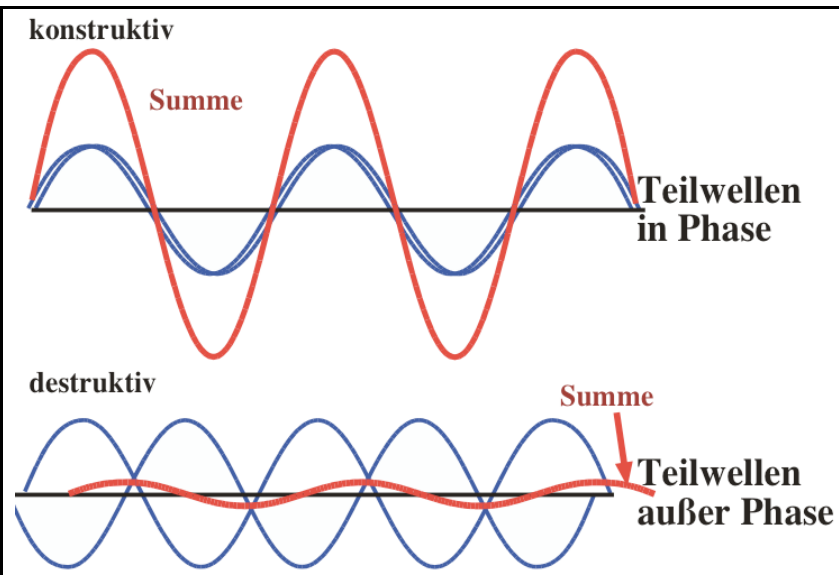


6.6 Interferenz

6.6.1 Linearität für Felder, nicht für Intensitäten

Wie mehrfach betont sind die Maxwell Gleichungen oder auch andere Wellengleichungen lineare Gleichungen (sofern die Materialgleichungen auch linear sind). Verschiedene Wellen beeinflussen sich deshalb nicht. Dies gilt genau so wie für die Wasserwellen im Bild.



Wellen gleicher Frequenz und Wellenlänge summieren sich je nach Phasendifferenz zu einer Gesamtwelle, die der Summe, der Differenz oder einem Wert dazwischen entsprechen kann.

In der Optik beobachtet man in den meisten Fällen nicht die Felder selbst, sondern die Intensität oder Leistung einer Welle. Diese sind

proportional zum Quadrat des Feldes und man bezeichnet optische Detektoren deshalb als quadratische Detektoren. Zu dieser Art von Detektoren gehört auch das menschliche Auge. Die Maxwellgleichungen beschreiben somit nicht direkt die gemessene Größe; für diese, also für die Intensität, ist die Physik nicht linear. Damit haben wir eine weitere Grenze der geometrischen Optik erreicht, welche davon ausgeht, dass einzelne Strahlen voneinander unabhängig sind.

Gewöhnliche Detektoren messen Intensität integriert über die Fläche. Diese ist proportional zum Quadrat des Feldes. Wenn zwei Felder A und B auf einen Detektor fallen, so misst dieser das Quadrat des resultierenden Feldes, d.h. das Signal ist proportional zu

$$s \sim (A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB .$$

6.6.2 Der Interferenzterm

Im Signal sehen wir somit nicht einfach die Summe der beiden Teilsignale ($= A^2 + B^2$), sondern es enthält einen zusätzlichen Term $2AB$, der als Interferenzterm bezeichnet wird.

Für komplexe Amplituden müssen wir zusätzlich die relative Phase der beiden Wellen berücksichtigen. Das Signal ist in diesem Fall proportional zum Absolutquadrat der Gesamtwelle, d.h.

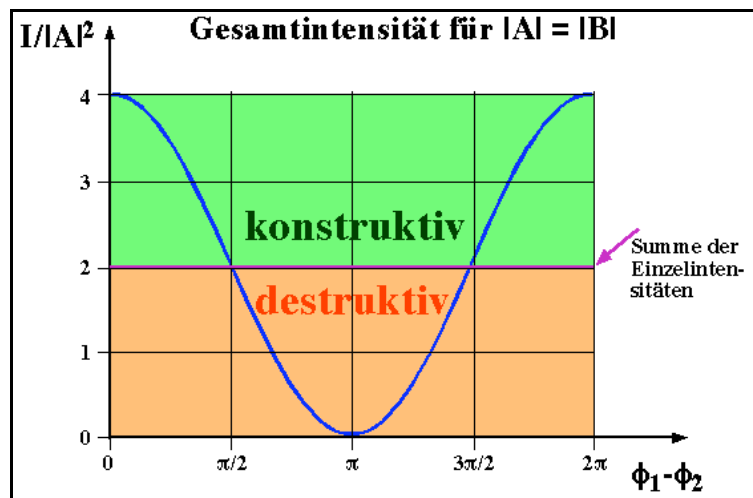
$$s \sim |A+B|^2 = (A+B)(A+B)^* = AA^* + AB^* + A^*B + BB^* = |A|^2 + |B|^2 + 2\text{Re}\{AB^*\} .$$

