkungen:

- Die Integration muss für jede Anfangsbedingung separat durchgeführt werden. Damit ist es sehr schwierig, Aussagen über globale Eigenschaften des Systems, wie z.B. Stabilität zu erhalten.
- Bei chaotischen Problemen laufen die Trajektorien exponentiell auseinander. Auf Grund der endlichen Präzision der Rechnung und der

Kenntnisse der Anfangsbedingungen nimmt die Voraussagbarkeit damit exponential mit der Zeit ab.

## 2.8 Stabilität und Chaos

Wie bereits erwähnt ist es nicht einfach, allgemeine Kriterien aufzustellen, wann ein System eine reguläre Dynamik zeigt und wann es sich chaotisch verhält. Insbesondere hängt dies sowohl von den Systemparametern wie auch von den Anfangsbedingungen ab. Hier werden zunächst einige Möglichkeiten diskutiert, wie man die Stabilität von Fixpunkten beurteilen kann.

### 2.8.1 Stabilität von Fixpunkten in linearen Systemen

Die Frage, ob ein Fixpunkt stabil ist oder nicht, kann zunächst an linearen Systemen betrachtet werden. Wir verwenden für die Beschreibung der Dynamik

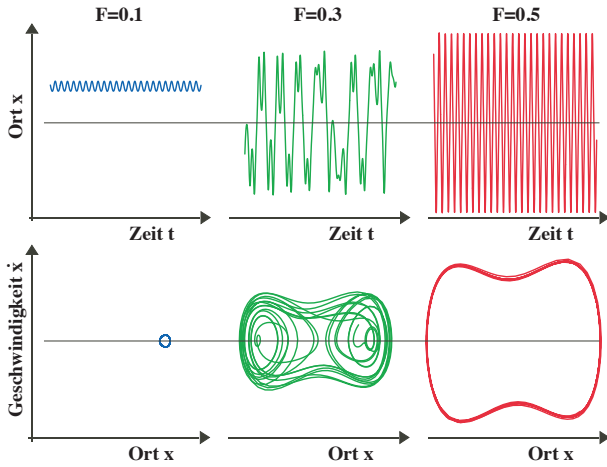


Abbildung 2.38: Reguläre (links und rechts) und chaotische Dynamik (mitte). Die drei Fälle wurden mit  $F_0 = 0.1$ ,  $F_0 = 0.3$  und  $F_0 = 0.5$  berechnet. Der obere Teil stellt jeweils die Zeitabhängigkeit dar, die obere Hälfte die Trajektorie im Phasenraum.

eine Matrixschreibweise:

$$\vec{\ddot{x}} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{b}.$$

Daraus erhalten wir eine homogene Gleichung, indem wir den Ursprung des Koordinatensystems um

$$\vec{v} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$$

verschoben:

$$\vec{y} = \vec{x} + \vec{v} \rightarrow \vec{x} = \vec{y} - \vec{v}.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\vec{\ddot{y}} = \mathbf{A}(\vec{y} - \mathbf{A}^{-1}\vec{b}) + \vec{b} = \mathbf{A}\vec{y},$$

d.h. eine homogene Differentialgleichung. Damit ist  $\vec{y} = 0$  eine zeitunabhängige Lösung, d.h. ein Fixpunkt.

Ein solcher Fixpunkt wird als stabil bezeichnet, wenn das System bei kleinen Abweichungen vom Fixpunkt auf diesen zustrebt, als instabil, falls kleine Abweichungen wachsen, und als indifferent oder marginal, wenn sie zeitunabhängig sind.

Um die Stabilität zu untersuchen, betrachten wir im neuen Koordinatensystem die Eigenvektoren, d.h. diejenigen Vektoren, bei denen die Ableitung parallel zum Vektor selber liegt,

$$\vec{\dot{y}}_k = \mathbf{A}\vec{y}_k = \lambda_k \vec{y}_k.$$

Diese haben offenbar die Lösung

$$\vec{y}_k(t) = \vec{y}_{k,0} e^{\lambda_k t}.$$

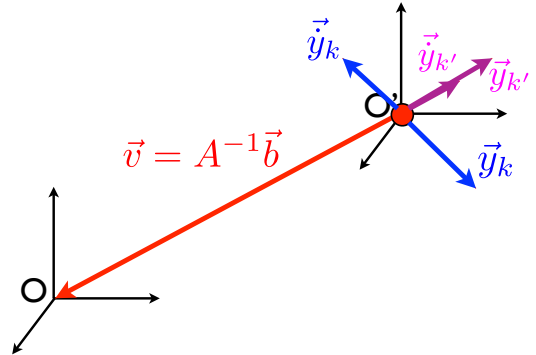


Abbildung 2.39: Stabilitätsbedingung für lineares System. Der Ursprung  $O'$  des verschobenen Koordinatensystems ist ein Fixpunkt.  $\vec{y}_k$  stellt einen stabilen Eigenvektor dar ( $\lambda_k < 0$ ),  $\vec{y}_{k'}$  einen instabilen ( $\lambda_{k'} > 0$ ).

Ist der Eigenwert  $\lambda_k$  reell, so erhalten wir somit exponentielles Wachstum (für  $\lambda_k > 0$ ), resp. exponentielles Abfallen (für  $\lambda_k < 0$ ). Ein System mit  $n$  Freiheitsgraden besitzt i.A.  $n$  Eigenwerte und ebenso viele Eigenvektoren. Die entsprechenden  $n$  speziellen Lösungen bilden eine Basis für den gesamten Lösungsraum. Somit kann jede Lösung geschrieben werden als

$$\vec{y}(t) = \sum_k c_k \vec{y}_k(0) e^{\lambda_k t}.$$

Sind alle Eigenwerte  $\lambda_k$  negativ, so geht  $\vec{y}(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , d.h. der Ursprung des verschobenen Koordinatensystems ist ein stabiler Fixpunkt. Ist mindestens ein Eigenwert positiv, so wächst der Lösungsvektor, d.h. das System ist nicht stabil. Sind die Eigenwerte nicht reell, so wird die Stabilität durch den Realteil bestimmt.

Das ganze gilt nur in einem infinitesimalen Raum in der Nähe des Fixpunktes. Deshalb sind solche Aussagen mit Vorsicht zu genießen.

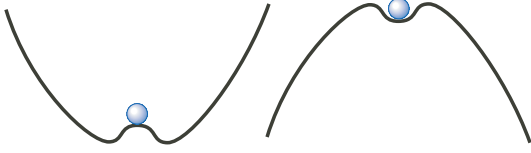


Abbildung 2.40: Stabilitätsbedingungen gelten für lokale Umgebung.

Abb. 2.40 zeigt 2 Beispiele: Im linken Beispiel ist das System nach Stabilitätsanalyse instabil, es entfernt sich aber nie sehr weit vom Fixpunkt. Im rechten Beispiel ist es nach Stabilitätskriterium stabil, wird aber schon durch geringe Störungen instabil.

