

Die Generatoren \vec{M}_i , $i = x, y, z$, bilden eine (Lie)-Algebra mit folgenden Eigenschaften

$$[M_i, M_j] \equiv M_i M_j - M_j M_i = \sum_k \varepsilon_{ij}^k M_k$$

Wir können auch zeigen (Übung) dass ebenfalls

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ij}^k L_k$$

gilt. Wir überprüfen diese an Hand von L_x, L_y

$$\begin{aligned} L_x &= y p_z - z p_y \\ L_y &= z p_x - x p_z \\ \{L_x, L_y\} &= \sum_{k=x,y,z} \left(\frac{\partial L_x}{\partial x_k} \frac{\partial L_y}{\partial p_k} - \frac{\partial L_x}{\partial p_k} \frac{\partial L_y}{\partial x_k} \right) \\ &= (-p_y(-x) - y p_x) = L_z \end{aligned}$$

exemplarisch nach.

2.7 Nichtlineare Dynamik

2.7.1 Determinismus vs. Chaos

Wenn wir die Bewegungsgleichungen eines Systems kennen, können wir grundsätzlich voraussagen, wie es sich in Zukunft verhalten wird: das System ist deterministisch. Bei den meisten bisher diskutierten Systemen bedeutet dies auch, dass sich für zwei Anfangszustände, die sich nur wenig unterscheiden, das Verhalten in der Zukunft nicht wesentlich unterscheidet.

Diese Beobachtung führt nicht nur in der Physik zu großen philosophischen Debatten. So schrieb z.B. Laplace 1814 in seinem "Essai philosophique sur les probabilités:

Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation

respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux. — Pierre-Simon Laplace, Essai philosophique sur les probabilités (1814).

Vom physikalischen Standpunkt aus muss diese Aussage in 2 Punkten revidiert werden:

- Bei Systemen, die sich quantenmechanisch verhalten, erhält man aus der Lösung der Bewegungsgleichungen im Allgemeinen nur Aussagen über die Wahrscheinlichkeiten bei zukünftigen Messungen, also nur über die Statistik der Messungen, und keine Aussagen über den Ausgang von einzelnen Messungen.

Dieser Punkt wird im vierten Semester, im Rahmen der Quantenmechanik, genauer diskutiert werden. Hier soll der zweite Punkte genauer betrachtet werden:

- Es gibt viele Systeme, bei denen fast identische Anfangsbedingungen völlig verschiedene Lösungen haben. Da man den Zustand eines Systems (also die Anfangsbedingung) immer nur mit endlicher Präzision kennt (u.a. auf Grund der quantenmechanischen Unschärfe), kann deshalb nur über einen beschränkten Zeitraum eine Voraussage gemacht werden. Das gleiche gilt für die Vergangenheit: Die Zahl der Anfangszustände, welche zum heute bekannten Zustand geführt haben können, ist sehr groß. Des gleichen können sehr kleine äußere Störungen sehr großen Einfluss haben. Solche Systeme werden häufig als chaotisch bezeichnet.

Abb. 2.27 zeigt dies schematisch. Ein typisches Beispiel ist das Billardspiel: bei jedem Stoß führt die Abweichung vom zentralen Stoß zu einer Vergrößerung des Winkels und damit zu einer größeren Abweichung beim nächsten Stoß. Dies gilt allgemein für Stöße zwischen harten Kugeln, die auch als gutes Modell für die Dynamik von Molekülen verwendet werden können.

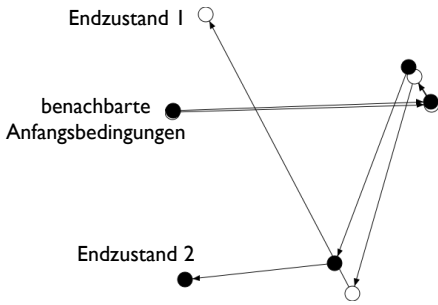


Abbildung 2.27: Benachbarte Anfangsbedingungen können zu qualitativ unterschiedlichem Verhalten führen.

