2.3 Symmetrien und Erhaltungssätze

2.3.1 Konstanten / Integrale der Bewegung

Die Lagrange-Gleichung ermöglicht eine direkte und einheitliche Herleitung der wichtigsten Erhaltungssätze. Man kann aus der Lagrange-Gleichung direkt zeigen, dass für s verallgemeinerte Koordinaten $2s-1$ Konstanten der Bewegung existieren müssen: Wir haben

- s verallgemeinerte Koordinaten q_i und
- s verallgemeinerte Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$, also insgesamt $2s$ dynmische Variablen. Bei der Integration der
- s Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung erhalten wir
- $2s$ Integrationskonstanten C_i, die aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Außerdem benötigen wir $2s$ Anfangsbedingungen, d.h. wir benötigen die Koordinaten und Geschwindigkeiten zur Zeit $t=0$:

$$q_{i0} = q_i(0, C_1, ..., C_{2s}), \quad \dot{q}_{i0} = \dot{q}_i(0, C_1, ..., C_{2s}).$$

Aus diesen $2s$ Bewegungsgleichungen werden sowie $2s$ Anfangsbedingungen erhalten wir die $2s$ Integrationskonstanten und damit die Koordinaten und Geschwindigkeiten als Funktion der Zeit, d.h.

$$q_i = q_i(t, C_1, ..., C_{2s}), \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(t, C_1, ..., C_{2s}).$$

Darin tauchen die $2s$ Integrationskonstanten auf. Es ist grundsätzlich möglich, dieses System aus $2s$ Gleichungen zu invertieren, d.h. die Integrationskonstanten als Funktion der Koordinaten und Gesschwindigkeiten darzustellen,

$$c_i = c_i(q_1, ...q_s, \dot{q}_1, ...\dot{q}_s, t), \quad i = 1, ..., 2s).$$

Es existieren somit $2s$ Größen, welche zwar formal von den Koordinaten und Geschwindigkeiten abhängen, aber konstant, d.h. zeitlich unveränderlich sind.

Definition: Größen F, für die gilt

$$\frac{dF}{dt} = 0$$

heißen “Integral der Bewegung” oder “Konstante der Bewegung” oder “Erhaltungsgröße”. Diese Größen bleiben konstant für alle Bahnen, welche die Bewegungsgleichungen erfüllen.

2.3.2 Integrable Systeme

Ein System mit s Freiheitsgraden ist ”integrabel”, wenn es f unabhängige Konstanten

$$F_i(q_k, \dot{q}_k, t) = C_i, \quad = 1, ..., s$$

gibt. Damit liegen alle Bahnkurven eines integrablen Systems auf einer s-dimensionalen Hpyerfläche im $2s$-dimensionalen Raum $(q_k, \dot{q}_k)$.

Beispiel: ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit der Lagrange-Funktion

$$\mathscr{L} = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 x^2$$

erfüllt die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = m(\ddot{x} + \omega^2 x) = 0.$$

Die Lösung lautet

$$\begin{aligned} x(t) &= A\sin(\omega t + \varphi_0) \\ \dot{x}(t) &= A\omega\cos(\omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

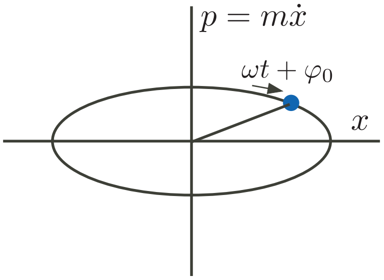

Abbildung 2.15: Bahnkurve des 1D harmonischen Oszillators im Phasenraum.

Dies entspricht der Parameterdarstellung einer Ellipse, wie in Abb. 2.15 dargestellt. Der 1D harmonische Oszillator bewegt sich somit auf einer Bahnkurve mit einem einzigen Freiheitsgrad. Das System besitzt ein Integral der Bewegung, die Energie

$$E(x, \dot{x}) = T + V.$$

2.3.3 Bsp.: Translation in der Zeit

Da in den Bewegungsgleichungen eines geschlossenen Systems die Zeit nicht explizit erscheint, müssen wir die gleichen Resultate erhalten, wenn wir den Ursprung der Zeitachse um einen Betrag t_0 verschieben. Man kann deshalb immer eine der Integrationskonstanten durch eine Verschiebung der Zeitachse eliminieren. Das einfachste Beispiel ist die Funktion

$$q(t) = at + b.$$

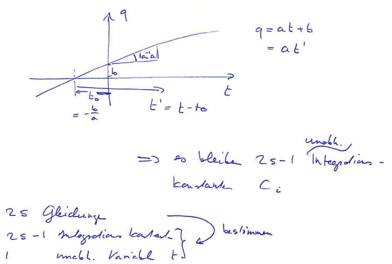

Abbildung 2.16: Verschiebung der Zeitachse.

Hier können wir die Integrationskonstante b eliminieren, indem wir die Zeitachse verschieben:

$$q(t' = t - t_0) = a(t' + t_0) + b = at' + at_0 + b,$$

d.h.

$$q(t') = at', \quad \text{falls}\, t_0 = -\frac{b}{a}.$$

Nach der Wahl des Ursprungs der Zeitachse bleiben somit $2s$ unabhängige Gleichungen und $2s-1$ Integrationskonstanten und die Zeit als unabhängige Variable. Wir können nun diese Gleichungen statt als Bestimmungsgleichungen für die Variablen $q, \dot{q}$ auch als Bestimmungsgleichungen für die $2s-1$ Integrationskonstanten und die Zeit auffassen. Dann wird offensichtlich dass die Integrationskonstanten unabhängig von der Zeit sind, d.h. es sind Konstanten, resp. Integrale der Bewegung. In einem System mit vielen Freiheitsgraden findet man deshalb eine grosse Zahl von Konstanten der Bewegung. Allerdings spielen nicht alle eine wichtige Rolle. Wir diskutieren in der Folge die wichtigsten, welche sich direkt aus Symmetrieeigenschaften des Raumes, resp. der Zeit ableiten lassen. Diese Größen werden als Erhaltungsgrößen bezeichnet.