### 2.8.2 Stabilität in nichtlinearen Systemen

In nichtlinearen Systemen ist es schwieriger, Aussagen über die Stabilität von dynamischen Systemen zu machen, da in den meisten Fällen keine analytischen Lösungen existieren. Das gleiche Problem besteht in linearen Systemen, für die keine analytischen Lösungen bekannt sind, oder bei denen bekannt ist, dass keine existieren. Die Möglichkeiten, die einem zur Verfügung stehen, sind deshalb in ihrer Allgemeinheit sehr stark eingeschränkt. Sie umfassen u.a.

**Analytische Näherung.** Diese ist vor allem dann sinnvoll, wenn der Einfluss einer Störung auf ein integrables System untersucht werden soll. Im Beispiel (2.42) kann man den kubischen Term als Störung betrachten.

**Erhaltungsgrößen** können globale Aussagen über die Bewegungsgleichungen liefern, wie z.B. die Keplerschen Gesetze.

**Stabilität spezieller Lösungen.** Ist eine Lösung für spezielle Anfangsbedingungen bekannt, so kann man untersuchen, wie sich das System verhält, wenn die Anfangsbedingungen leicht davon abweichen. Einfache Beispiele sind ein aufrecht stehender Stab oder ein Kreisel, der

um die Symmetrieachse rotiert. Innerhalb dieses Bereiches kann man das System linearisieren und die Diskussion von Abschnitt 2.8.1 verwenden.

Wir betrachten dafür ein System mit  $n$  Freiheitsgraden, das durch  $n$  Lagrange-Gleichungen 2ter Art oder durch  $n$  Differentialgleichungen 2ter Ordnung beschrieben werden kann. Diese können in  $2n$  Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots)$$

umgewandelt werden. Daraus bestimmen wir Fixpunkte  $\vec{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots)$ , mit

$$f_i(x_{0,1}, x_{0,2}, \dots) = 0.$$

In deren Umgebung können wir das System linearisieren, indem wir diese Funktion in lokalen Koordinaten  $u_i = x_i - x_{0,i}$  als Taylorreihe um den Fixpunkt entwickeln:

$$\dot{u}_i \approx f_i(x_{0,1}, x_{0,2}, \dots) + \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} u_k = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} u_k.$$

Die Jacobi-Matrix

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right) = (f_{i,k})$$

ist jetzt die Systemmatrix des linearisierten Systems und  $u_i$  die Koordinaten. Für diese gelten die gleichen Stabilitätskriterien wie für das lineare System.

Hier haben wir die Stabilität von Fixpunkten untersucht. Man kann dies erweitern auf allgemeine Trajektorien und erhält damit das Stabilitätskriterium von Lyapunov.

### 2.8.3 Lyapunov Exponent

Nach Lyapunov ist ein System dann stabil, wenn der Abstand zwischen 2 Trajektorien, deren Anfangsbedingungen benachbart sind, für lange Zeiten nicht über einen endlichen Wert  $\varepsilon$  hinaus wächst. Auf den ersten Blick scheint dies durch den Satz von Liouville garantiert zu sein: Die Fläche, welche durch den Kreis mit Radius  $\varepsilon$  aufgespannt wird, ist ein Volumen in Phasenraum, welches nach dem Satz von Liouville erhalten bleibt. Allerdings

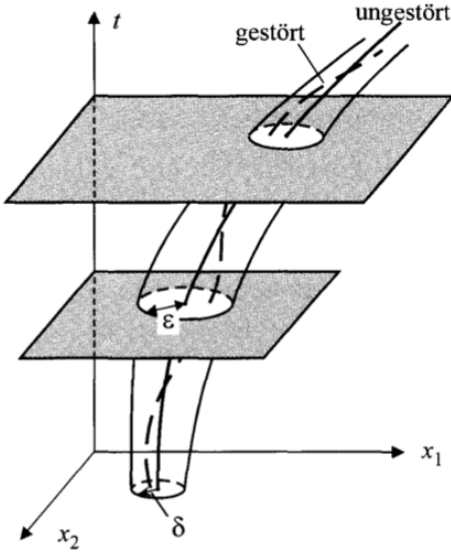


Abbildung 2.41: Zeitliches Verhalten benachbarter Anfangsbedingungen.

- gilt der Satz von Liouville nur für konservative Systeme und
- der Satz von Liouville sagt nichts aus darüber, wie sich die Form des Volumenelementes verändert.

Der erste Punkt führt z.B. dazu, dass sich ein dissipatives System auf einen Phasenraumpunkt zusammenziehen kann (einen stabilen Fixpunkt) oder dass Energiezufuhr ein System in sehr unterschiedliche Richtungen treiben kann, wie z.B. beim Duffing Oszillator. Der zweite Punkt erlaubt chaotisches Verhalten in nicht-dissipativen Systemen: in diesem Fall wird das Volumenelement des Phasenraums zu einer fraktalen Figur verformt.

Wir betrachten den Phasenraumvektor  $\vec{\Gamma}(t) = (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$ . Die Dynamik

$$\dot{\vec{\Gamma}}(t) = \vec{F}(\vec{\Gamma})$$

erhalten wir z.B. über die Ableitungen der Hamiltonfunktion

$$\vec{F}(\vec{\Gamma}) = \begin{pmatrix} \partial_{p_1} H \\ \vdots \\ \partial_{p_f} H \\ -\partial_{q_1} H \\ \vdots \\ -\partial_{q_f} H \end{pmatrix}.$$

Wir fragen, wie sich die Dynamik ändert, wenn wir einen Phasenpunkt betrachten, der sich infinitesimal, um  $\delta\vec{\Gamma}(t)$ , von einem Referenzpunkt  $\vec{\Gamma}(t)$  unterscheidet. Die zugehörige Dynamik ist

$$\frac{d}{dt} (\vec{\Gamma}(t) + \delta\vec{\Gamma}(t)) = \vec{F}(\vec{\Gamma}(t) + \delta\vec{\Gamma}(t)).$$

Mit der Entwicklung von  $\vec{F}$  erhalten wir in linearer Ordnung

$$\frac{d}{dt} \delta\vec{\Gamma}(t) = \sum_{\alpha=1}^{2f} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \Gamma_{\alpha}} \delta\Gamma_{\alpha}(t) = \underline{M} \delta\vec{\Gamma}(t).$$

Die Elemente der Matrix  $\underline{M}$  sind die partiellen Ableitungen

$$\underline{M}_{\beta\alpha} = \frac{\partial F_{\beta}}{\partial \Gamma_{\alpha}}.$$

Wir diagonalisieren die Matrix  $\underline{M}$ :

$$\underline{Diag}(\lambda_i) = \underline{TMT}^{-1}.$$

Die Eigenwerte sind  $\lambda_i$  und die Eigenvektoren sind die Zeilen der Matrix  $T$ .