Der Interferenzterm kann auch geschrieben werden als

$$2\text{Re}\{AB^*\} = 2 |AB| \cos(\varphi_1 - \varphi_2) ,$$

wobei $\varphi_{1,2}$ die Phasen der einzelnen Wellen darstellen. Die Interferenz wird somit maximal wenn die beiden Phasen identisch sind. Man spricht dann von konstruktiver Interferenz. Unterscheiden sich die beiden Phasen um π , so wird der Signalbeitrag negativ und man spricht von destruktiver Interferenz. Die Interferenz verschwindet wenn die beiden Wellen um $\pi/2$ außer Phase sind.

Für gleich starke Felder, $|A| = |B|$ wird die kombinierte Intensität als Funktion der Phasendifferenz



$\varphi_1 - \varphi_2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$s/ A ^2$	4	2	0	2	4
Interferenz	konstruktiv	0	destruktiv	0	konstruktiv

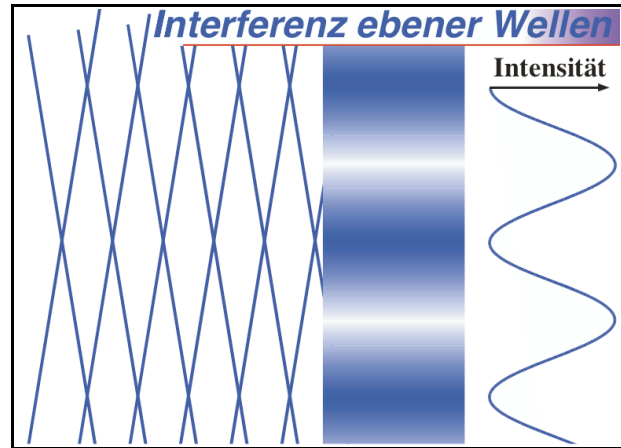
Neben der Phasenlage muss auch die Polarisierung der beiden Felder übereinstimmen: Sind die beiden Felder z.B. x, resp. y-polarisiert, so entsteht keine Interferenz.

Wir können solche Interferenzeffekte untersuchen wenn wir zwei Laserstrahlen überlagern. Die beiden Strahlen können näherungsweise als ebene Wellen betrachtet werden. Genauer betrachten wir zwei ebene Wellen, die unter einem kleinen Winkel ϑ auf einen Schirm fallen.

Die beiden Felder verstärken sich gegenseitig wenn sie in Phase sind und interferieren destruktiv wenn sie außer Phase sind. Dies geschieht jeweils entlang einer Geraden senkrecht zum Schirm. Der Abstand zwischen zwei solchen Geraden ist offenbar

$$d = \frac{\lambda}{\sin \theta}.$$

Der Abstand wird also umso größer, je kleiner der Winkel wird; für parallele Strahlen verschwindet die Ortsabhängigkeit, für gegenläufige Strahlen erreicht der Abstand sein Minimum bei der halben Wellenlänge.



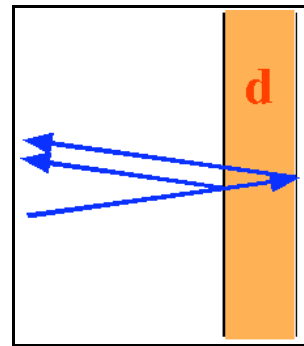
6.6.3 Zweistrahlint interferenz an dünnen Schichten

Wenn Licht an einer planparallelen Platte reflektiert wird, so erhält man je einen Reflex von der Vorder- und der Rückseite. Diese beiden reflektierten Wellen stammen von der gleichen Welle und können deshalb interferieren.

Wir betrachten als Beispiel die Reflexion an einer dünnen Seifenlamelle der dicke d . Die Weglängendifferenz zwischen den beiden Teilstrahlen, welche an der vorderen, resp. hinteren Grenzfläche reflektiert werden, beträgt $2d$. Daraus resultiert eine Phasendifferenz

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{2nd}{\lambda},$$

wobei λ die Vakuumwellenlänge bezeichnet. Zusätzlich erfährt der Teilstrahl, der beim Übergang von der optisch dünneren Luft zum optisch dichteren Medium (Seifenwasser) reflektiert wird, einen Phasensprung um π (siehe Fresnel-formeln: $r < 0$). Somit wird der reflektierte Strahl ausgelöscht wenn die Weglängendifferenz ein Vielfaches der optischen Wellenlänge λ ist, resp.



$$2dn = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

d.h. wenn die Dicke der Schicht ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist. $m = 0$ entspricht einer Seifenlamelle verschwindender Dicke; in diesem Fall tritt offensichtlich keine Reflexion auf.