2.3.4 Koordinatentransformation

Eine Koordinatentransformation (=Punkttransformation) definiert den Übergang von einem Satz Koordinaten $\{q_k\}$ zu einem zweiten Satz $\{Q_k\}$, wobei die Form der Abhängigkeit zunächst beliebig sei, außer dass die neuen Koordinaten nicht von den Geschwindigkeiten $\dot{q}_k$ der alten abhängen sollen. Lokal am Punt P können wir sie linearisieren;

$$M(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_f}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_f}{\partial q_f} \end{pmatrix}.$$

Diese Beziehung ist (am Punkt P) umkehrbar, falls die Jacobi-Determinante J an diesem Punkt nicht verschwindet,

$$J = \mathrm{Det} \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_f}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_f}{\partial q_f} \end{bmatrix} \neq 0.$$

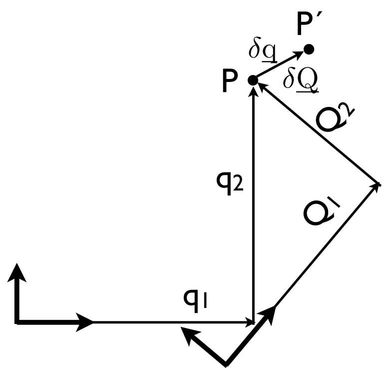

Abbildung 2.17: Koordiatentransformation.

Seien nun $\underline{q}$ und $\underline{Q}$ die Koordinaten des selben Punktes P. Für einen Punkt P', der gegenüber P infinitesimal verschoben ist, können wir die neuen Koordainten schreiben als

$$\underline{Q}' = \underline{Q}(q_i + \delta q_i) = \underline{Q}(P) + \underline{M}\delta q + O(\delta q^2)$$

Falls die Inverse der Matrix M existiert, können wir diese Gleichung lokal invertieren,

$$\begin{aligned} \underline{q}' &= \underline{q}(P) + \underline{M}^{-1}\delta\underline{Q} \\ \delta\underline{Q} &= \underline{Q}'(P')' - \underline{Q}(P). \end{aligned}$$

2.3.5 Fehlende Forminvarianz der Bewegungsgleichungen

Wenn wir eine Koordinatentransformation vornehmen, so kann sich die Form der Gleichungen ändern. So lauten die Newton'schen Bewegungsgleichungen in 2D für kartesische Koordinaten

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Hätte die Newton'sche Gleichung in den Polarkoordinaten r, φ die gleiche Form wie in den kartesischen Koordinaten, so würde sie lauten

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} \qquad m\ddot{\varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

Dass dies so nicht korrekt sein kann, zeigt bereits eine einfache Dimensionsanalyse. Dieses Problem stellt sich allgemein beim Übergang in ein Koordinatensystem, welches kein Interialsystem ist.

Die korrekte Form erhält man, indem man z.B. mit Hilfe des Prinzips von d'Alembert. Einfacher ist es, von der Lagrange-Gleichung auszugehen. Wie wir im Kapitel 2.3.6 zeigen werden, ist diese forminvariant.

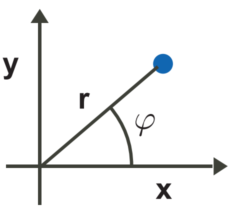

Abbildung 2.18: Transformation von kartesischen zu polaren Koordinaten.

Wir benötigen dafür die Transformationsgleichungen für die Koordinaten

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

und für die Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi}\\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}.\end{aligned}$$

Die kinetische Energie in den neuen Koordinaten ist

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

Wir verwenden die Lagrange-Gleichung in der Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Wenn wir berücksichtigen, dass das Potenzial nicht von den Geschwindigkeiten abhängt, vereinfacht sich dies zu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Wir setzen den Ausruck für die kinetische Energie ein und erhalten

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

für die radiale Koordinate. Für den Spezialfall eines Zentralkraftproblems (d.h. $\partial V/\partial\phi = 0$) erhalten wir für die Winkelkoordinate

$$mr(r\ddot{\varphi} - 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0.$$

2.3.6 Forminvarianz der Lagrangefunktion

Wir untersuchen jetzt die Frage der Forminvarianz für die Lagrangefunktion: in kartesischen Koordinaten lautet die Lagrange-Gleichung zweiter Art

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} = 0.$$

Ist sie forminvariant, so muss sie in den transformierten Koordinaten demnach

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}_k}\right) - \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial Q_k} = 0$$

lauten.

Dazu betrachten wir die Geschwindigkeiten der neuen Koordinaten und entwickeln diese in den Alten:

$$\dot{Q}_i = \sum_k^f \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial Q_i}{\partial t}.$$

Somit ist

$$\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}$$

und

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial q_k}{\partial Q_i}. \tag{2.4}$$

Wir betrachten nun die neue Lagrange-Funktion $\tilde{\mathscr{L}}$, die wir durch Ersetzen von $q_k(Q_i)$ aus der alten erhalten:

$$\tilde{\mathscr{L}}(Q_i, \dot{Q}_i, t) = \mathscr{L}(q_k(Q,t), \dot{q}_k(Q,\dot{Q},t), t).$$

Für die Lagrange-Gleichung benötigen wir die partiellen Ableitungen nach Q_j und $\dot{Q}_j$.

$$\frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial Q_j} = \sum_k^f \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_j} \right]. \tag{2.5}$$

und

$$\frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_k^f \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \dot{Q}_j} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_j} \right]. \tag{2.6}$$

Die Punkttransformation ist geschwindigkeitsunabhängig; somit ist

$$\frac{\partial q_k}{\partial \dot{Q}_j} = 0$$

und Gleichung (2.6) vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_k^f \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_k^f \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j}.$$

Im zweiten Schritt haben wir die Beziehung (2.4) verwendet.