Wir transformieren nun die Bewegungsgleichungen in dieses neue Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} \delta\vec{\xi} &= \underline{T}\delta\vec{\Gamma}(t) \\ \underline{T}^{-1}\delta\vec{\xi} &= \delta\vec{\Gamma}(t). \end{aligned}$$

Die transformierte Bewegungsgleichung ist somit

$$\frac{d}{dt} \delta\vec{\xi} = \frac{d}{dt} \underline{T}\delta\vec{\Gamma}(t) = \underline{TM}\delta\vec{\Gamma}(t) = \underbrace{\underline{TMT}^{-1}}_{\underline{Diag}(\lambda_i)} \delta\vec{\xi}.$$

In diesem Koordinatensystem sind die Bewegungsgleichungen entkoppelt, so dass wir sie für jede Mode  $\xi_\alpha$  einzeln lösen können:

$$\xi_\alpha(t) = \xi_\alpha(0)e^{\lambda_\alpha t}.$$

Die Eigenwerte  $\lambda_\alpha$  heißen auch Lyapunov Exponenten und sind wegen der mangelnden Symmetrie von  $\underline{M}$  in der Regel komplex. Mit deren Hilfe können wir als Kriterium für die Unterscheidung von regulärer Bewegung und einer chaotischen Dynamik angeben

1. Gilt für alle Exponenten  $\Re\lambda_\alpha \leq 0$ , dann liegt eine reguläre Dynamik vor.
2. Hat mindestens ein Exponent  $\lambda_\alpha$  einen positiven Realteil  $\Re\lambda_\alpha > 0$ , zeigt das System ein chaotisches Verhalten.
3. Hat kein Exponent einen positiven Realteil, aber mindestens ein Exponent einen verschwindenden Realteil, so kann die Stabilität des Systems mit dieser Methode nicht beurteilt werden. Dieser Fall wird als kritischer Fall bezeichnet.

Die Methode der Lyapunov-Exponenten liefert lediglich Aussagen über die Stabilität einzelner Lösungen, nicht über die Stabilität von Bewegungsgleichungen insgesamt. Wie bei der Analyse der Stabilität von Fixpunkten kann der Bereich, über den die Aussage gilt, relativ klein sein, wie bei den Beispielen in Abb. 2.40: Das linke System ist nach Lyapunov instabil, wird sich aber nie weit von den Anfangsbedingungen entfernen. Das rechte System ist nach Lyapunov stabil, kann sich aber schon bei geringen Störungen sehr weit von den Anfangsbedingungen entfernen.

## 2.8.4 Attraktoren

Eine stabile Lösung  $\vec{q}(\vec{q}_0, t)$  wird als asymptotisch stabil bezeichnet, wenn sie alle benachbarten Trajektorien “anzieht”, d.h. wenn eine Distanz  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass für alle Anfangsbedingungen  $\vec{q}'_0$  mit  $|\vec{q}_0 - \vec{q}'_0| < \varepsilon$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\vec{q} - \vec{q}'| = 0.$$

Solche Lösungen werden als Attraktoren bezeichnet. Ein einfaches Beispiel für ein freies Pendel mit Reibung

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - c\dot{x}$$

ist der Ursprung  $\dot{x} = x = 0$ , also der Gleichgewichtszustand. Dies ist offenbar ein punktförmiger Attraktor.

Es können jedoch auch nichtpunktförmige Attraktoren existieren, also Kurven, in die mehrere Trajektorien asymptotisch einmünden. Diese nennt man Grenzyklen. Beim getriebenen harmonischen Oszillator

$$\ddot{x} + \omega^2 x - c\dot{x} = F \cos(\omega t)$$

bildet die stationäre Lösung

$$x_0(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$$

einen Grenzyklus. Bei einem stabilen Attraktor sind alle Lyapunov-Exponenten negativ.

Neben den “normalen”, stabilen Attraktoren existieren sogenannte “seltsame” Attraktoren. Dabei handelt es sich nicht um Punkte (d.h. 0-dimensionale Attraktoren) oder Grenzyklen (d.h. 1-dimensionale Attraktoren), sondern um fraktale Gebilde, d.h. Objekte, deren Dimensionalität am Besten mit einer gebrochenen Zahl beschrieben werden kann. Solche Strukturen haben keine definierte Größenskala, sondern sie sehen auf allen Größenskalen ähnlich aus. Sie werden deshalb auch als selbstähnlich bezeichnet.

Da eine Phasenraumtrajektorie in zwei Dimensionen sich nicht mit sich selber schneiden kann, können solche seltsamen Attraktoren erst ab 3 Dimensionen existieren. Bei einem seltsamen Attraktor ist mindestens ein Lyapunov-Exponent positiv, die Summe der  $\lambda_i$  ist hingegen negativ.

## 2.8.5 Der Lorenz Attraktor

Ein bekanntes Beispiel für einen seltsamen Attraktor ist der Lorenz-Attraktor. Er ist genau genommen älter als der Begriff des seltsamen Attraktors, der erstmals 1971 so bezeichnet wurde. Er wird beschrieben

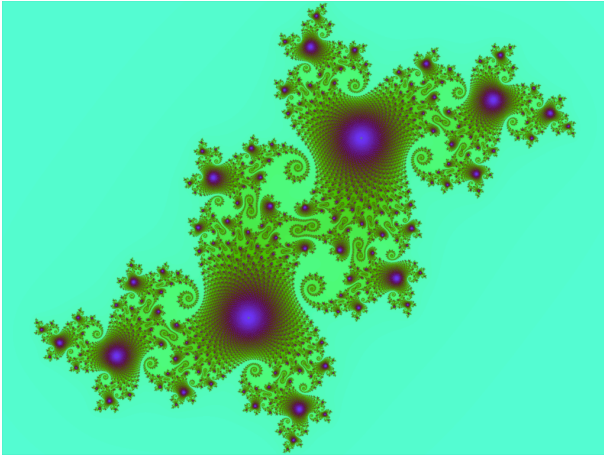


Abbildung 2.42: Ein "Julia-set" als Beispiel einer fraktalen Struktur.

durch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(y-x) \\ x(b-z)-y \\ xy-cz \end{bmatrix}.$$

Das Gleichungssystem wurde 1963 vom Meteorologen Edward N. Lorenz als Idealisierung eines hydrodynamischen Systems entwickelt. Lorenz interessierte sich für die Modellierung der Zustände in der Erdatmosphäre zum Zweck einer Langzeitvorhersage. Allerdings betonte Lorenz, dass das von ihm entwickelte System allenfalls für sehr begrenzte Parameterbereiche von  $a, b, c$  realistische Resultate liefert. Es stellt eines der einfachsten Systeme dar, welches chaotische Dynamik zeigen. Die Tatsache, dass meteorologische Systeme sich chaotisch verhalten können limitiert die Möglichkeiten der Wettervorhersage. Das Lorenz-System kann auch als Modell für die Dynamik eines Lasers verwendet werden. Speziell an diesem System ist u.a. dass es keine Dissipation aufweist und von keiner externen Kraft getrieben wird.