Weitere Beispiele von Systemen, bei denen benachbarte Anfangsbedingungen zu sehr unterschiedlichem Verhalten führen, sind gekoppelte nichtlineare Oszillatoren, Doppelpendel, Federpendel oder Dreikörpersysteme. Dieses Verhalten ist im Allgemeinen nicht global, sondern es gilt nur für bestimmte Parameterbereiche und für bestimmte Bereiche von Anfangsbedingungen. Eines der einfachsten Beispiele ist das einer Kugel auf einem Sattelpunkt: je nach Anfangsbedingungen rollt sie auf die eine oder andere Seite hinunter oder bleibt dort liegen.

Ein sehr wichtiges Beispiel ist auch die Dynamik des Sonnensystems: Die Keplerschen Gesetze legen es nahe, zu glauben, die Bahnen der Planeten um die Sonne seien stabil und leicht zu berechnen. Dies gilt allerdings nur in der einfachsten Näherung, bei der ein einzelner Planet in großem Abstand um die Sonne kreist. Berücksichtigt man die Wechselwirkung zwischen mehreren Himmelskörpern, so erhält man schnell chaotische Trajektorien: Einzelne Körper können aus dem Sonnensystem herausgeschleudert werden, wobei der Zeitpunkt praktisch nicht vorhergesagt werden kann.

Wann chaotisches Verhalten auftritt ist im Allgemeinen nicht vorhersagbar. Es gibt jedoch Kriterien, die einem erlauben, vorherzusagen, dass chaotisches Verhalten nicht auftritt. Einige Beispiele sind

- Die Bewegungsgleichungen haben analytische Lösungen.
- Die Bewegungsgleichungen eines Systems sind nicht explizit zeitabhängig und bestehen aus ei-

ner einzigen Differentialgleichung (maximal) zweiter Ordnung.

- Die Lösung der Bewegungsgleichungen kann auf eindimensionale Integrale zurückgeführt werden.

Wenn eine dieser Bedingungen erfüllt ist, so tritt kein chaotisches Verhalten auf.

Ende des 19. Jahrhunderts gewann Henri Poincaré einen Preis mit dem Lösungsansatz für die Frage, ob das Sonnensystem stabil ist. Er konnte zeigen, dass dieses nicht der Fall ist und die Reihen zur Divergenz neigen, die durch interne Resonanzen bedingt sind. Manche Quellen geben dies als die Geburtsstunde der Chaosforschung an, es dauerte jedoch bis in die Mitte des 20. Jahrhunderts bis der Lösungsansatz von Poincaré mit Hilfe von Computern brauchbar umgesetzt werden konnte.

2.7.2 Superpositionsprinzip

Bisher haben wir hauptsächlich lineare Bewegungsgleichungen betrachtet, also Gleichungen der Art

$$\dot{x} = ax.$$

Für die Lösungen solcher Gleichungen gilt allgemein das Superpositionsprinzip:

- Sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen der Bewegungsgleichung, so ist auch die Linearkombination $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ (mit beliebigen Koeffizienten c_1, c_2) eine Lösung.

Der Beweis erfolgt einfach durch Einsetzen. Das einfachste Beispiel ist der harmonische Oszillator: Hier kann man z.B. beliebige Lösungen als Linearkombination von

$$x_1(t) = \cos(\Omega t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = \sin(\Omega t)$$

darstellen. Offensichtlich ist in einem solchen System die Vorhersagbarkeit sehr gut; benachbarte Anfangsbedingungen bleiben auch in der weiteren Zeitentwicklung "benachbart".

Das Superpositionsprinzip ist auch sehr wichtig in der Quantenmechanik, da dort die relevante Bewegungsgleichung (die Schrödingergleichung) linear ist.

Das Superpositionsprinzip gilt nicht mehr wenn die Bewegungsgleichungen nichtlinear werden. Ein wichtiges Beispiel hatten wir in Kapitel 2.6.4 gesehen: Dort veränderte sich die Frequenz mit der Amplitude, d.h. sie war abhängig von den Anfangsbedingungen. Wir betrachten hier einen ähnlichen Fall.