Wir benötigen jetzt die totale Zeitableitung dieses Ausdrucks

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_k^f \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_j} \right]. \tag{2.7}$$

Die Lagrange-Gleichung für die neuen Koordinaten erhalten wir aus der Differenz von 2.7 und 2.5:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial Q_j} \\ = &\sum_k^f \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_j} \right] \\ &-\sum_k^f \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_j} \right] \\ = &\sum_k^f \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} \right] \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} = 0, \end{aligned}$$

da der Ausdruck in Klammern verschwindet. Damit folgt aus

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} = 0$$

auch

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial \dot{Q}_k}\right) - \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial Q_k} = 0,$$

d.h.

Die Lagrange-Gleichung ist invariant unter Punktkoordinatentransformationen

Wenn sie in einem Koordinatensystem erfüllt sind, so sind sie es auch in jedem anderen Koordinatensystem. Dies ist eine der wichtigsten Motivationen für die Anwendung des Lagrange-Formalismus: Sie erlaubt einem, in beliebigen Koordinatensystemen (auch in beschleunigten), die Bewegungsgleichungen abzuleiten.

2.3.7 Virialsatz

Wir betrachten die Größe

$$G = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

und ihre zeitliche Änderung

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i.$$

Der erste Term ist gerade das Doppelte der kinetischen Energie, der zweite kann, gemäß Newton's Theorem, geschrieben werden als Produkt aus Kräften und Vektoren,

$$\sum_i \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i = 2T + \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i.$$

Wir bilden das zeitliche Mittel über eine Zeit τ:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \frac{dG}{dt} = \frac{1}{\tau}[G(\tau) - G(0)] = 2\langle T \rangle + \langle \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle. \tag{2.8}$$

Für ein gebundenes System sind Orte und Impulse beschränkt und somit ist $G(t)$ endlich. Insbesondere gilt dies für $G(\tau)$ und $G(0)$. Damit wird

$$\lim_{\tau\to\infty}\langle\frac{dG}{dt}\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt\frac{dG}{dt} = 0.$$

Damit folgt aus Gleichung 2.8 der

Virialsatz: $\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\langle\sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{r}_i\rangle$.

Anwendung: Zentralkraftproblem mit einem r^k Potenzial:

Das Potenzial sei

$$V(r) = \alpha r^k.$$

Die Kraft ist somit

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(r) = -k\alpha r^{k-2}\vec{r}.$$

Somit ist das Produkt

$$\langle\vec{F}\cdot\vec{r}\rangle = -k\langle\alpha r^k\rangle = -k\langle V(r)\rangle$$

und die kinetische Energie gemäß Virialsatz wird

$$\langle T\rangle = \frac{k}{2}\langle V\rangle.$$

Wichtige Spezialfälle sind der

- harmonische Oszillator mit $k=2$ und somit $\langle T\rangle = \langle V\rangle$
- $1/r$ Potenzial mit $k=-1$ und somit $\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\langle V\rangle$.

2.3.8 Ähnlichkeitstransformation

Wir betrachten eine neue Lagrangefunktion $\tilde{\mathscr{L}}$, die wir aus der alten Funktion $\mathscr{L}$ durch Skalierung mit einem konstanten Faktor γ erhalten haben:

$$\tilde{\mathscr{L}}(q_k,t) = \gamma\mathscr{L}(q_k,t).$$

Aus dem Vergleich der entsprechenden Lagrange-Gleichungen

$$\gamma\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_k}\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{\mathscr{L}}}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial\tilde{\mathscr{L}}}{\partial q_k} = 0$$

für jedes k ist ersichtlich, dass beide Lagrange-Funktionen die gleiche Bewegung beschreiben. Wir wollen uns diese wichtige Eigenschaft der Lagrangefunktion zu nutze machen, um Eigenschaften der Lösung der Teilchenbewegung zu finden, ohne explizit die Bewegungsgleichung lösen zu müssen.

Wir untersuchen Systeme, für die die potenzielle Energy V eine homogene Funktion vom Grad K der Koordinaten q_k ist:

$$V(\alpha q_1,...,\alpha q_f) = \alpha^K V(q_1,...,q_f)$$

und α konstant. Wir definieren jetzt eine Ähnlichkeitstransformation durch die Skalenfunktion

$$\tilde{q}_k = \alpha q_k \quad \tilde{t} = \beta t,$$

wobei wir die Konstante β noch bestimmen müssen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{q}_k}{d\tilde{t}} &= \frac{\alpha}{\beta}\dot{q}_k\\ \tilde{T} &= \frac{\alpha^2}{\beta^2}T\\ \tilde{V} &= \alpha^K V.\end{aligned}$$

Damit ist die neue Lagrangefunktion

$$\tilde{\mathscr{L}} = \tilde{T}-\tilde{V} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}T - \alpha^K V.$$

Sie beschreibt somit das gleiche mechanische System wenn

$$\gamma = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^K.$$

Somit muss der Skalierungsfaktor für die Zeit folgender Bedingung gehorchen:

$$\beta = \alpha^{1-K/2} = \alpha^\delta.$$

Dieser Zusammenhang zwischen der Skalierung von Längen und Zeiten charakterisiert die Art des physikalischen Systems:

K	physikalisches System	δ	Beschreibung
2	harmonischer Oszillator	0	τ unabhängig von der Auslenkung: Amplitude und Frequenz sind nicht gekoppelt
1	Teilchen im Gravitations-feld	1/2	$\tau^2 \propto z$: Wurfparabel
-1	Zentralkraft-problem	3/2	$\tau^2 \propto \ell^3$: 3. Keplersches Gesetz.