Abbildung 2.43 zeigt als Beispiel die zugehörige Trajektorie für die Parameter  $a = 10, b = 28, c = 8/3$ , d.h.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10(y-x) \\ 28x-y-xz \\ -\frac{8}{3}z+xy \end{bmatrix}$$

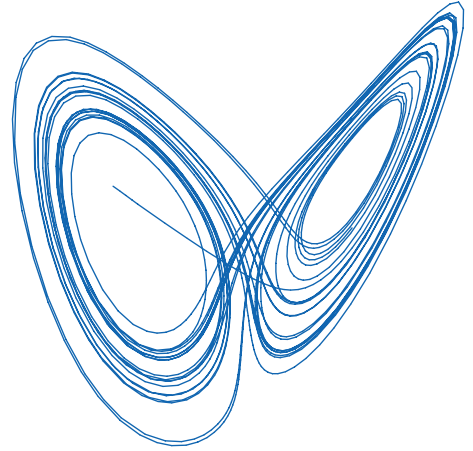


Abbildung 2.43: Lorenz Attraktor.

und die Anfangsbedingung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ 25 \end{bmatrix}$$

für das Zeitintervall von  $t = 0..30$ . Die Dynamik findet im Wesentlichen in zwei Scheiben statt, wobei das System quasi stochastisch zwischen den beiden hin und her springt.

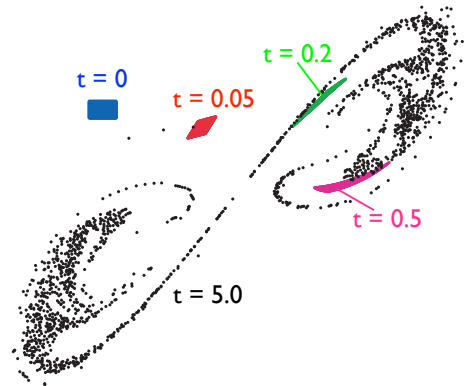


Abbildung 2.44: Zeitliche Entwicklung eines anfänglich rechteckigen Phasenraumvolumens für den Lorenz-Attraktor.

Am Lorenz-Attraktor kann man auch verfolgen, wie sich ein Volumenelement des Phasenraums verformt. Es wird dabei kleiner, verteilt sich aber über einen sehr großen Teil des Phasenraums. Abb. 2.44 verfolgt ein anfänglich rechteckiges Volumenelement

(in der  $xy$ -Ebene) entlang der Trajektorie. Nach einer genügend langen Zeit ist das Volumen so stark deformiert, dass es praktisch den gesamten Teil des zugänglichen Phasenraums abdeckt. Diesen Effekt bezeichnet man auch als topologische Transitivität oder Mischen. Dies stellt einen wichtigen Aspekt chaotischer Dynamik dar.

### 2.8.6 Poincaré-Schnitte

Die Frage nach einer chaotischen Dynamik ist verknüpft mit der Frage nach der Integrabilität. Wir haben bereits bemerkt, dass ein System von  $f$  Freiheitsgraden integrabel ist, wenn es  $f$  Integrale der Bewegung gibt, d. h.

$$I_i(q_k, p_k) = C_i = const.$$

Diese schränken die Bewegung im  $2f$ -dimensionalen Phasenraum auf eine  $f$ -dimensionale Hyperfläche ein.

Die Frage, ob es solche Integral gibt, ist nicht einfach zu beantworten. Poincaré hat am Ende des 19. Jahrhunderts die sogenannten Poincaré-Schnitte eingeführt, um die Frage iterativ zu beantworten. Dabei stellt man die Durchstoßpunkte der Trajektorie mit einem geeigneten Unterraum dar, also z.B. mit einer Ebene im dreidimensionalen Raum. Damit wird die stetige  $n$ -dimensionale Dynamik in eine diskrete  $n - 1$ -dimensionale Dynamik übergeführt.

Wir betrachten ein konservatives System mit zwei Freiheitsgraden, dessen Dynamik durch die Hamiltonfunktion  $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$  gegeben ist. Diese Funktion ist das erste Integral der Bewegung und es gilt

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = E = const.$$

Damit ist die Bewegung auf eine dreidimensionale Oberfläche in  $\mathbb{R}^4$  eingeschränkt. Lässt sich jetzt noch ein weiteres Integral

$$I_2(q_1, q_2, p_1, p_2) = C_2 = const$$

finden?

Wenn es so ein Integral gibt, dann definiert es ebenfalls eine dreidimensionale Oberfläche im Phasenraum. Für gegeben Werte  $E, C_2$  muss daher die Bewegung auf den Schnitt beider Oberflächen, also eine 2-dimensional Fläche eingeschränkt werden. Wenn wir jetzt nur die Hyperfläche  $q_2 = 0$  des allgemeinen Phasenraums  $\mathbb{R}^4$  betrachten, wird diese  $2d$ -Fläche auf eine Raumdimension projiziert, d.h die Bewegung muss sich auf einer 1-dimensionalen Kurve bewegen. Um diese zu finden, können wir numerisch die Bewegungsgleichungen integrieren und die gefundene Trajektorie mit einer geeigneten Ebene schneiden. Wie können z.B. die Werte  $(q_2, p_2)$  jedesmal wenn  $q_1 = 0$  und  $p_1 > 0$  sind als einen Punkt in der  $q_2, p_2$  Ebene des Phasenraums plotten. Existiert eine Konstante der Bewegung, so liegen somit alle Punkte auf einer eindimensionalen Kurve.

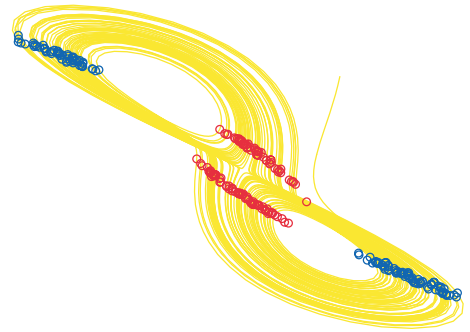


Abbildung 2.45: Poincaré Schnitt durch den Lorenz Attraktor auf der Höhe  $z = 25$ .

Abb. 2.45 zeigt als Beispiel einen Poincaré Schnitt durch den Lorenzattraktor. Die gelbe Kurve ist eine Projektion des Attraktors auf die  $xy$ -Ebene; die blauen Kreise markieren die Durchstoßpunkte durch die Ebene  $z = 25$  von unten nach oben, die roten Kreise den Durchstoß von oben nach unten.

Eine weitere typische Anwendung von Poincaré Schnitten ist der Schnitt mit einer Zeit-Ebene, d.h. das Festhalten von Punkten im Phasenraum zu bestimmten Zeiten. Ein typisches Beispiel: bei einer periodischen äußeren Kraft werden die Koordinaten des Systems im Phasenraum jeweils bei der gleichen Phase der Störung geplottet. Erreicht das System einen stabilen Grenzzyklus, so hat dieser die gleiche Frequenz wie die Störung. Das System erscheint somit im Poincaré Schnitt als einzelner Punkt.



