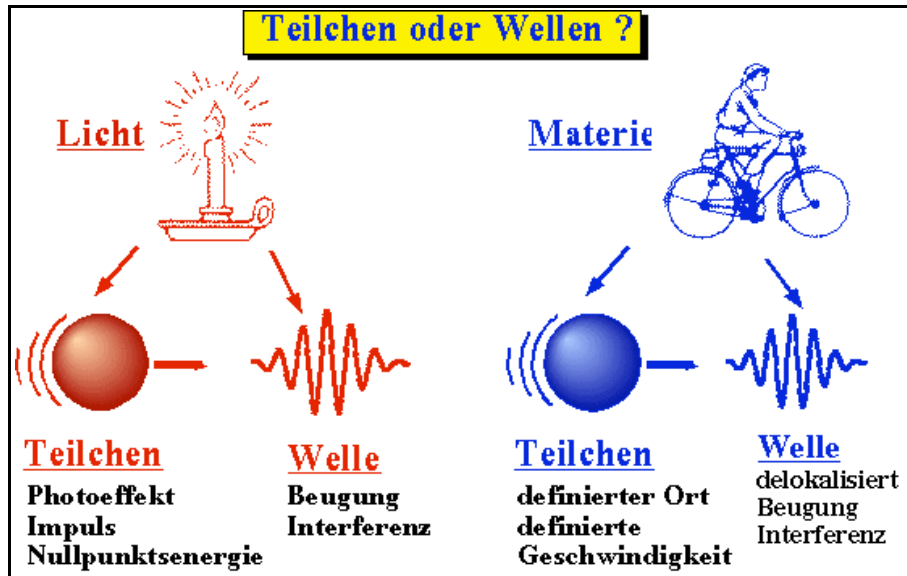


7.2 Wellencharakter der Materie

Lit: Berkeley Physics Course 4 (QM), Chapter 5

7.2.1 Wellen und Teilchen

Licht besitzt sowohl Teilchen- wie auch Wellencharakter: Bei der Diskussion des Strahlungsgesetzes hatten wir gesehen, dass es einen Teilchencharakter aufweist, ebenso beim Photoeffekt. Allgemein tritt der Teilchencharakter bei der Wechselwirkung mit Materie in den Vordergrund. Andererseits hatten wir im Zusammenhang mit der Ausbreitung, insbesondere bei Interferenz und Beugung sowie bei der Polarisation deutliche Zeichen des Wellencharakters kennen gelernt. Die Beziehung zwischen den Wellen- und den Teilcheneigenschaften wird durch die Beziehungen



hergestellt, welche die Energie und den Impuls eines Teilchens in Beziehung setzen zu den Welleneigenschaften Frequenz und Wellenlänge, resp. Wellenvektor.

$$E = h \nu = \hbar \omega \quad \text{und} \quad p = \hbar k = h / \lambda$$

hergestellt, welche die Energie und den Impuls eines Teilchens in Beziehung setzen zu den Welleneigenschaften Frequenz und Wellenlänge, resp. Wellenvektor.

Genauso wie für Licht findet man auch bei Materie beide Aspekte. Mit Materie sind hierbei Teilchen gemeint, die eine nicht verschwindende Ruhemasse aufweisen, wie z.B. Elektronen, Neutronen, Atome, Planeten, Dafür verwenden wir üblicherweise den Begriff "Teilchen". Wie wir aber im Folgenden sehen werden, besitzt gewöhnliche Materie nicht nur einen Teilchencharakter, sondern ebenso Welleneigenschaften. Allerdings treten die Welleneigenschaften weniger häufig zu Tage als der Teilchencharakter.

Broglie, Louis Victor, duc de (brôglê), 1892–1987, French physicist. From his hypothesis that particles should exhibit certain wavelike properties, wave mechanics, a form of quantum mechanics, was developed. Experiments proved (1927) the existence of these waves; he was awarded the 1929 Nobel Prize in physics for his theory.



Die Möglichkeit, dass auch Materie Welleneigenschaften aufweisen könnte, wurde erstmals von Louis de Broglie 1923 geäußert. Ausgangspunkt seiner Überlegungen waren das Fermat'schen Prinzips der Optik und des Hamilton'schen Prinzips der Mechanik, welche beide besagen, dass das Licht, resp. ein Körper, unter den möglichen Wegen denjenigen "wählen", welcher am wenigsten Zeit benötigt.