2.3.9 Eichinvarianz

Zwei Lagrange-Funktionen $\mathscr{L}$ und $\tilde{\mathscr{L}}$, deren Differenz als totale zeitliche Ableitung einer Funktion $\chi(q_k,t)$ geschrieben werden kann,

$$\tilde{\mathscr{L}} = \mathscr{L} + \frac{d}{dt}\chi(q_k,t),$$

beschreiben die gleiche Dynamik. Die Transformation bezeichnet man als lokale Eichtransformation: Sie kann an jedem Ort unterschiedlich sein. Allerding darf χ nur vom Ort, aber nicht von der Geschwindigkeit abhängen.

Beweis: Wir schreiben den Differenzterm als

$$\frac{d}{dt}\chi(q_k,t) = \sum_k \frac{\partial \chi}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

Damit wird der erste Term der Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \chi}{\partial q_k}\right)$$

und der zweite

$$\frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{d\chi}{dt} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \chi}{\partial q_k}.$$

Zusammen erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} = 0.$$

Dies ist analog zur Elektrodynamik: Dort waren die Bewegungsgleichungen invariant unter einer Transformation der Potenziale:

$$\begin{aligned} \vec{A} &\to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \\ \Phi &\to \Phi' = \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}. \end{aligned}$$

2.3.10 Kanonische Kraft und kanonischer Impuls

Wir betrachten eine Lagrange-Funktion $\mathscr{L} = T - V$, bei der nur der Potenzial-Term V von den Koordinaten q_k abhängt. Dann ist

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} = \frac{\partial (T-V)}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}.$$

Die Ableitung eines Potenzials nach einer generalisierten Koordinate kann als eine generalisierte Kraft verstanden werden.

Umgekehrt hängt nur die kinetische Energie von den Geschwindigkeiten ab, d.h.

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}.$$

Es liegt deshalb nahe,

$$p_k = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

als einen generalisierten Impuls zu interpretieren. Da er durch Ableitung nach q_k aus $\mathscr{L}$ entsteht, gehört er zur Koordinate q_k und wird auch als kanonischer Impuls bezeichnet. Damit erhalten die Lagrange-Gleichungen eine Newton-ähnliche Form:

$$\dot{p}_k = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k}.$$

Beispiel 1 : Freies Teilchen.

Die Lagrange-Funktion eines freien Teilchens ist

$$\mathscr{L} = T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2.$$

Der kanonische Impuls hat somit die Komponenten

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \\ p_y &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \\ p_z &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \end{aligned}$$

Der kanonische Impuls entspricht hier also dem Standardimpuls.

Beispiel 2 : Pendel

Für ein Pendel der Länge ℓ mit Auslenkung φ lautet die Lagrange-Funktion

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\varphi}^2 + mg\ell\cos\varphi.$$

Der entsprechende kanonische Impuls ist somit

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2\dot{\varphi}.$$

Wie eine Dimensionsanalyse

$$[p_\varphi] = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}$$

zeigt, ist dies nicht gleich dem kinematischen Impuls

$$mv = m\ell\dot{\varphi},$$

sondern gleich dem Drehimpuls

$$L = m\ell^2\dot{\varphi}.$$

Beispiel 3 : Teilchen im elektromagnetischen Feld

Für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld wird die Lagrange-Funktion

$$\mathscr{L} = T - q\Phi + q\vec{v}\cdot\vec{A}.$$

Damit wird der kanonische Impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + q\vec{A},$$

d.h. er weicht vom kinematischen Impuls $m\vec{v}$ ab, und zwar um das Produkt aus Ladung und Vektorpotenzial. Er ist damit nicht eichinvariant!

Allgemein ist der kanonische Impuls gleich dem kinematischen Impuls falls die Bewegung in einem geschwindigkeitsunabhängigen Potenzial stattfindet. Dies ist z.B. nicht der Fall für geladene Teilchen in einem Magnetfeld. Dort erhält man den kanonischen Impuls als

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$$

aus dem kinematischen Impuls. Umgekehrt erhält man den kinematischen Impuls als

$$m\vec{v} = \vec{p} - q\vec{A}.$$

2.3.11 Zyklische Koordinaten und Erhaltungsgrößen

Wenn eine Lagrange-Funktion $\mathscr{L}$ eine Koordinate q_k nicht enthällt, sondern nur $\dot{q}_k$, nennt man q_k eine zyklische Koordinate. Für eine solche Variable reduziert sich ihre Lagrange-Gleichung zu

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt}p_k = 0.$$

Damit ist der kanonische Impuls p_k eine Konstante der Bewegung und bleibt erhalten.

Wenn $\mathscr{L}$ nicht von q_k abhängt, bedeutet dies, dass die Lagrangefunktion sich unter der Koordinatentransformation

$$q_k \to q_k' = q_k + a_k$$

nicht ändert, d.h.

$$\tilde{\mathscr{L}}(q_k, t) = \mathscr{L}(q_k^{'}, t).$$

Das System ist somit translationsinvariant bezüglich dieser Koordinate und der zugehörige kanonische Impuls ist eine Erhaltungsgröße.

Für ein vollständig translationsinvariantes System gilt $V = const$ und damit sind alle q_k zyklisch. Als Konsequenz erhalten wir die Impulserhaltung. Die Erhaltung des Gesamtimpulses P_i folgt, wenn das Potenzial nur von den relativen Koordinaten $\vec{q}_k - \vec{q}_j$ abhängt und nicht von den Schwerpunktskoordinaten $\vec{q}$. Dies entspricht dem Trägheitsgesetz von Galilei und Newton.