Das Vorgehen kann man auch experimentell verwenden um festzustellen, ob ein System chaotisch ist: Man misst eine oder mehrere Größen des Systems stroboskopisch und stellt die Messresultate graphisch dar.

### 2.8.7 Populationsdynamik

Wir betrachten die Entwicklung von 2 Tierarten, von denen eine eine Raubtierspezies ist, die andere ihr Beutetier.  $x$  stellt die Bevölkerungszahl der Beutetiere und  $y$  die Bevölkerungszahl der Raubtiere dar.

Eine sinnvolle Bewegungsgleichung für die Beute ist z.B.

$$\dot{x} = x(g_1 - s_1 - a_1x - ry).$$

Hier bezeichnet  $g_1$  die Geburtsrate,  $s_1$  die natürliche Sterberate,  $a_1$  eine erhöhte Sterberate bei hoher Population (Begrenzung durch natürliche Ressourcen) und  $r$  die Rate, mit der sie von den Raubtieren gerissen werden. Die entsprechende Bewegungsgleichung für die Raubtiere lautet

$$\dot{y} = y(g_2 - s_2 - a_2y + bx).$$

Die Koeffizienten  $g_2, s_2$  und  $a_2$  haben eine analoge Bedeutung wie bei den Beutetieren,  $b$  bezeichnet eine erhöhte Fruchtbarkeit bei gutem Nahrungsangebot (hoher Beutepopulation).

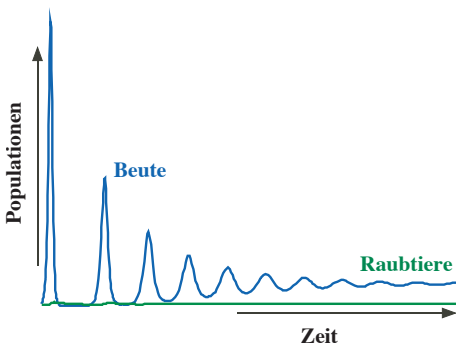


Abbildung 2.46: Oszillationen der Populationen von Raubtier und Beutetier.

Löst man diese Bewegungsgleichungen numerisch, so findet man meist keine kontinuierliche Zeitentwicklung, sondern ein oszillatorisches Verhalten,

welches je nach Parametern einem stationären Zustand zustrebt. Wir untersuchen das System, indem wir zunächst nach Fixpunkten suchen. Neben dem trivialen Fixpunkt  $x_0 = y_0 = 0$  existieren drei weitere Fixpunkte. Wir finden diese, indem wir die beiden Ableitungen =0 setzen:

$$\begin{aligned} 0 &= x(g_1 - s_1 - a_1x - ry) \\ 0 &= y(g_2 - s_2 - a_2y + bx). \end{aligned}$$

Die Lösungen sind

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= \frac{g_2 - s_2}{a_2}, \\ x_2 &= \frac{g_1 - s_1}{a_1}, & y_2 &= 0, \\ x_3 &= \frac{a_2(g_1 - s_1) - r(g_2 - s_2)}{a_1a_2 + br} \\ y_3 &= \frac{b(g_1 - s_1) + a_1(g_2 - s_2)}{a_1a_2 + br}. \end{aligned}$$

Bei den ersten beiden Lösungen existiert jeweils nur eine der beiden Spezies. Nur die dritte Lösung entspricht einem Gleichgewicht zwischen den beiden Tierarten. Das Verhältnis zwischen den beiden Arten ist

$$\frac{x_3}{y_3} = \frac{-a_2(g_1 - s_1) + r(g_2 - s_2)}{b(g_1 - s_1) + a_1(g_2 - s_2)}.$$

Einen vereinfachten Ausdruck erhalten wir, wenn wir die Beschränkung durch die Umwelt für diese Lösung vernachlässigen,  $a_1 = a_2 = 0$ :

$$x_3 = -\frac{g_2}{b}; \quad y_3 = \frac{g_1}{r}. \tag{2.43}$$

Hier haben wir außerdem die Sterberate eliminiert: es spielt jeweils nur die Netto-Geburtenrate ( $=g_i - s_i$ ) eine Rolle.

Diese Lösung ist zwar mathematisch korrekt, aber physikalisch unsinnig: Populationen können nicht negativ sein. Die Beschränkung durch die Umwelt ist also notwendig, wenn wir einen Fixpunkt, also eine stationäre Population, haben wollen. Voraussetzung für eine positive Population der Beutetiere ist

$$a_2 > r \frac{g_2}{g_1}.$$

Dieser Fixpunkt ist über einen weiten Parameterbereich stabil.



### 2.8.8 Populationsoszillationen

Es gibt allerdings doch eine Möglichkeit, dass Gleichung (2.43) einen physikalisch sinnvollen Zustand beschreibt: wenn  $g_2 < 0$ , d.h. wenn die Netto-Geburtenrate der Raubtiere negativ ist. Dies würde zu einem Verschwinden der Raubtierpopulation führen, wenn nicht die Beutetier-abhängige Geburtenrate  $bxy$  wäre. Wir schreiben die negative Netto-Geburtenrate als Sterberate  $-y s_2$  und erhalten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(g_1 - ry) \\ \dot{y} &= y(-s_2 + bx). \end{aligned}$$

Beim Beutetier haben wir die Sterberate  $s_1 = 0$  gesetzt (resp. wir betrachten  $g_1$  als die Netto-Geburtenrate). Beim Raubtier sind Geburten nur proportional zur Population des Beutetiers möglich. Dieses Gleichungssystem wird auch als Lotka-Volterra Modell bezeichnet. Dieses System hat einen Fixpunkt bei

$$x = \frac{s_2}{b} \quad y = \frac{g_1}{r}.$$

Weil das System nicht dissipativ ist, laufen Trajektorien in der Umgebung dieses Fixpunktes nicht darauf zu, sondern bilden Ellipsen um diesen Punkt. Größere Kurven sind verformte Ellipsen, wie in Abb. 2.47 gezeigt.

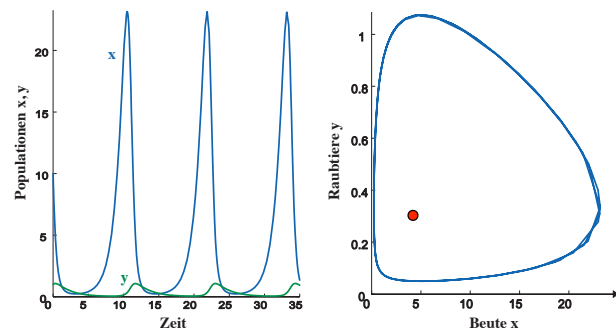


Abbildung 2.47: Oszillationen der Populationen von Raubtier und Beutetier im Lotka-Volterra Modell.