2.7.3 Mathematisches Pendel

Während man beim physikalischen Pendel (\approx harmonischer Oszillator) annimmt, dass die Periode unabhängig von der Auslenkung ist, findet man in Wirklichkeit, dass die Periode mit der Auslenkung zunimmt.

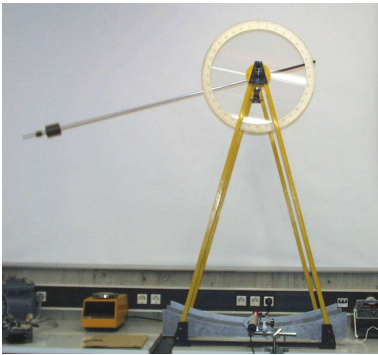


Abbildung 2.28: Exp. 001 Ebenes Pendel.

Berechnung der Periode : siehe Übungen

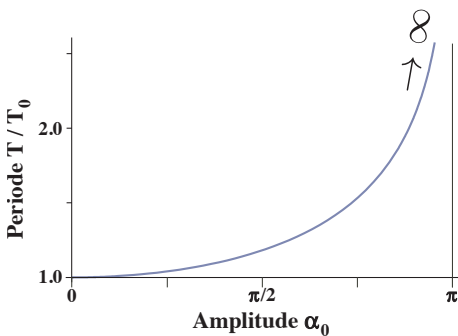


Abbildung 2.29: Periodendauer des mathematischen Pendels als Funktion der Amplitude in Einheiten der Periode des physikalischen Pendels, $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

Die Periodendauer geht gegen unendlich wenn

$\alpha \rightarrow \pi$.

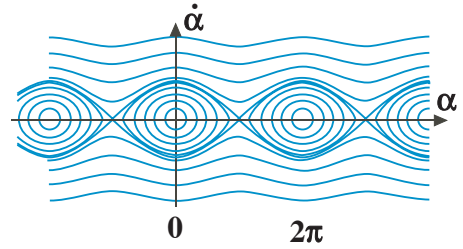


Abbildung 2.30: Phasenraumtrajektorien für das mathematische Pendel.

Abbildung 2.30 zeigt die Bewegung des mathematischen Pendels im Phasenraum: die geschlossenen Kurven stellen die eigentliche Pendelbewegung dar. Bei geringer Amplitude sind es Ellipsen, sie sich bei zunehmender Amplitude entlang der horizontalen (α -) Achse verlängern und bei $\alpha = \pi$ Spitzen bilden. Bei den horizontal verlaufenden Kurven ist die Geschwindigkeit groß genug, dass das Pendel rotiert, also die Bewegungsrichtung konstant ist. Zwischen den beiden Bereichen verläuft die “Separatrix”. Befindet sich das System auf dieser Kurve, so ist es nicht stabil. Immer wenn es den Punkt $\alpha = \pi$ erreicht, also senkrecht nach oben steht, gibt es zwei mögliche Richtung, in die es sich weiter bewegen kann. Die Annäherung an diesen kritischen Punkt benötigt jedoch unendlich lange, da $\dot{\alpha} \rightarrow 0$ geht.

2.7.4 Fixpunkte und Trajektorien

Wenn wir ein System mit n Freiheitsgraden mit Hilfe von n Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung diskutieren, ist es natürlich, die Lösung in einem n -dimensionalen Raum zu betrachten. Wie wir oben gesehen haben, ist es aber auch nützlich, die n Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung in $2n$ Bewegungsgleichungen erster Ordnung umzuwandeln. Dann ist es auch sinnvoll, die Lösungen als Funktion dieser $2n$ Parameter (also z.B. n Ortskoordinaten und n Impulse) zu diskutieren. Ein Vorteil dieser Phasenraum-Darstellung ist z.B. dass zu jedem Punkt auch die Ableitung, also die Bewegungsrichtung vorgegeben ist.