Er spekulierte, dass für Materie die gleichen Beziehungen zwischen Energie und Frequenz, resp. Impuls und Wellenlänge gelten könnten wie für Licht. Dann müsste jedes Teilchen durch eine Welle

$$\psi = A \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$$

mit Wellenlänge, resp. Wellenzahl

$$\lambda = h / p \quad k = p / \hbar$$

und Frequenz

$$\omega = E / \hbar \quad \text{oder} \quad \omega = E / \hbar$$

beschrieben werden. Bei niedrigen Geschwindigkeiten kann man für die

Genauer gesagt sollten wir uns dies als Wellengruppe vorstellen, welche in der Nähe der klassischen Position des Teilchens lokalisiert ist.

7.2.2 Ausbreitung und Dispersion

Wir überprüfen, ob diese Annahme sinnvoll ist. Insbesondere würden wir erwarten, dass sie in der Nähe des Teilchens lokalisiert bleibt, wenn sich dieses bewegt. Wir betrachten somit ein bewegtes Teilchen mit Masse m und Geschwindigkeit v . Seine kinetische Energie ist dann

$$E = m/2 v^2 .$$

Damit wird die Kreisfrequenz

$$\omega = E / \hbar = \frac{m v^2}{2\hbar}$$

und der Wellenvektor

$$k = p / \hbar = \frac{m v}{\hbar} .$$

Wir lösen auf nach der Geschwindigkeit $v = \hbar k / m$ und eliminieren diese aus dem Ausdruck für \square :

$$\square = \hbar k^2 / 2m .$$

Die Geschwindigkeit der Wellengruppe sollte nun gegeben sein als

$$v_G = d\square / dk = \hbar k / m = v .$$

Somit ist sichergestellt, dass sich die Wellengruppe mit der gleichen Geschwindigkeit wie das klassische Teilchen bewegt.

7.2.3 Beispiel: Elektronenwellen

Die Wellenlänge der Materiewellen sollte damit invers proportional zum Impuls des Teilchens sein, seine Frequenz proportional zur Energie. Aufgrund der Kleinheit der Planck'schen Konstante sehen wir leicht, dass für massive Körper die Frequenz sehr groß sein wird, die Wellenlänge sehr klein. Um sie überhaupt beobachten zu können müssen wir deshalb möglichst leichte Teilchen verwenden. Das leichteste stabile Teilchen ist das Elektron, welches auch leicht zu erzeugen ist.

Für die Berechnung der Wellenlänge benötigen wir zunächst die Geschwindigkeit. Wir betrachten Elektronen mit einer kinetischen Energie, wie sie z.B. in einem Fernseh- oder Computerbildschirm auftreten, also z.B.

$$E_{\text{kin}} = 100 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-17} \text{ J} .$$

Ihre Geschwindigkeit ist damit

$$v = (2 E_{\text{kin}} / m_e)^{1/2} = (3.2 \cdot 10^{-17} / 9 \cdot 10^{-31})^{1/2} = (3.5 \cdot 10^{13})^{1/2} = 6 \cdot 10^6 \text{ m/sec} .$$

Sie ist damit noch weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit und rechtfertigt die nichtrelativistische Rechnung.

Für die Wellenlänge erhalten wir

$$\square = \hbar / p = \hbar / (m_e v) = 6 \cdot 10^{-34} / (9 \cdot 10^{-31} \cdot 6 \cdot 10^6) \approx 10^{-10} \text{ m} ,$$

also etwa 1 Angström. Diese Wellenlänge ist sehr klein im Vergleich zu makroskopischen Distanzen, aber sie ist vergleichbar mit atomaren Distanzen.

Eine Bestätigung der Wellenhypothese kann somit erreicht werden, wenn man zeigen kann, dass periodische Anordnungen von Atomen Beugungseffekte erzeugen. Diese Mög-

lichkeit wurde 1925 von Elsasser vorgeschlagen. Eine Voraussetzung dafür ist, dass Elektronen elastisch gestreut werden, so dass die reflektierte Welle eine feste Wellenlänge aufweist.