2.3.12 Kinetische Energie als quadratische Form

Wir betrachten mit N Teilchen und f generalisierten Koordinaten. Dann ist die kinetische Energie T eine quadratische Funktion der verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_k$:

$$T = \sum_{k,l}^{f} A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l \tag{2.9}$$

falls die Koordinatentransformation von den kartesischen Koordinaten

$$x_i = f_i(q_1,\ldots,q_f) \quad i = 1,\ldots,3N$$

nicht explizit zeitabhängig ist,

$$\frac{\partial x_i(q_1,\ldots,q_f)}{\partial t} = 0.$$

Solch ein System nennt man auch skleronom.

Beweis:

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \sum_k^f \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\dot{q}_k = \sum_k^f a_{ik}\dot{q}_k.$$

Damit können wir die kinetische Energie umschreiben

$$\begin{aligned} T &= \sum_i^{3N}\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2 = \sum_i^{3N}\frac{1}{2}m_i\left(\sum_k^f a_i\dot{q}_k\right)^2 \\ &= \sum_i^{3N}\frac{1}{2}m_i\left(\sum_k^f a_i\dot{q}_k\right)\left(\sum_l^f a_i\dot{q}_l\right) \\ &= \sum_{kl}^f\left(\sum_i^{3N}\frac{1}{2}m_i a_{ik}a_{il}\right)\dot{q}_k\dot{q}_l \\ &= \sum_{kl}^f A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l, \end{aligned}$$

wobei die Matrixelemente A_{kl} definiert sind als

$$A_{kl} = \sum_i^{3N}\frac{1}{2}m_i a_{ik}a_{il}$$

und die a_{ik} durch die Koordinatentransformation:

$$a_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass die kinetische Energie quadratisch in den generalisierten Koordinaten ist, falls die Koordinatentransformation zeitunabhängig ist.

2.3.13 Energieerhaltung

Für ein abgeschlossenes System sind verschiedene Zeitpunkte äquivalent, d.h. kein Punkt der Zeitachse ist gegenüber den andern ausgezeichnet. Man sagt, die Zeit sei homogen. Damit kann auch die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängen,

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} = 0.$$

Die totale zeitliche Ableitung einer solchen Funktion ist

$$\frac{d\mathscr{L}}{dt} = \sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i. \tag{2.10}$$

Wir benutzen die Lagrange-Gleichung in der Form

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Wenn wir diese in Gl. 2.10 einsetzen, erhalten wir

$$\frac{d\mathscr{L}}{dt} = \sum_i \dot{q}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\right).$$

Wir schreiben das um zu

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathscr{L}\right) = 0.$$

Anders ausgedrückt ist die Größe

$$H = \sum_i \dot{q}_i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathscr{L} \tag{2.11}$$

in einem geschlossenen skleronomen System eine Konstante. Man bezeichnet sie als Energiefunktion des Systems. Sie ist offensichtlich additiv, d.h. die gesamte Energie ergibt sich als Summe der Energien von isolierten Teilsystemen.

Laut Gleichung (2.9) ist die kinetische Energie eines skleronomen Systems eine homogene quadratische Größe der Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$:

$$T = \sum_{k,l}^{f} A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l.$$

Somit ist

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_l \dot{q}_l(A_{kl} + A_{lk})$$

und

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{kl} \dot{q}_l\dot{q}_k(A_{kl} + A_{lk}) = 2T.$$

Die potenzielle Energie ist unabhängig von den Geschwindigkeiten,

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

Damit wird der erste Term der Energiefunktion (2.11)

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

Die Energiefunktion wird damit

$$H = 2T - \mathscr{L} = T + V$$

und entspricht damit unserer Erwartung für die gesamte Energie eines Systems.

2.3.14 Gesamtimpuls

Ein zweite Erhaltungsgröße folgt aus der Homogenität des Raumes: alle Punkte im Raum sind äquivalent. Dies gilt nur in der Abwesenheit eines äußeren Potenzials.

Im Gegensatz zur Homogenität der Zeit können wir jetzt nicht schließen, dass $\mathscr{L}$ keine explizite Ortsabhängigkeit besitzt, da bei einem N-Körperproblem viele Ortskoordinaten berücksichtigt werden müssen. Sie führt aber dazu, dass die Lagrange-Funktion

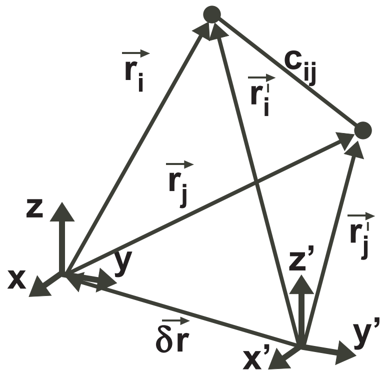

Abbildung 2.19: Verschiebung des Koordinatensystems.

unter Verschiebungen aller Koordinaten konstant bleibt. Sie ist somit nicht von den Koordinaten $\vec{r}_i$, $\vec{r}_j$ abhängig, sondern nur von den Differenzen $c_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$:

$$\mathscr{L}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \mathscr{L}'(\vec{r}_i' - \vec{r}_j') = \mathscr{L}(c_{ij}).$$

Mathematisch lässt sich die Homogenität des Raumes am besten durch Betrachtung infinitesimaler Verschiebungen des Koordinatensystems um $\delta\vec{r}$ erfassen. Wir entwickeln die Änderung der Lagrange-Funktion durch diese Verschiebung in eine Taylorreihe

$$0 = \delta\mathscr{L} = \sum_a \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{r}_a} \cdot \delta\vec{r}_a = \vec{\delta}r \cdot \sum_a \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{r}_a}.$$

Hier sind die $\delta\vec{r}_a$ die Komponenten von $\vec{\delta}r$ und wir verwenden die Abkürzung

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Da der Verschiebungsvektor $\vec{\delta}r$ beliebig ist, muss

$$\sum_a \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{r}_a} = 0 \qquad (2.12)$$

gelten. Zusammen mit der Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

oder

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{r}_a} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{v}_a}$$

erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\sum_a \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{v}_a} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}\vec{P} = 0.$$

Offenbar ist in einem mechanischen System der Vektor

$$\vec{P} = \sum_a \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{v}_a}$$

eine Erhaltungsgröße; er wird als Gesamtimpuls des Systems bezeichnet. Der Gesamtimpuls eines Systems von Teilchen ist immer gleich der Summe der Impulse der einzelnen Teilchen, unabhängig davon, ob sie in Wechselwirkung treten oder nicht.