Für einen Freiheitsgrad, also eine Ortskoordinate und zugehörigen Impuls, ergibt eine Differentialgleichung erster Ordnung,

$$\dot{x} = ax + b$$

eine Gerade. Das System bewegt sich auf dieser Gerade immer in einer Richtung (Determinismus). Ist die Steigung $a \neq 0$, so schneidet die Gerade die x -Achse.

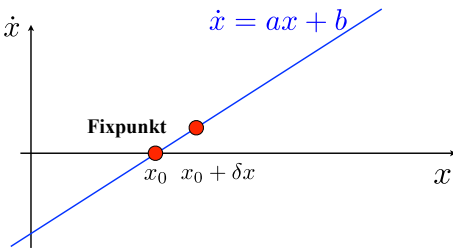


Abbildung 2.31: Fixpunkt in einem linearen System erster Ordnung.

An dieser Stelle ist die Geschwindigkeit $\dot{x} = 0$, d.h. das System kommt zur Ruhe. Es handelt sich somit um einen Fixpunkt. Die Nullstelle $x_0 = -b/a$ ist stabil, wenn die Steigung $a < 0$: Für Werte $x < x_0$ ist dann $\dot{x} > 0$, d.h. das System bewegt sich nach rechts, nähert sich also der Nullstelle. Für $x > x_0$ ist $\dot{x} < 0$, d.h. das System bewegt sich nach links, nähert sich ebenfalls der Nullstelle. In der Abbildung ist eine instabile Situation dargestellt ($a > 0$): Am Punkt $x_0 + \delta x$ hat die Ableitung

$$\dot{x}(x_0 + \delta x) = a\delta x$$

das gleiche Vorzeichen wie δx . Somit wächst die Abweichung.

Sind die Bewegungsgleichungen nicht linear, so sind die Trajektorien keine Geraden mehr. Im Falle des harmonischen Oszillators, z.B., sind die Trajektorien geschlossen,

$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos(\Omega t + \varphi) \\ -\Omega a \sin(\Omega t + \varphi) \end{pmatrix}.$$

Dies entspricht einer Ellipse. Unterschiedliche Anfangsbedingungen führen zu unterschiedlichen Ellipsen. So lange das System deterministisch bleibt, können sich die unterschiedlichen Trajektorien nicht

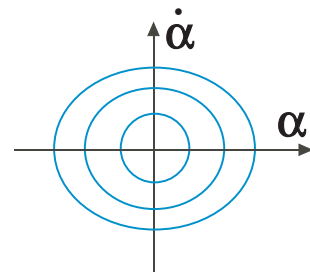


Abbildung 2.32: Harmonischer Oszillator im Phasenraum.

schneiden: an einem gegebenen Punkt im Phasenraum ist die zeitliche Entwicklung bestimmt und damit die Richtung, in die sich das System weiter bewegt.

Dies gilt allerdings nur, solange wir den vollständigen Phasenraum betrachten. Besitzt das System mehr Freiheitsgrade als der Unterraum, den wir betrachten, in den wir somit projizieren, können Überschneidungen auftreten.

2.7.5 Duffing Oszillator

Als nächstes betrachten wir einen harmonischen Oszillator, bei dem wir zusätzlich zum quadratischen Potenzial einen Term vierter Ordnung berücksichtigen:

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Dx + Ex^3 = F_0 \cos \Omega t.$$

Dieses System wird als Duffing Oszillator bezeichnet. Der Term $C\dot{x}$ beschreibt eine Dämpfung, die rechte Seite eine periodische externe Kraft. Das System liefert Beispiele für reguläre, wie auch chaotische Dynamik.

Für dieses System existiert keine allgemeine analytische Lösung, lediglich verschiedene Näherungsmethoden.

- Über eine Fourier-Reihe kann man die Bewegungsgleichung beliebig genau annähern.
- Für kleine Werte von E kann man das System als gestörten harmonischen Oszillator behandeln.