Abb. 2.47 zeigt typische Populationoszillationen im Lotka-Volterra Modell. Wenn die Population der

Raubtiere niedrig ist, steigt die Population der Beutetiere exponentiell an. Dies führt dann (etwas verzögert) zu einer Zunahme der Population bei den Raubtieren. Dadurch bricht die Population der Beutetiere ein, und, wiederum verzögert, die Population der Raubtiere. Danach beginnt der Zyklus von vorn.

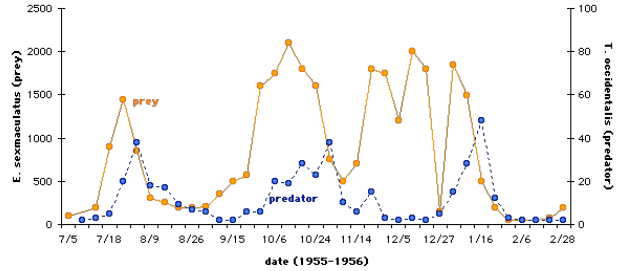


Abbildung 2.48: Oszillationen der Populationen von Raubtier und Beutetier; aus C.B. Huffaker, Experimental studies on predation: dispersion factors and predator-prey oscillations; Hilgardia 27, 343 (1958).

Solche Oszillationen hat man auch tatsächlich in vielen Fällen beobachtet. Abb. zeigt ein Beispiel.

### 2.8.9 Verzögerte Rückkopplung

Das hier betrachtete Modell ist stark vereinfacht, und einige Punkte, die bei einem realistischeren Modell zu berücksichtigen wären, führen auch zu Oszillationen. Dazu gehört z.B. eine zeitliche Verzögerung: So führt eine erhöhte Geburtenrate jetzt zu einem späteren Zeitpunkt zu geringeren Ressourcen, höherem Bedarf an Beutetieren und höheren Todesraten. Die Bewegungsgleichungen enthalten dann Terme der Art

$$\dot{x} = x(t)(1 - x(t - \tau)),$$

wobei  $\tau$  die Verzögerungszeit darstellt. Wenn wir in diesem System eine dimensionslose Zeit  $z = at$  einführen und  $c = a\tau$  definieren, erhalten wir

$$\frac{dx}{dz} = x(z)(1 - x(z - c)).$$

Dieses System hat offenbar zwei Fixpunkte: den trivialen  $x = 0$  und außerdem  $x = 1$ . Für  $c = 0$  ist der

erste instabil, der zweite stabil. Wir können um diesen linearisieren, indem wir

$$x = 1 + u$$

setzen und erhalten

$$\frac{du}{dz} = (1 + u(z))(-u(z - c)) \approx -u(z - c). \quad (2.44)$$

Ein sinnvoller Lösungsansatz ist somit eine Exponentialfunktion,

$$u(z) = u_0 e^{\lambda z}.$$

Einsetzen in (2.44) ergibt

$$\lambda u(z) = -u(z - c) = -u(z) e^{-\lambda c}$$

und somit

$$\lambda = -e^{-\lambda c}.$$

Das System hat somit stabile Lösungen ( $\lambda < 0$ ) sofern  $c$  genügend klein ist (d.h. sofern die Verzögerung genügend kurz ist). Betrachten wir auch komplexe Raten  $\lambda$ , so erhalten wir oszillatorische Lösungen mit  $\Re\{\lambda\} = 0$  für  $c = \pi/2$  und  $\lambda = i$ . In diesem Fall ist das System periodisch, mit der Periode  $T = 4\tau$ . Diese Art von Dynamik findet man in sehr unterschiedlichen Systemen, u.a. in der Elektronik, wo zeitlich verzögerte Rückkopplungen oft zu Oszillationen führen.

### 2.8.10 Chemische Kinetik

Ähnlich wie die Populationen von Organismen verhalten sich auch die Populationen von Molekülen. Hier werden die Konzentrationen durch chemische Reaktionen verändert, welche eine Spezies in eine oder mehrere andere überführen. Während die meisten Reaktionen auf ein Gleichgewicht zulaufen, gibt es auch eine Reihe von Reaktionen, welche oszillatorische Lösungen erlauben. Dies geschieht vor allem wenn eine Rückkopplung existiert, z.B. wenn ein Reaktionsprodukt die Reaktion beschleunigt. Dadurch entstehen nichtlineare Bewegungsgleichungen.

Ein klassisches Beispiel ist die Bjeloussow-Zhabotinski-Reaktion (BZ-Reaktion): bei ihr

oszillieren die Konzentrationen der beteiligten Moleküle, und diese Änderungen kann man über einen Farbumschlag beobachten. Dabei wird Malonsäure  $\text{CH}_2(\text{COOH})_2$  in Gegenwart von Bromat ( $\text{BrO}_3^-$ ) teils durch  $\text{CO}_2$ -Abspaltung zu Ameisensäure  $\text{HCOOH}$ , teils zu Brom-Malonsäure. Anwesende Metallionen wie  $\text{Ce}^{3+/4+}$  ändern dabei periodisch Wertigkeit und Farbe, oft dramatisch von violett zu gelb oder rot zu blau. Diese Periodizität, die im Reagenzglas nach vielen Minuten erlischt, lässt sich unbegrenzt aufrechterhalten, wenn man immer wieder frische Reaktanten zu- und Produkte abführt. Die Reaktion strebt keinem Fixpunkt zu, sondern einem Grenzyklus.

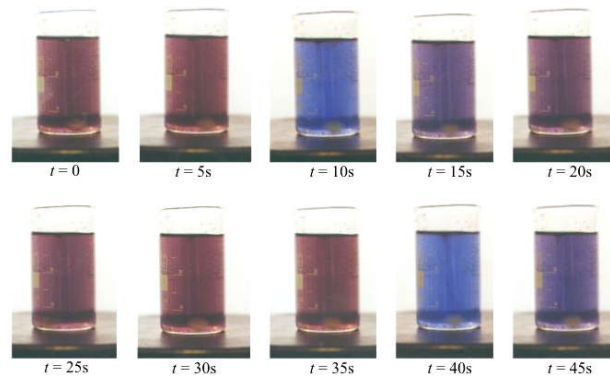


Abbildung 2.49: Bjeloussow-Zhabotinsky Reaktion in einem gerührten (homogen gemischten) Gefäß.

Ist die Reaktion nicht homogen, also nicht an allen Orten im Reaktionsgefäß gleich weit fortgeschritten, so können auch räumliche Muster entstehen.

Inzwischen kennt man Dutzende oszillierende Reaktionen, in denen sich auch verblüffende räumliche Muster entwickeln und verändern. Alle laufen fern vom Gleichgewicht (im Durchflussreaktor) und setzen mindestens eine Rückkopplung (Autokatalyse) voraus.

