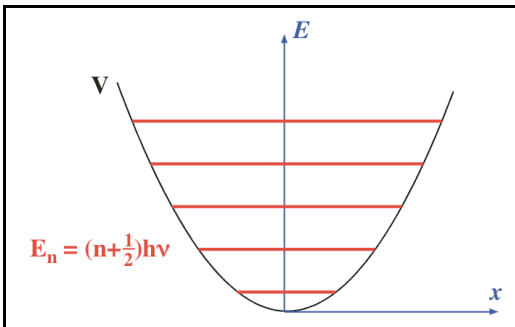


7.4 Eindimensionale Probleme

7.4.1 Der harmonische Oszillator

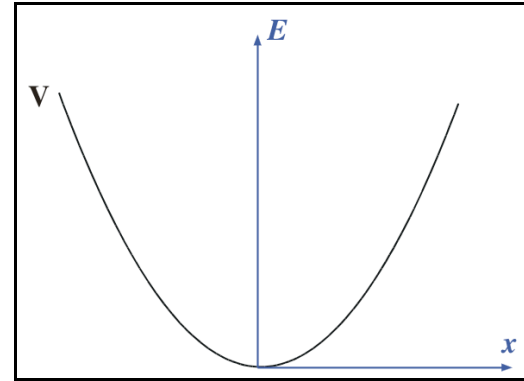
Ein wichtiges Beispiel für ein quantenmechanisches System in einer Dimension ist der harmonische Oszillator. Wie in der klassischen Physik ist er gegeben durch ein quadratisches Potenzial

$$V(x) = a x^2 .$$



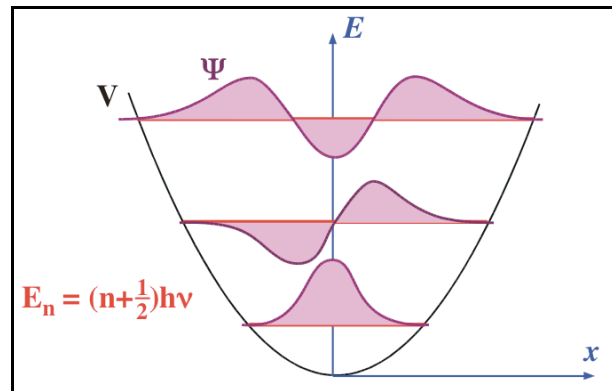
Setzt man dieses Potenzial in die Schrödingergleichung ein, so findet man, dass die Energien durch den Ausdruck

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu$$



gegeben sind, d.h. sie sind äquidistant und der Zustand niedrigster Energie liegt um ein halbes Quant über dem Minimum der Potenzialkurve. Die Energiedifferenz $h\nu$ hängt ab von der Krümmung des Potentials und von der Masse des bewegten Teilchens. Die Frequenz $\nu = (c/m)^{1/2}$ ist die Schwingungsfrequenz des entsprechenden Systems, z.B. die Frequenz mit der eine Molekülschwingung abläuft.

Die entsprechenden Zustände sind in der Figur eingezeichnet. Im Grundzustand ist das Maximum der Zustandsfunktion in der Mitte des Potentials. Der erste angeregte Zustand weist einen Nulldurchgang auf, der zweite zwei etc.

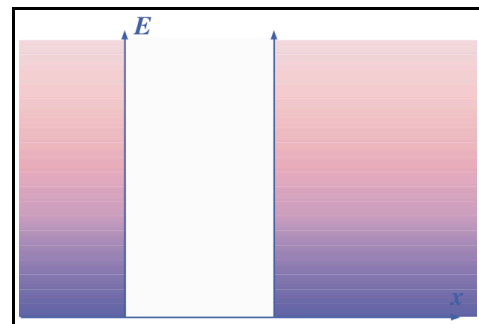


7.4.2 Teilchen im Potenzialtopf

Ein weiteres einfaches Beispiel betrachten wir das Potenzial

$$U(x) = 0 \quad \text{für } 0 < x < L \quad \infty \quad \text{sonst}$$

Dies ist ein wichtiges, wenn auch idealisiertes System, das eine gute Näherung für viele reale Systeme darstellt. So werden in der Halbleiterphysik häufig Elektronen in sogenannte Potentialtöpfe gebracht, u.a. um damit Halbleiterlaser herzustellen. Auf ähnliche Weise wird Licht in Glasfasern geführt, u.a. bei der Datenübertragung. Wie wir noch sehen werden, ist dies auch ein gutes Bild für die Bindung von gewissen Elementarteilchen in Atomkernen.



Der Hamiltonoperator für dieses System enthält wie beim freien Teilchen kinetische Energie, sowie zusätzlich den Beitrag der potentiellen Energie

$$\mathcal{H} = p^2/2m + U(x) = -\hbar^2 (\partial/\partial x)^2/2m + U(x) .$$

Da das Potential außerhalb der Mulde unendlich groß ist, würde eine Komponente der Wellenfunktion in diesem Bereich zu einer unendlich hohen Energie führen. Wir interessieren uns aber nur für Zustände mit endlicher Energie, so dass wir fordern müssen, dass die Zustandsfunktion außerhalb der Mulde verschwindet.