Die erste experimentelle Bestätigung für de Broglie's Vermutung wurde 1927 von Davisson und Germer publiziert. Sie benutzten Streuung von Elektronen an einer Kristalloberfläche. Davisson hat dafür 1937 den Nobelpreis erhalten. Seine Rede anlässlich der Preisverleihung ist u.a. deshalb interessant weil sie zeigt, wie Forschung wirklich abläuft, d.h. nicht immer so geradlinig wie es beim Studium von Lehrbüchern teilweise erscheint, sondern u.a. durch eher zufällige Begegnungen, Diskussionen und experimentelle oder technische Randbedingungen diktiert. Auszugsweise ist diese Rede auch im "Berkeley Physics Course, Band 4 (QM), Kapitel 5.12 wiedergegeben.

Davisson, Clinton Joseph, 1881-1958; American physicist. He shared a 1937 Nobel Prize with G.P. Thomson for the discovery of the diffraction of electrons by crystals.

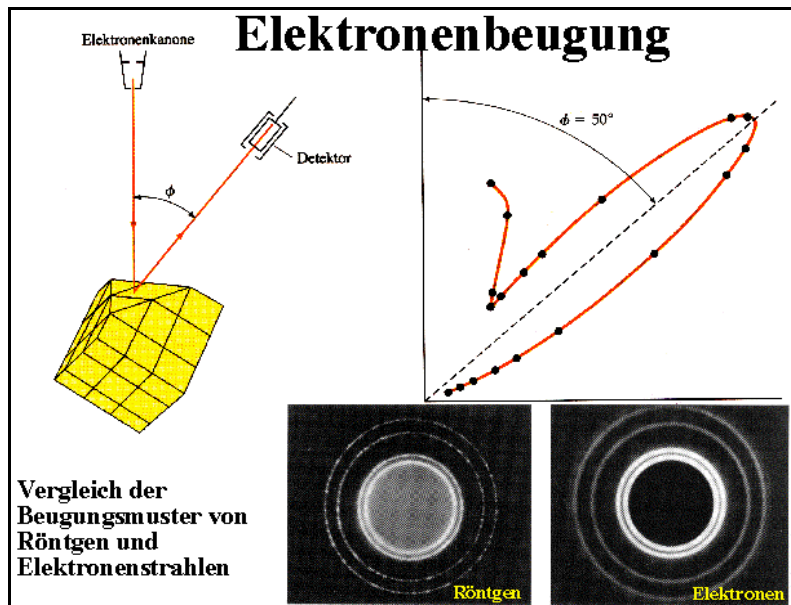
7.2.4 Interferenz und Beugung

Unabhängig davon fand G.P. Thomson das gleiche Resultat mittels Transmission eines Elektronenstrahls durch einen dünnen Kristall.

Das Experiment wie auch das Resultat ist sehr ähnlich wie bei der Röntgenbeugung: Man verwendet einen Elektronenstrahl anstelle eines Röntgenstrahls und misst die Intensität der gestreuten Elektronen als Funktion der Orientierung. Genau wie bei Röntgenstrahlen erhält man ein Beugungsmaximum wenn die Bragg - Bedingung

$$a \sin \alpha = n \lambda = n h/p$$

mit $n = 1, 2, 3, \dots$ erfüllt ist.



Genau wie bei Lichtwellen kann man bei Materiewellen Interferenzeffekte beobachten. In diesem Beispiel wurde eine Elektronenwelle durch einen Doppelspalt geschickt. Die Interferenz zwischen den beiden Pfaden erzeugt eine Modulation der Intensität auf dem Schirm, welche mit zunehmender gesamt Teilchenzahl beobachtet wird. Das interessante an diesem Experiment ist, dass es die Teilchen- und Wellenaspekte im gleichen Experiment auf-

zeigt. So messen wir die Ankunft jedes Teilchens auf dem Schirm z.B. mit einem Zähler, der für jedes Teilchen einen Ort und eine Zeit des Auftreffens liefert. Dieser Teil entspricht somit dem Teilchencharakter. Andererseits können wir von den einzelnen Teilchen nicht sagen, ob sie durch den unteren oder oberen Spalt durchgetreten sind. Diese Information wäre bei einem klassischen Teilchen verfügbar.