Gleichung (2.12) hat eine einfache physikalische Bedeutung: Da nur das Potenzial von den Koordinaten abhängt, stellt die Ableitung von $\mathscr{L}$ nach den Koordinaten (2.12) die gesamte auf das System wirkende Kraft dar. Diese verschwindet in einem homogenen Raum ohne äußere Felder.

Nicht immer ist der Raum vollständig homogen, z.B. wenn die Lagrange-Funktion durch das Potenzial von einer einzelnen Koordinate abhängt,

$$V = V(q_k).$$

In diesem Fall können wir immer noch Erhaltungssätze für einzelne Komponenten des Impulses herleiten. Falls q_j in der Lagrange-Funktion nicht vorkommt, so folgt aus der entsprechenden Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i = \text{const},$$

d.h. der zugehörige Impuls stellt eine Erhaltungsgröße dar. Für einzelne Teilchen ist dies offenbar die einfachere Herleitung der Impulserhaltung. Die oben durchgeführte Herleitung bleibt aber auch bei Systemen von Teilchen gültig, wo das Potenzial von sämtlichen Koordinaten (z.B. über die Abstände c_{ij}) abhängt.

2.3.15 Drehimpuls

In gleicher Weise können wir bei der Herleitung der Drehimpulserhaltung verfahren. Wir verwenden dabei die Isotropie des Raums, d.h. die Tatsache, dass in Abwesenheit eines externen Feldes alle Raumrichtungen gleichwertig sind. Damit darf sich die Lagrange-Funktion nicht ändern, wenn wir das Koordinatensystem drehen.

Die Drehung kann ausgeführt werden mit Hilfe der Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} \delta\vec{r}_i &= \delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_i \\ \delta\dot{\vec{r}}_i &= \delta\vec{\varphi}\times\dot{\vec{r}}_i. \end{aligned}$$

Hier stellt $\delta\vec{\varphi} = \delta\varphi\vec{n}$ eine infinitesimale Drehung um den Winkel φ um die Achse $\vec{n}$ dar.

Wir betrachten wie üblich ein abgeschlossenes mechanisches System ohne Reibung. Die Änderung in der Lagrangefunktion ist

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{L} &= \mathscr{L}(\vec{r}_1+\delta\vec{r}_1,\vec{r}_2+\delta\vec{r}_2,\dots,\vec{r}_N+\delta\vec{r}_N, \\ &\qquad \dot{\vec{r}}_1+\delta\dot{\vec{r}}_1,\dot{\vec{r}}_2+\delta\dot{\vec{r}}_2,\dots,\dot{\vec{r}}_N+\delta\dot{\vec{r}}_N) \\ &- \mathscr{L}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots,\vec{r}_N,\dot{\vec{r}}_1,\dot{\vec{r}}_2,\dots,\dot{\vec{r}}_N) \\ &= \sum_i^N \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vec{r}_i}\delta\vec{r}_i + \sum_i^N \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\delta\dot{\vec{r}}_i = 0. \end{aligned}$$

Wir müssen diesmal auch die Änderung der Geschwindigkeiten berücksichtigen, da diese durch eine Rotation ebenfalls transformiert werden. Wir verwenden

$$\vec{p}_i = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\vec{r}}_i} \qquad \dot{\vec{p}}_i = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vec{r}_i}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i^N \dot{\vec{p}}_i(\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_i) + \sum_i^N \vec{p}_i(\delta\vec{\varphi}\times\dot{\vec{r}}_i) \\ &= \frac{d}{dt}\sum_i^N \vec{p}_i(\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_i) \\ &= \delta\vec{\varphi}\frac{d}{dt}\sum_i^N(\vec{r}_i\times\vec{p}_i) = \delta\vec{\varphi}\frac{d}{dt}\vec{L} \end{aligned}$$

mit dem Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} = \sum_{i}^{N} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i).$$

Da die Drehung $\delta\vec{\varphi}$ beliebig ist, muss gelten

$$\vec{L} = \sum_{i}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = const.$$

Die Rotationsinvarianz kann durch ein äußeres Feld, z.B die Gravitation, eingeschränkt werden. Angenommen, das äußere Feld besitzt eine Symmetrieachse (Gravitation: z-Achse), dann bleibt nur die Projektion des Drehimpulses auf diese Achse erhalten, d.h auf

$$L_n = \vec{n} \cdot \vec{L}.$$

Besispiel 1 : Gravitation.

Die potenzielle Energie $V = mgz$ ist rotationsinvariant um die z-Achse. Damit bleibt

$$L_z = \vec{e}_z \sum_{i}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

erhalten.

Beispiel 2 : Zentralkraft

Hier ist das Potenzial

$$V = \frac{A}{r}.$$

Es bleibt somit invariant gegenüber Drehungen um eine beliebige Achse durch den Ursprung. Damit bleiben alle Komponenten von $\vec{L}$ erhalten. Das Potenzial ist jedoch nicht translationsinvariant, so dass der Impuls nicht erhalten bleibt.