- Die Frobenius-Methode liefert eine komplizierte aber brauchbare Lösung.
- Numerische Methoden.
- Für den Spezialfall der verschwindenden Dämpfung ($C \rightarrow 0$) und verschwindender externer Kraft ($F_0 \rightarrow 0$) erhält man eine Lösung mit Hilfe elliptischer Funktionen.

Wir betrachten zunächst das System ohne Dämpfung:

$$m\ddot{x} + Dx + Ex^3 = F_0 \cos \Omega t.$$

Für bestimmte Werte der Parameter und Anfangsbedingungen erhält man wie beim harmonischen Oszillator eine stationäre Lösung. Ein Näherung dafür erhalten wir z.B., mit dem Ansatz

$$x(t) = x_1 \cos(\Omega t).$$

Einsetzen ergibt

$$-mx_1\Omega^2 + Dx_1 + Ex_1^3 = F_0,$$

wobei wir Terme höherer Ordnung, wie z.B. $\propto x_1^3 \cos^3(\Omega t)$ nicht berücksichtigt haben. In dieser Näherung gibt es drei stationäre Lösungen

$$x_{1,1} = \frac{(\beta + 27E^2F_0)^{1/3}}{32^{1/3}E} - \frac{2^{1/3}(D - m\Omega^2)}{(\beta + 27E^2F_0)^{1/3}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{(1 - i\sqrt{3})(\beta + 27E^2F_0)^{1/3}}{62^{1/3}E} + \frac{(1 + i\sqrt{3})(D - m\Omega^2)}{2^{2/3}(\beta + 27E^2F_0)^{1/3}}$$

$$x_{1,3} = -\frac{(1 + i\sqrt{3})(\beta + 27E^2F_0)^{1/3}}{62^{1/3}E} + \frac{(1 - i\sqrt{3})(D - m\Omega^2)}{2^{2/3}(\beta + 27E^2F_0)^{1/3}}$$

mit

$$\beta = \sqrt{729E^4F_0^2 + 108E^3(D - m\Omega^2)^3}.$$

Diese fallen zusammen oberhalb einer kritischen Frequenz

$$\omega_k = \sqrt{\frac{1}{m} \left(D + \frac{9}{4} \left(\frac{2}{3} EF_0^2 \right)^{1/3} \right)}.$$

Für $\Omega < \omega_k$ existieren 3 Äste, sofern

$$D > \frac{9}{4} \left(\frac{2}{3} EF_0^2 \right)^{1/3}.$$

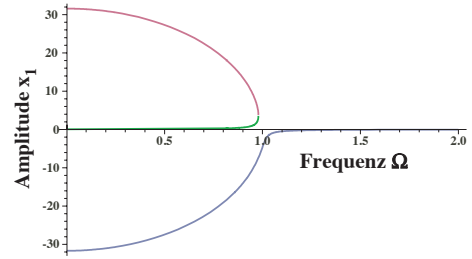


Abbildung 2.33: Stationäre Amplituden des Duffing-Oszillators für die Parameter $F_0 = 0.1, E = -10^{-3}, m = 1, D = 1$.

Eine genauere Betrachtung zeigt, dass die beiden Lösungen $x_{1,2}$ und $x_{1,3}$ nicht stabil sind: Es handelt sich um instabile Fixpunkte. Für Amplituden oberhalb dieser Werte läuft das System auseinander, d.h. das Potenzial nimmt ab.

2.7.6 Spezialfälle

Freier Oszillator ohne Dämpfung

Wir betrachten den Fall ohne Dämpfung und ohne äußere Kraft

$$m\ddot{x} + Dx + Ex^3 = 0.$$

Wir können das auch schreiben als

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\beta x^3 = 0,$$

d.h. als gestörten harmonischen Oszillator mit

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad 2\beta = \frac{E}{m}.$$

Multiplikation mit \dot{x} gibt

$$\dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2 x\dot{x} + 2\beta x^3\dot{x} = 0.$$

Dies können wir schreiben als

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2} \beta x^4 \right) = 0.$$

Somit ist die Größe

$$h = \dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 + \beta x^4$$

eine Erhaltungsgröße.