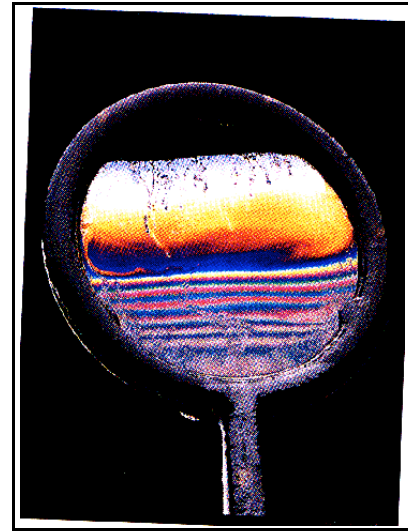
Verstärkte Reflexion durch konstruktive Interferenz erhält man wenn die Phasendifferenz ein Vielfaches von 2π ist, d.h. wenn

$$2dn = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Exp 61 : Interferenz an einer Seifenlamelle

Eine solche dünne Schicht kann man z.B. sehr gut durch eine Seifenhaut darstellen. Da die Interferenzbedingung von der Wellenlänge abhängt wird sie nicht für alle Farben des Spektrums gleichzeitig erfüllt.

Außerdem ist die Dicke der Seifenhaut nicht überall gleich: Die Schwerkraft zieht die Lösung nach unten und führt deshalb zu einer Abfolge von Interferenzstreifen.



6.6.4 Farben dünner Filme

Interferenz kann auch Farbwirkungen erzeugen.

Man findet solche Effekte z.B. bei Seifenlamellen, Aufdampfschichten, Oxidschichten, Schmetterlingen oder Vogelfedern.

Die Bedingung für konstruktive Interferenz

$$2 d n = (2 m + 1) \lambda / 2$$

hängt von der Wellenlänge ab. Wir betrachten als Beispiel eine Lamellendicke 350 nm, Brechungsindex $n = 1.33$. Dann erwartet man bei folgenden Wellenlängen positive Interferenz:

$$\lambda_m = 4 d n / (2 m + 1) .$$

Die maximale Wellenlänge ist somit

$$\lambda_0 = 4 d n = 1862 \text{ nm} .$$

Die weiteren Wellenlängen sind

m	2m+1	λ_m / nm
0	1	1862
1	3	621
2	5	372
3	7	266

Nur die Wellenlänge 621 nm ist sichtbar. Somit ist diese Lamelle rot.

Variiert die Dicke der Schicht, wie z.B. bei einem Seifenfilm, so ändert sich die Wellenlänge, bei der Reflexion maximal wird. Dadurch werden Seifenblasen oder dünne Ölfilme farbig.

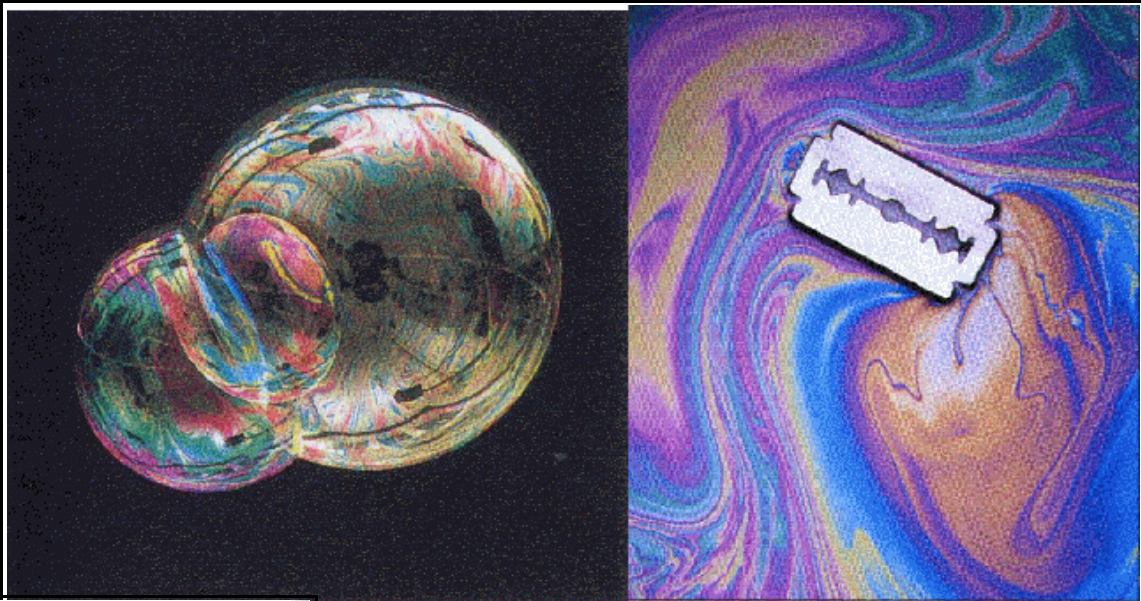


Photo Library/Photo

(Peter Aprahamian/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.)