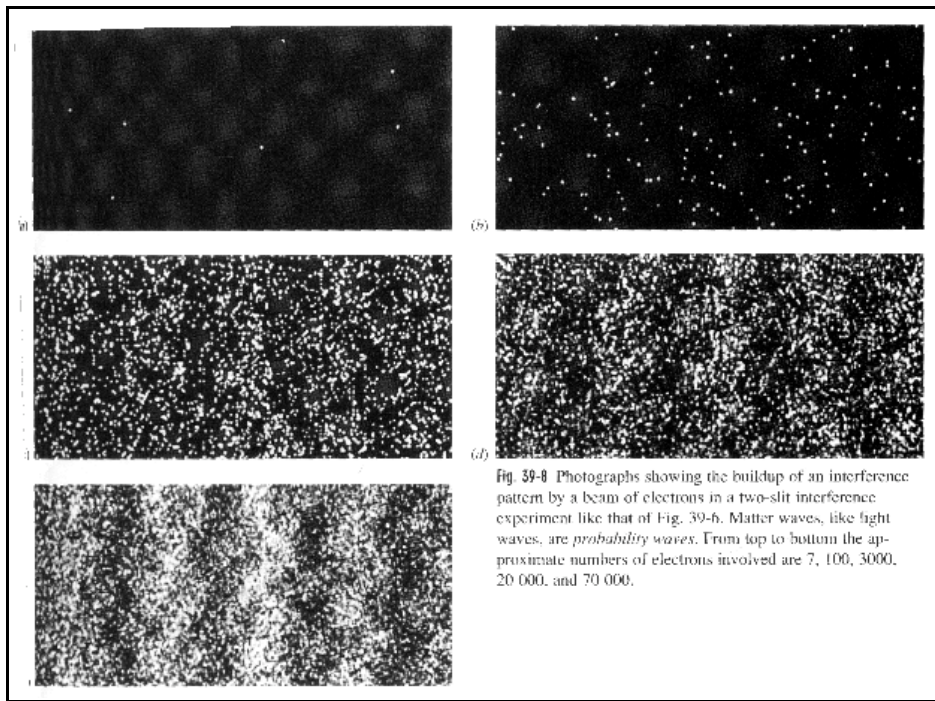
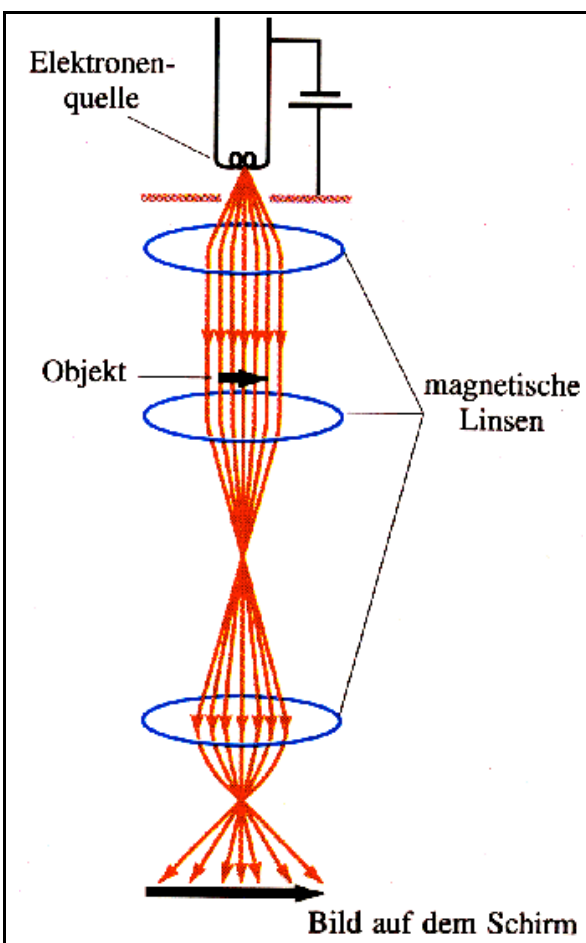
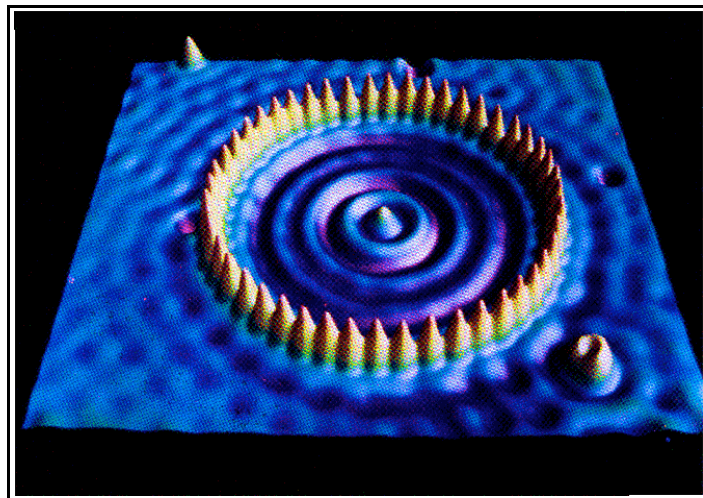


Fig. 39-8 Photographs showing the buildup of an interference pattern by a beam of electrons in a two-slit interference experiment like that of Fig. 39-6. Matter waves, like light waves, are *probability waves*. From top to bottom the approximate numbers of electrons involved are 7, 100, 3000, 20 000, and 70 000.