### 2.8.11 Stabilität von Bahnen im Sonnensystem

Ein wichtiger Beitrag zu empfindlicher Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen sind Resonanzeffekte. Diese treten z.B. dann auf, wenn zwei Frei-

heitsgrade aneinander gekoppelt werden, deren natürliche Resonanzfrequenzen gleich oder fast gleich sind. Darüber hinaus können auch Resonanzen auftreten, wenn die natürlichen Resonanzfrequenzen der beiden gekoppelten Systeme in einem einfachen Verhältnis stehen, wie z.B. 1:2 oder 2:3. Diesen Effekt kann man z.B. in unserem Sonnensystem beobachten wenn man den Asteroidengürtel zwischen Mars und Jupiter beobachtet.

Asteroid Main-Belt Distribution  
Kirkwood Gaps

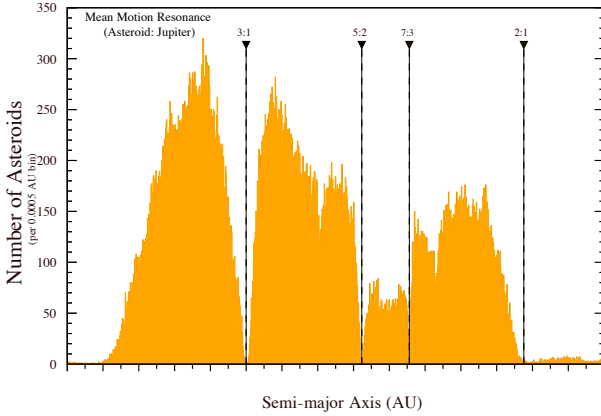


Abbildung 2.50: Häufigkeitsverteilung der Asteroiden als Funktion des Abstandes von der Sonne.

Umlaufbahnen, deren Umlauffrequenzen in einem rationalen Verhältnis zur Jupiter-Umlauffrequenz liegen, werden nicht beobachtet. Die wichtigsten Lücken entsprechen 3:1, 5:2, 7:3 und 2:1 Resonanzen. Bei diesen Resonanzen wurden die Bahnen der Asteroiden zu stark gestört.

Damit eng verwandt sind die Teilungen der Saturnringe: Sie entsprechen rationalen Verhältnissen der Umlauffrequenz der Saturn-Monde Mimas (Umlaufzeit 0.9 Tage) und Enceladus (1.4 Tage). Die Cassini Teilung ist bei  $\omega \approx 2\omega_{Mimas}$  zu finden. Der Radius des Orbits von Mimas beträgt 185520 km, derjenige der Cassini Teilung 120000 km.

Lagrange konnte beweisen, dass das im Allgemeinen analytisch nicht lösbare Dreikörperproblem für einige Spezialfälle doch analytisch lösbar ist: Für zwei umeinander kreisende Körper gibt es für einen dritten Körper – mit im Verhältnis zu den anderen beiden verschwindend kleiner Masse – fünf solcher

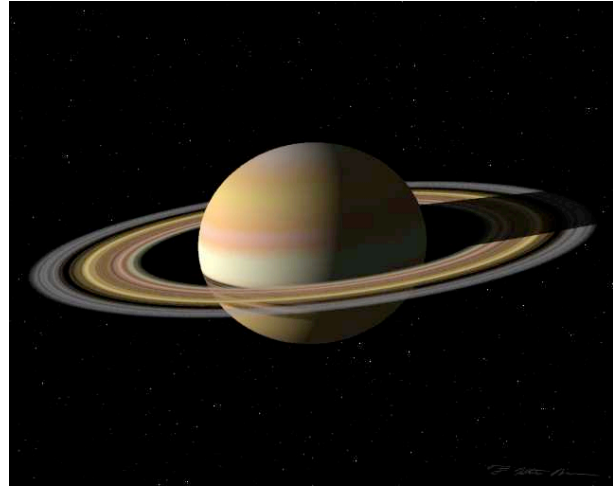


Abbildung 2.51: Saturnringe.

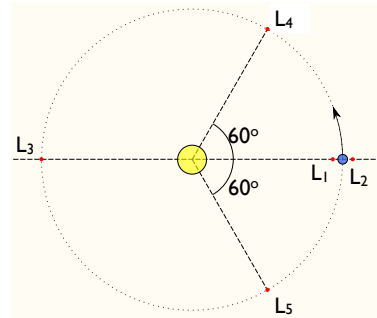


Abbildung 2.52: Lagrange-Punkte.

Lagrangepunkte. Die Punkte nennt man Lagrange-Punkte 1 bis 5 oder kurz L1 bis L5. Nur in den Punkten L4 und L5 liegt ein stabiles Gleichgewicht vor, bei L1 bis L3 dagegen ein labiles. Daher können sich in der Umgebung von L1 bis L3 natürliche Himmelskörper nicht auf Dauer halten.

Der L2-Punkt des Systems Erde-Sonne befindet sich ca. 1.5 Mio km außerhalb der Erdbahn. Er wird gerne für Weltraumteleskope verwendet. Da ein Körper im L2 dieselbe Orientierung in Bezug auf Sonne und Erde beibehält, ist dort die Abschirmung (vor Sonnenstrahlung) und Kalibrierung des Satelliten wesentlich einfacher. Dort befinden sich z.B. die Satelliten WMAP, Herschel und Planck.

### 2.8.12 Bifurkationen

Wie bereits diskutiert, kann der Charakter der Lösungen einer Bewegungsgleichung sich qualitativ ändern, wenn ein Systemparameter eine bestimmte Grenze überschreitet. So kann z.B. die Zahl der stabilen Trajektorien sich ändern. Man spricht in einem solchen Fall von "Bifurkation".

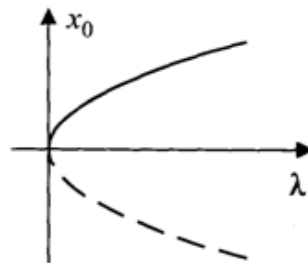


Abbildung 2.53: Sattelpunkt-Bifurkation.

#### Sattelpunkt-Bifurkation

Wir betrachten als Beispiel die Bewegungsgleichung

$$\dot{x} = \lambda - x^2 \tag{2.45}$$

und suchen nach Fixpunkten, d.h. nach Punkten, bei denen  $\dot{x} = 0$ . Offenbar hängt die Zahl der Lösungen vom Parameter  $\lambda$  ab: Für  $\lambda < 0$  existiert keine Lösung. Für  $\lambda > 0$  existieren 2 Lösungen

$$x_0 = \pm\sqrt{\lambda}.$$

Die beiden Lösungen unterscheiden sich bezüglich ihrer Stabilität. Wir untersuchen die Stabilität, indem wir die Bewegungsgleichung in der Nähe der Fixpunkte linearisieren. Für  $x_0 = +\sqrt{\lambda}$  setzen wir

$$\varepsilon = x - \sqrt{\lambda}$$

und erhalten die linearisierte Differentialgleichung

$$\dot{\varepsilon} = -2\varepsilon\sqrt{\lambda}$$

mit der Lösung

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0)e^{-2\sqrt{\lambda}t}.$$

Für  $x_0 = +\sqrt{\lambda}$  wird die Auslenkung  $\varepsilon$  somit gedämpft, d.h. es handelt sich um einen stabilen Fixpunkt.