Damit können wir unsere Betrachtungen auf den Bereich der Potentialmulde $0 < x < L$ beschränken und die Gegenwart des Potentials über die Randbedingungen berücksichtigen:

$$\psi(0) = \psi(L) = 0 ,$$

d.h. die Amplitude der Wellenfunktion muss am Rand des Potentialtopfs verschwinden. Das Teilchen ist somit gebunden, es muss sich mit Wahrscheinlichkeit 1 innerhalb des Potentialtopfs aufhalten. Dies wird auch durch die Normierungsbedingung

$$\int_0^L dx |\psi(x)|^2 = 1$$

bestätigt.

7.4.3 Lösung

Innerhalb des Potentialtopfs verhält sich das System wie ein freies Teilchen, welches durch eine ebene Welle beschrieben wird. Mit der Randbedingung erhält man folgende Funktionen als Lösung der Schrödingergleichung:

$$\psi_n(x,t) = C_n \sin(n \pi x/L) e^{-i\epsilon_n t} .$$

Die Energie, resp. Frequenz ist gleich der kinetischen Energie

$$\mathcal{E}_{\text{kin}} = \hbar^2 k^2/2m .$$

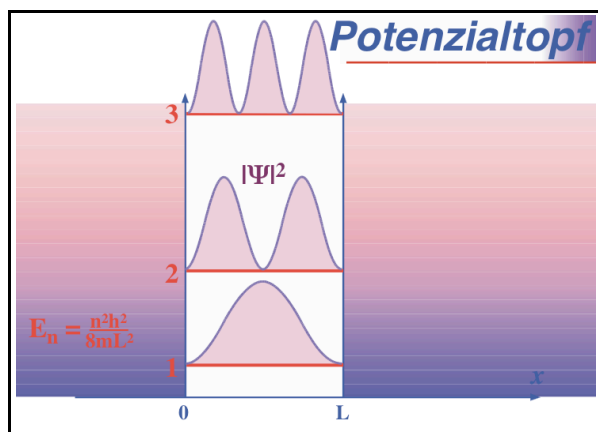
Der Wellenvektor k ist hier gleich

$$k = n \pi/L ,$$

so dass

$$\epsilon_n = \mathcal{E}_n/\hbar \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_n = n^2 \pi^2 \hbar^2/2mL^2 = n^2 h^2/8mL^2 .$$

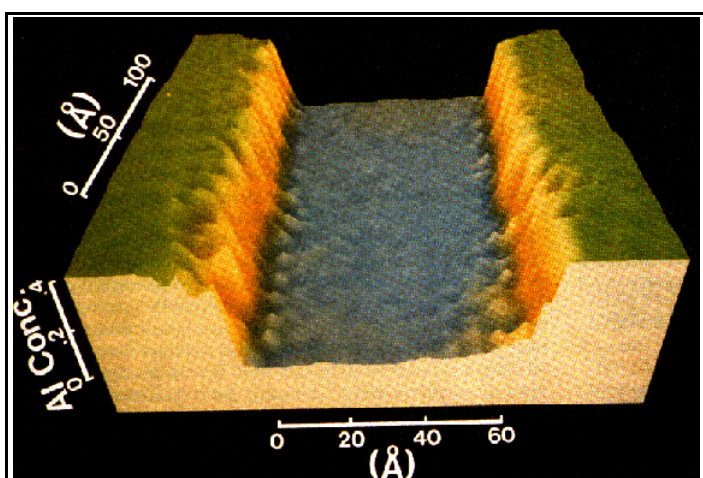
Die Energie steigt somit quadratisch mit dem Index n . Die Zustandsfunktionen weisen mit zunehmender Energie eine größer werdende Zahl von Nulldurchgängen, so genannten Knoten auf. Die schnellere Variation ist ein direktes Bild des zunehmenden Impulses und damit der zunehmenden kinetischen Energie. Interessant ist auch, dass damit die Zustandsfunktion des Teilchens in Bereiche aufgeteilt wird, zwischen denen die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zu finden, verschwindet. Solche Zustände, in denen das Elektron sich nicht mehr frei bewegen kann, sondern auf einen lokalen Bereich beschränkt ist, werden als lokalisierte Zustände bezeichnet.



7.4.4 Anwendung: Halbleiter-Quantenstrukturen

Obwohl das Teilchen im Potentialtopf zunächst nur ein mathematisch angenehmes Modellsystem ist, kann man solche Systeme heute in guter Näherung verwirklichen. Zu den wichtigsten Beispielen gehören Elektronen in Halbleiter-Schichtstrukturen.

Indem man die Zusammensetzung auf atomarer Skala kontrolliert kann man ein effektives Potential für die Elektronen erzeugen, welches sie z.B. in einen sog. "Quantentopf" einschließt. Solche Strukturen sind inzwischen bei der Herstellung von Lasern sehr wichtig geworden. Natürlich stimmt unser Modell nicht exakt, aber es stellt eine erste Näherung dar.



Wenn wir Quantentöpfe mit unterschiedlicher Dicke vergleichen, so erwarten wir, dass die Energie der Elektronen etwa proportional zu $1/L^2$ ansteigt. Dies wird wiederum durch die experimentellen Daten in etwa bestätigt. In der Industrie wird dieser Effekt benutzt, um die Wellenlänge der Halbleiterlaser anzupassen.