Elektronenwellen können auch durch Linsen gebeugt und damit für die Mikroskopie verwendet werden.



Heute können Welleneigenschaften u.a. auch mit einem Tunnelmikroskop nachgewiesen werden. In diesem Fall wurden 48 Eisenatome auf einer Kupferoberfläche in einem Ring angeordnet. Die Elektronenwellen werden an diesen Fremdatomen reflektiert und bilden stehende Oberflächenwellen, welche mit einem Rastertun-

nelmikroskop abgebildet wurde (Science 262, 218 (1993)).

7.2.5 Neutronen

Ein anderes wichtiges Beispiel sind Neutronen, welche ebenfalls für Strukturuntersuchungen verwendet werden. Insbesondere werden sogenannte thermische Neutronen verwendet, d.h. Neutronen, deren kinetische Energie der mittleren thermischen Energie bei Raumtemperatur entspricht

$$E = p^2/2m_N = 3/2 kT \quad \text{für } T = 300 \text{ K} .$$

Diese haben eine Wellenlänge

$$\lambda = h/p = h / (3 k T m_N)^{1/2} = 6 \cdot 10^{-34} / (3 \cdot 1.4 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 1.7 \cdot 10^{-27})^{1/2} \approx 10^{-10} \text{ m} ,$$

also wiederum etwa ein Angström.

Für höherenergetische Neutronen, z.B. mit einer Energie von 100 eV (wie die Elektronen im ersten Beispiel) wird der Impuls $p = 2 (m E_{\text{kin}})^{1/2}$ um den Faktor

$$(m_N/m_e)^{1/2} \approx (1836)^{1/2} \approx 43$$

größer als bei den Elektronen und die Wellenlänge deshalb um den gleichen Faktor kleiner.

7.2.6 Schwerere und zusammengesetzte Teilchen

Allgemein gilt: mit zunehmender Masse wird die de Broglie Wellenlänge kürzer. Prinzipiell bleibt aber die Beziehung gültig, auch bei zusammengesetzten Teilchen wie Atomen. Erste Versuche dazu wurden 1930 von Estermann und Stern mit Helium durchgeführt.

Ref: I. Estermann and O. Stern, Z. Phys. 61 (1930) 95.

Ein Heliumatom hat eine Masse von $6.7 \cdot 10^{-27}$ kg, also ähnlich wie ein Neutron ($\times 4$), und damit bei thermischen Geschwindigkeiten eine ähnliche Wellenlänge ($1/2$). In diesen Experimenten wurden die Beugungsmaxima bei der Reflexion an NaCl Kristallen gemessen. Wenn die Bragg-Bedingung erfüllt ist findet man eine erhöhte Reflektivität. Da es sich um thermische Strahlen handelt sind sie nicht monochromatisch und die Reflexionsmaxima sind relativ breit. Es ist aber möglich, die mittlere Wellenlänge der Strahlen zu ändern indem man die Temperatur und / oder die Art des Atoms / Moleküls ändert. Dadurch werden die Positionen der Beugungsmaxima verschoben.

Der nächste Schritt ist von Atomen zu Molekülen. Auch dieser Schritt wurde bereits von Estermann und Stern durchgeführt, welche neben He auch die Beugung von molekularem Wasserstoff, H_2 , untersuchten. An komplizierteren Molekülen wurden erst vor wenigen Jahren Beugungseffekte nachgewiesen.