Doppelminimumpotenzial

Eine andere interessante Situation erhalten wir, wenn wir $D < 0$ und $E > 0$ wählen: der quadratische Term ist abstoßend, der Term vierter Ordnung anziehend.

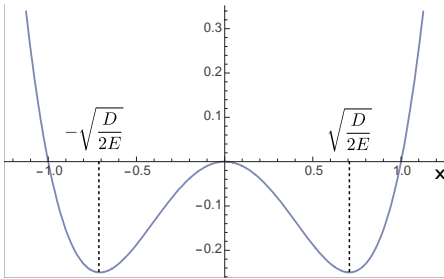


Abbildung 2.34: Doppelminimum Potenzial für $D = -1, E = 1$.

Das resultierende System besitzt am Ursprung ein Maximum und bei

$$x_0 = \pm \sqrt{\frac{D}{2E}}$$

zwei Minima.

2.7.7 Zeitabhängigkeit

Wir schreiben diese Bewegungsgleichung dritter Ordnung als ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung indem wir als Variablen den Ort x , den Impuls $p = m\dot{x}$ und eine modifizierte Zeit $\tau = \Omega t$ verwenden:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{C}{m}p - Dx - Ex^3 + F_0 \cos \tau \\ \dot{\tau} &= \Omega. \end{aligned} \tag{2.42}$$

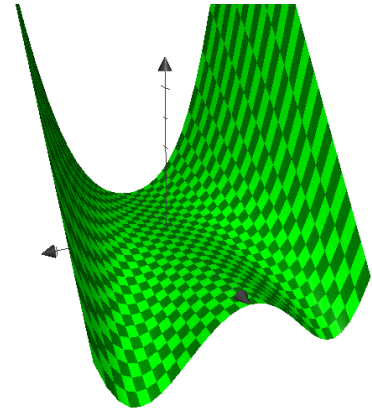


Abbildung 2.35: Doppelminimum Potenzial in Abhängigkeit von der Stärke D des quadratischen Terms. Im Ursprung ist $D = 0$, hinten > 0 , vorne < 0 .

Diese Gleichungen können z.B. numerisch integriert werden.

In Abb. 2.36 sind Trajektorien dargestellt, welche zu unterschiedlichen Anfangsbedingungen gehören: bei niedriger Amplitude und Geschwindigkeit schwingt es um eines der beiden Minima. Bei hoher Anfangsgeschwindigkeit oder Auslenkung oszilliert das System über beide Minima. Dazwischen liegt die Separatrix, welche durch den Ursprung des Phasenraums bei $x = 0, \dot{x} = 0$ läuft.

Abbildung 2.37 zeigt ein Beispiel für den allgemeinen Fall. Das System beginnt mit der Amplitude $x(0) = 25$. Damit schwingt es über dem Zwischenmaximum. Mit abnehmender Amplitude (auf Grund der Dämpfung) erreicht es den kritischen Punkt, an dem es dieses Maximum nicht mehr überqueren kann. Je nach Anfangsbedingungen landet es im linken oder rechten Minimum. Dies ist ein sehr einfaches Modell für "spontane Symmetriebrechung": Damit bezeichnet man z.B. das spontane Auftreten eines magnetischen Momentes, wenn ein Ferromagnet beim Durchqueren der Curie-Temperatur magnetisch wird.