2.3.16 Das Noether-Theorem

Wir betrachten eine Koordinatentransformation für jede generalisierte Koordinate q_k. Die Transformation soll eine kontinuierliche Abbildung mit einem Parameter α sein:

$$q_k \to \tilde{q}_k = h_k(q_1, ..., q_N, \alpha, t).$$

Für $\alpha = 0$ soll sie die identische Abbildung darstellen,

$$q_k = h_k(q_1, ..., q_N, \alpha = 0, t).$$

Außerdem soll h_k nach α stetig differenzierbar und invertierbar sein. Beispiele für solche Abbildungen sind die Translation

$$\vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r} + \alpha\vec{a}$$

und die Rotation um die z-Achse:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Wenn jetzt die Lagrange-Funktion $\tilde{\mathscr{L}}$

$$\tilde{\mathscr{L}}(\tilde{q}_k, \dot{\tilde{q}}_k, t, \alpha) = \mathscr{L}(h_k(q_k, \alpha, t), \dot{h}_k(q_k, \alpha, t), t)$$

sich nur um eine Eichtransformation

$$\tilde{\mathscr{L}}(\tilde{q}_k, \dot{\tilde{q}}_k, t, \alpha) = \mathscr{L}(q_k, \dot{q}_k, t) + \frac{d}{dt}\chi(\tilde{q}_k, \alpha, t)$$

von $\mathscr{L}$ unterscheidet, dann ist folgenden Funktion eine Konstante:

$$\begin{aligned} & I_\alpha(q_k, \dot{q}_k, t) \\ = & \sum_{k}^{f} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \left. \frac{\partial q_k(\tilde{q}, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial \chi(\tilde{q}_k, \alpha, t)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}. \end{aligned}$$

Beweis:

Die beiden Lagrange-Funktionen sind, abgesehen von der Eichtransformation identisch, falls die Abhängigkeit von α verschwindet, d.h.

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\tilde{\mathscr{L}}(\tilde{q}_k, \dot{\tilde{q}}_k, t, \alpha) - \frac{d}{dt}\chi(\tilde{q}_k, \alpha, t)\right) = 0 \tag{2.14}$$

sein. Die Lagrangefunktion $\tilde{\mathscr{L}}$ in den neuen Koordinaten $\tilde{q}_k$ erhalten wir z.B. indem wir in der ursprünglichen Lagrangefunktion $\mathscr{L}$ die alten Koordinaten q_k durch die neuen ausdrücken:

$$\tilde{\mathscr{L}}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t, \alpha) = \mathscr{L}(q(\tilde{q}, t, \alpha), \dot{q}(\tilde{q}, t, \alpha), t).$$

Damit können wir die Änderung der Lagrangefunktion mit α schreiben als die partielle Ableitung nach α, wobei die Variablen $\tilde{q}$ und $\tilde{\dot{q}}$ festgehalten werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial \alpha} &= \sum_k \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \alpha} \right) \\
&= \sum_k \left(\frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\sum_k \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \right).
\end{aligned}$$

Dies gilt für alle Werte von α. Insbesondere können wir $\alpha = 0$ setzen. Damit erhalten wir für die Änderung (2.14)

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\tilde{\mathscr{L}}(\tilde{q}_k, \tilde{\dot{q}}_k, t, \alpha) - \frac{d}{dt} \chi(\tilde{q}_k, \alpha, t) \right) =$$
$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_k \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} - \frac{\partial \chi(\tilde{q}_k, \alpha, t)}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = 0.$$

Damit ist das Noether-Theorem bewiesen. Es

- verknüpft kontinuierliche Symmetrien der Lagrange-Funktion mit Erhaltungsgrößen
- gilt daher nicht bei diskreten Symmetrien, z.B Raumspiegelungen.
- Aus der Symmetrie folgt die Erhaltungsgröße, die Umkehrung gilt nicht.

Der Erhaltungssatz, der zu einer zyklischen Koordinate q_i gehört, ist ein Spezialfall: Dann ist die Lagrange-Funktion invariant unter einer Translation der entsprechenden Koordinate.

Eine weiterer wichtiger Spezialfall ist der, dass die Eichfunktion χ verschwindet. Dann ist die Erhaltungsgröße

$$I_\alpha(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_k^f \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \left. \frac{\partial q_k(\tilde{q}, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}.$$

2.3.17 Anwendungsbeispiele

Impulserhaltung

Das Potenzial (Gravitation) sei nur von z abhängig,

$$\mathscr{L}(x, z, \dot{x}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - V(z).$$

Somit kann das System beliebig in x-Richtung verschoben werden, d.h. x ist zyklisch,

$$\tilde{x} = x + \alpha_x.$$

Die Eichfunktion χ verschwindet in diesem Fall. Damit erhalten wir für die zugehörige Erhaltungsgröße

$$I_\alpha(x, z, \dot{x}, \dot{z}) = \sum_k \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \left. \frac{\partial q_k}{\partial \alpha_x} \right|_{\alpha=0} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}} = -m\dot{x},$$

also die Impulserhaltung für die x-Komponente, in Übereinstimmung mit der Diskussion im Zusammenhang mit zyklischen Koordinaten.

Drehimpuls

Die Lagrangefunktion

$$\mathscr{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x^2 + y^2, z)$$

ist unter Rotationen um die z-Achse invariant. Die Rotation ist gegeben durch die Koordinatentransformation (2.13) und ergibt die transfomierte Funktion

$$\mathscr{L}'(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \alpha) = \frac{m}{2}(\dot{x}\text{'}^2 + \dot{y}\text{'}^2 + \dot{z}\text{'}^2) - V(x\text{'}^2 + y\text{'}^2, z\text{'}\ )$$

ist offenbar invariant.

Mit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x(x', \alpha)}{\partial \alpha} &= -x' \sin\alpha + y' \cos\alpha = y \\
\frac{\partial y(y', \alpha)}{\partial \alpha} &= -x' \cos\alpha - y' \sin\alpha = -x
\end{aligned}$$

finden wir die Erhaltungsgröße

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}} y + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}}(-x) = m(\dot{x}y - \dot{y}x) = -L_z,$$

d.h. die z-Komponente des Drehimpulses.