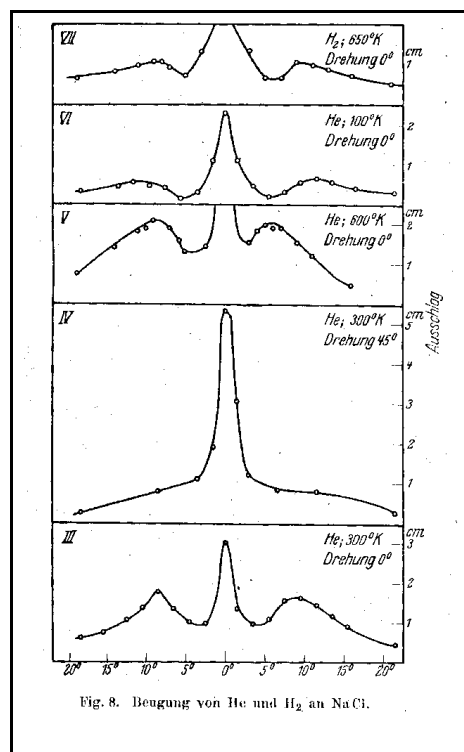
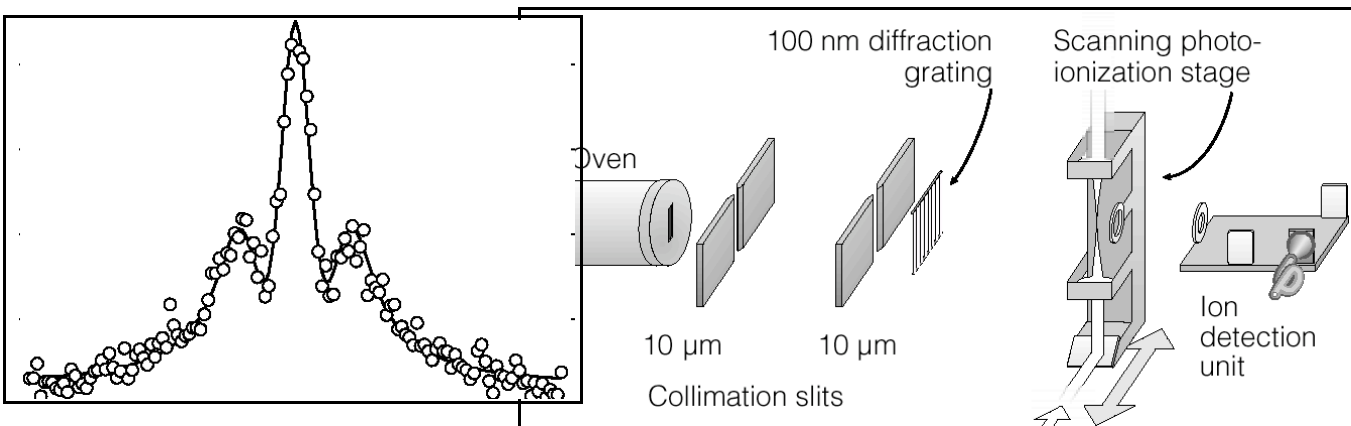


Fig. 8. Beugung von He und H_2 an NaCl.



Dafür wurde ein Strahl von C_{60} Molekülen zunächst kollimiert und dann auf ein Beugungsgitter geschickt. In einer Distanz von ca. 1 m wurden dann die Beugungsmaxima gemessen.

Werden aber die Massen größer, so werden die Wellenlängen extrem kurz. Bei einer Kugel z.B. der wir der Einfachheit halber eine Masse von 1 kg und eine Geschwindigkeit von 1 m/sec zuordnen wird die de Broglie Wellenlänge

$$\lambda = h/p = 6 \cdot 10^{-34} \text{ m} .$$

Bei der Diskussion der Optik hatten wir gefunden, dass wir die Welleneigenschaften eines Teilchens nicht beobachten können wenn die Dimensionen des Apparates groß sind im Vergleich mit der Wellenlänge. Diese Voraussetzung ist offensichtlich für eine Kugelbahn erfüllt. In diesem Bereich kann die Ausbreitung mit Hilfe der geometrischen Optik, resp. der klassischen Mechanik diskutiert werden.

Man kann noch weitergehen und z.B. die Wellenlänge der Erde bestimmen. Deren Masse beträgt $6 \cdot 10^{24}$ kg. Auf der Bahn um die Sonne hat sie eine Geschwindigkeit von ca. 30 km/sec und damit eine Wellenlänge von $4 \cdot 10^{-63}$ m. Deshalb ist die klassische Mechanik, welche die Welleneigenschaften der Materie vollständig vernachlässigt, eine ausgezeichnete Näherung für die Beschreibung von astronomischen Objekten.