Für den anderen Fixpunkt,  $x_0 = -\sqrt{\lambda}$  setzen wir analog

$$\varepsilon = x + \sqrt{\lambda}.$$

Die linearisierte Differentialgleichung

$$\dot{\varepsilon} = 2\varepsilon\sqrt{\lambda}$$

hat die Lösung

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0)e^{2\sqrt{\lambda}t}.$$

Hier handelt es sich somit um einen instabilen Fixpunkt.

#### Heugabel-Bifurkation

Wenn wir in der Gleichung 2.45 die rechte Seite mit  $x$  multiplizieren,

$$\dot{x} = \lambda x - x^3,$$

erhalten wir einen ersten Fixpunkt bei  $x_0 = 0$  und, für  $\lambda > 0$  zusätzlich die beiden Fixpunkte bei  $x_0 = \pm\sqrt{\lambda}$ .

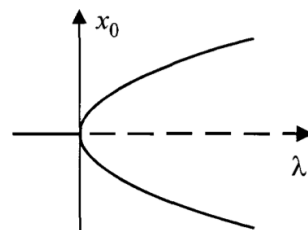


Abbildung 2.54: Heugabel-Bifurkation.

In diesem Fall sind die Fixpunkte bei  $x_0 = \pm\sqrt{\lambda}$  stabil, der Fixpunkt bei  $x_0 = 0$  ist stabil für  $\lambda < 0$ , aber instabil für  $\lambda > 0$ .

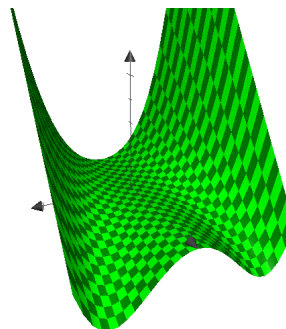


Abbildung 2.55: Heugabel-Bifurkation.

Das gleiche erkennt man auch, wenn man das entsprechende Potenzial betrachtet. Abbildung 2.55

zeigt eine Darstellung des Potentials: entlang der Achse  $x = 0$  verschwindet es. Für  $\lambda < 0$  findet man ein einzelnes Minimum bei  $x = 0$ , für  $\lambda > 0$  zwei Minima bei  $\pm\sqrt{\lambda}$  sowie ein Maximum, d.h. einen instabilen Fixpunkt, bei  $x = 0$ .

### 2.8.13 Wege ins Chaos

Obwohl es keine allgemeinen Kriterien für das Auftreten von Chaos gibt, haben wir doch einige Hinweise gefunden, wann wir Chaos erwarten können: mehrere gekoppelte Freiheitsgrade und nichtlineare Dynamik. Das Wetter ist das bekannteste Beispiel für deterministisches Chaos, wo trotz strenger Abhängigkeit des Folgezustandes vom vorhergehenden keine langfristige Vorhersage möglich ist. Winzige Änderungen in den Anfangsbedingungen wachsen exponentiell, bis die entsprechenden Trajektorien weit auseinander gelaufen sind. Auch dann könnten sie noch in einen gemeinsamen Fixpunkt oder Grenzzyklus münden. Chaos liegt vor, wenn das Phasenporträt keinen solchen gewöhnlichen Attraktor enthält, sondern einen seltsamen Attraktor.

In vielen Systemen kann man, je nach Parameterbereich, sowohl reguläre wie auch chaotische Dynamik beobachten. Außerdem gibt es Zwischenschritte. Einige Szenarien treten in unterschiedlichen Systemen auf, so dass sie auch allgemein diskutiert wurden. Dazu gehört z.B. das Szenario der wiederholten Periodenverdoppelung: Ein System ist z.B. bei kleiner Störung periodisch, d.h. es besitzt einen Grenzzyklus als stabilen Attraktor.

Mit zunehmender Stärke der Störung kann das System vom periodischen Verhalten abweichen; in diesem Fall verdoppelt sich die Periode, d.h. das System kehrt erst nach 2 Umläufen wieder zum Ausgangszustand zurück. Die Periode kann dann noch mehrfach verdoppelt werden, so dass sie nach  $k$  Verdopplungen

$$T_k = T_1 2^{k-1}$$

beträgt.

Die Periodenverdoppelung kann man schön anhand von Poincaré Schnitten verfolgen. Bei einem periodischen System, welches wir stroboskopisch beobachten, erhalten wir nur einen einzelnen Punkt. Nach

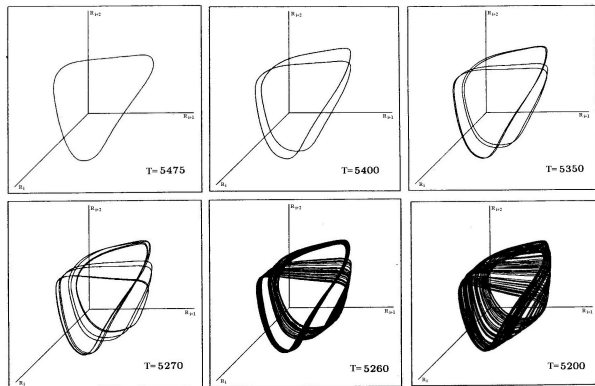


Abbildung 2.56: Periodenverdoppelung, dargestellt im Phasenraum.

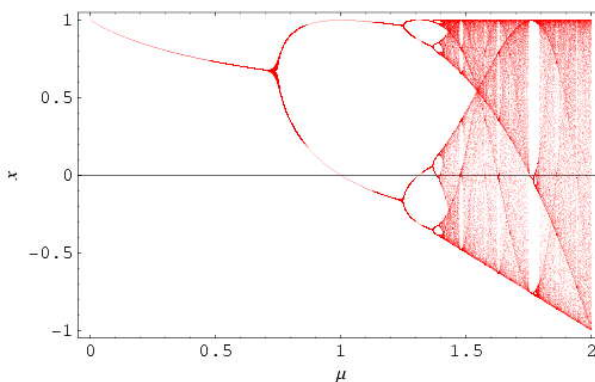


Abbildung 2.57: Periodenverdoppelung, dargestellt als eine Reihe von Poincaré Schnitten als Funktion eines Kontrollparameters.

der Periodenverdoppelung findet man 2 Punkte, nach  $k$  Periodenverdopplungen  $2^k$  Punkte. Feigenbaum konnte zeigen, dass in vielen Systemen die Abstände zwischen den Verdopplungen inem einfachen Gesetz folgen. Dieser Weg zum Chaos wird deshalb auch als "Feigenbaum-Szenario" bezeichnet. Feigenbaum konnte zeigen, dass der Abstand zwischen zwei Verdopplungspunkten exponentiell abnimmt, so dass die Periodendauer bei einem endlichen Wert des Kontrollparameters unendlich wird. Eine unendliche Periodendauer entspricht einem chaotischen System.