2.7.8 Übergang zum Chaos

Der Duffing Oszillator kann auch in einem Parameterbereich betrieben werden, in dem er chaotisch

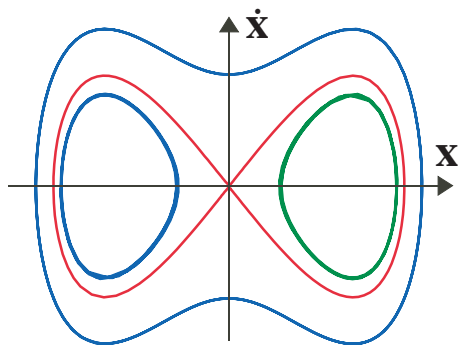


Abbildung 2.36: Phasenraum-Trajektorien für den Duffing Oszillator mit $D = -1$ und $E = 0.02$, wobei Dämpfung $c = 0$ und äußere Kraft $F_0 = 0$ zu Null gesetzt wurden.

wird. In Abb. 2.38 ist ein Beispiel gezeigt. Hier wird das System resonant getrieben. Für $F_0 = 0.1$, also relativ schwache externe Kraft, schwingt das System in der Nähe eines Potenzialminimums. Um welches Minimum es sich handelt hängt von den Anfangsbedingungen ab. Wird die externe Kraft soweit erhöht, dass die Schwingungsamplitude den Wert des lokalen Maximums erreicht, so kann es in das andere Minimum hinüber wechseln. Je nach Phasenlage wird es daran manchmal reflektiert, manchmal kann es das Maximum überqueren. Unter den hier gewählten Bedingungen wird das System chaotisch. Wird die Amplitude weiter erhöht, so erreicht wird die Auslenkung groß genug, dass es nicht mehr reflektiert wird. Die Bewegung wird dann wieder regulär.

Wie an diesem Beispiel gezeigt, können Bewegungsgleichungen normalerweise relativ problemlos numerisch integriert werden. Allerdings gibt es hierbei eine Reihe von Einschränkungen:

- Die Integration muss für jede Anfangsbedingung separat durchgeführt werden. Damit ist es sehr schwierig, Aussagen über globale Eigenschaften des Systems, wie z.B. Stabilität zu erhalten.
- Bei chaotischen Problemen laufen die Trajektorien exponentiell auseinander. Auf Grund der endlichen Präzision der Rechnung und der

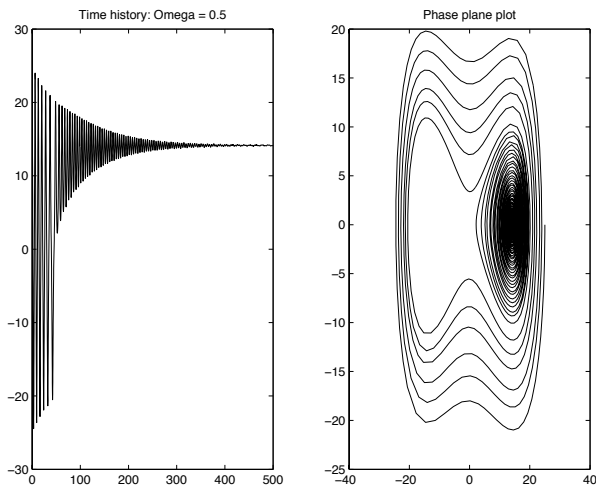


Abbildung 2.37: Links: Zeitabhängigkeit der Oszillatoramplitude. Rechts: Trajektorie im Phasenraum. In welchem Minimum das System landet, hängt empfindlich von den Parametern und von den Anfangsbedingungen ab.

Kenntnisse der Anfangsbedingungen nimmt die Voraussagbarkeit damit exponential mit der Zeit ab.

2.8 Stabilität und Chaos

Wie bereits erwähnt ist es nicht einfach, allgemeine Kriterien aufzustellen, wann ein System eine reguläre Dynamik zeigt und wann es sich chaotisch verhält. Insbesondere hängt dies sowohl von den Systemparametern wie auch von den Anfangsbedingungen ab. Hier werden zunächst einige Möglichkeiten diskutiert, wie man die Stabilität von Fixpunkten beurteilen kann.

2.8.1 Stabilität von Fixpunkten in linearen Systemen

Die Frage, ob ein Fixpunkt stabil ist oder nicht, kann zunächst an linearen Systemen betrachtet werden. Wir verwenden für die Beschreibung der Dynamik