Wir können die Rechnung auch in symmetrieangepassten Koordinaten durchführen, d.h. in Zylinderkoordinaten. Damit wird die Lagrangefunktion

$$\mathscr{L}(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(r^2, z).$$

Darin taucht die Winkelkoordinate φ nur als Ableitung auf. Somit ist die Lagrangefunktion unter zeitunabhängigen Rotationen

$$\varphi \to \varphi' = \varphi + \alpha$$

invariant. Damit wird

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}} \frac{\partial(\varphi' - \alpha)}{\partial \alpha} = -mr^2\dot{\varphi} = -L_z$$

eine Erhaltungsgröße.

2.3.18 Galilei-Invarianz und Schwerpunkt

Wir betrachten zwei Inertialsysteme, welche sich relativ zu einander mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegen, d.h. zwischen ihren Koordinaten gibt es folgende Beziehung:

$$\vec{r}_i^{\,\prime} = \vec{r}_i + \vec{v}t \qquad t' = t.$$

Man bezeichnet dies als Galilei-Transformation. Dies entspricht dem Grenzfall niedriger Geschwindigkeit der Lorentz-Transformation.

Die kinetische Energie im ’-Koordinatensystem ist

$$\begin{aligned} T' &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i + \vec{v})^2 \\ &= T + \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}^2 \\ &= T + \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} M \vec{v}^2 t \right). \end{aligned}$$

Hier ist

$$M = \sum_i m_i$$

die Gesamtmasse des Systems. Damit erhalten wir die neue Lagrangefunktion aus der alten:

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L} + \frac{d}{dt}\chi(\vec{r}_i, t)$$

durch eine Eichtransformation

$$\chi(\vec{r}_i, t) = \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} M \vec{v}^2 t.$$

Aus dem Noether-Theorem können wir somit drei Erhaltungsgrößen gewinnen, indem wir die Geschwindigkeiten v_i in die drei Raumrichtungen i als Parameter α_i verwenden. Dann erhalten wir mit $\beta = x, y, z$:

$$\begin{aligned} I_{v_\beta} &= \sum_i^N \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}_{i\beta}} t - \frac{\partial}{\partial v_\beta} \left(m_i \vec{r}_i \vec{v} + \frac{1}{2} M \vec{v}^2 t \right) \right\} \\ &= \sum_i^N \left\{ m_i \dot{x}_{i\beta} t - m_i x_{i\beta} - M v_\beta t \right\} = const. \end{aligned}$$

Die Schwerpunktskoordinate $\vec{R}$ ist durch

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

definiert. Aus dem Noether-Theorem folgt damit

$$\vec{P}t - M\vec{R} - M\vec{v}t = -M\vec{R}_0 = const.$$

Hier ist

$$\vec{P} = \sum_i m_i \dot{x}_{i\beta}$$

der Impuls des Gesamtsystems. Dies bedeutet, dass sich der Schwerpunkt geradlinig und gleichförmig bewegt,

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \left(\frac{1}{M}\vec{P} - \vec{v} \right) t.$$

Mit einer Transformation in ein bewegtes Bezugsystem mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{1}{M}\vec{P}$$

wird $\vec{R}$ zu einer Erhaltungsgröße. Dieses ausgezeichnete Bezugsystem heißt auch Schwerpunktsystem.

2.3.19 Zusammenfassung

Wir haben damit folgenden Symmetrien Erhaltungsgrößen in einem mechanischen System

- Translationsinvarianz $\Rightarrow$ Gesamtimpulserhaltung (vektoriell)
- Rotationsinvarianz um die Achse $\vec{n}$ $\Rightarrow$ Gesamtdrehimpulserhaltung für die entsprechende Komponente
- Galilei-Invarianz $\Rightarrow$ Freiheit des Ursprungs, bzw Schwerpunktssystem (vektoriell)
- Translationsinvarianz in der Zeit $\Rightarrow$ Energieerhaltung (skalar)

Im freien Raum haben wir damit insgesamt 10 Erhaltungsgrößen: 6 Schwerpunktsintegrale, 3 Drehimpuls- und ein Energieintegral, die mit 10 kontinuierlichen Größen in Zusammenhang stehen.

2.4 Zentralkraftproblem und Keplerproblem

Wir betrachten zwei Massenpunkte m_1, m_2 im Raum, die aufeinander eine Kraft ausüben, die in Richtung des Relativabstand $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ zeigt und nur vom Abstand r abhängt. Solch ein Zentralkraftproblem ist konvervativ, mit einem rotationsymmetrischen Potenzial $V(r)$. Die Lagrangefunktion ist durch

$$\mathscr{L} = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_2^2 - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \tag{2.15}$$

gegeben.

Wegen der Translationsinvarianz im Raum ist der Gesamtimpuls erhalten. Mit der Galilei-Invarianz transformieren wir ins Schwerpunktsystem

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{2.16}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \tag{2.17}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} \tag{2.18}$$

mit $M = m_1 + m_2$. Die transformiert Lagrange-Funktion lautet dann

$$\mathscr{L} = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 + V(r) \tag{2.19}$$

$$= \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(r), \tag{2.20}$$

wobei wir die reduzierte Masse μ

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{2.21}$$

und die Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ eingeführt haben.

$\vec{R}$ zyklisch $\Rightarrow$ Schwerpunktsimpuls $\vec{P} = M\dot{\vec{R}} = const.$

Im Schwerpunktsystem gilt auch noch die Erhaltung des Drehimpules

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = const. \tag{2.22}$$

Da

$$\vec{r}\vec{L} = \vec{r}(\vec{r} \times \vec{p}) = 0 \tag{2.23}$$