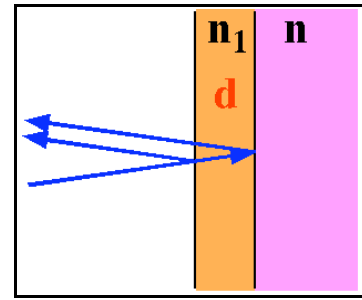


Interferenzfarben kommen auch in der Natur vor, wobei entweder die Dicke einer Schicht oder die Größe von kleinen Partikeln angepasst wird.

6.6.5 Entspiegelung

Destruktive Interferenz zwischen reflektierten Wellen kann man verwenden, um störende Reflexionen an einer Oberfläche (z.B. Brille) zu eliminieren.

In diesem Fall verwendet man eine dünne Schicht zwischen Luft und Glas, so dass diesmal auch zwei reflektierte Teilwellen entstehen. Der Brechungsindex dieser Schicht liegt zwischen dem Brechungsindex von Glas und dem von Luft, so dass beide Wellen einen Phasensprung erleiden. Monochromatisches Licht der Wellenlänge λ soll senkrecht auf diese Oberfläche auftreffen. Destruktive Interferenz tritt ein wenn die zweite Teilwelle eine zusätzliche optische Weglänge von $2 n_1 d$ und dadurch eine Phasenverzögerung um



$$\pi = 2 \pi n_1 2 d / \lambda$$

erfährt. Dies ergibt eine Schichtdicke von

$$d = \lambda / 4 n_1 .$$

Die Schichtdicke sollte somit ein Viertel der Wellenlänge in dieser Schicht betragen.

Vollständige Auslöschung der beiden Teilwellen, d.h. ideale Entspiegelung erhält man wenn die beiden Teilwellen gleich stark sind. Die Reflektivität der ersten Grenzfläche ist

$$E^{(r1)} / E^{(i)} = - \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} .$$

Wir nehmen weiterhin an, dass die transmittierte Welle nicht wesentlich abgeschwächt ist, so dass die zweite reflektierte Teilwelle als

$$E^{(r2)} / E^{(i)} = - \frac{n - n_1}{n + n_1}$$

geschrieben werden kann. Somit müssen die beiden Reflexionskoeffizienten durch

$$- \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} = - \frac{n - n_1}{n + n_1} \quad \Rightarrow \quad n_1 = \sqrt{n}$$

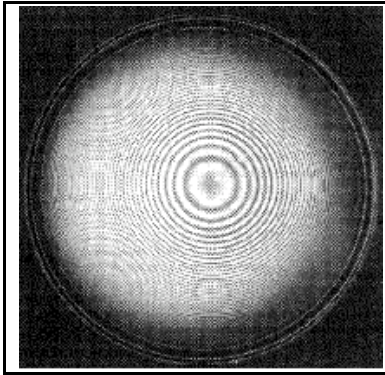
gegeben sein. Für Glas ($n \sim 1.5$) ist somit eine Entspiegelung mit einem Material mit Brechungsindex $n_1 \sim 1.22$ möglich.

6.6.6 Zweistrahlinterferenz

Exp. 60: Interferenz an Glimmerscheibe

In diesem Versuch wird die Interferenz durch zwei Teilstrahlen erzeugt, die an der Vorder- und Rückseite einer Glimmerplatte reflektiert werden. Die Weglänge hängt vom Winkel ab, unter dem das Licht auf die Glimmerplatte einfällt. Man beobachtet deshalb konzentrische Ringe. In diesem Fall beträgt die Distanz im Material mehrere Tausend Wellenlängen.

Eine andere Anwendung sind die sog. Newton'schen Ringe: Sie ergeben sich durch Zweistrahlinterferenz wenn man eine Linse auf einen ebenen Spiegel legt. Wir betrachten die beiden Strahlen, welche sich durch Reflexion an der unteren Linsenfläche und der Oberfläche des Spiegels ergeben.



Man erhält wiederum Auslöschung wenn die Weglängendifferenz ein Vielfaches der Wellenlänge ist, d.h. wenn

$$2d = m \lambda.$$

Immer wenn die Dicke des Luftspaltes um $\lambda/2$ zunimmt erhalten wir einen zusätzlichen Interferenzring. Die Dicke des Luftspaltes beträgt

$$d = R - \sqrt{R^2 - r_m^2}.$$

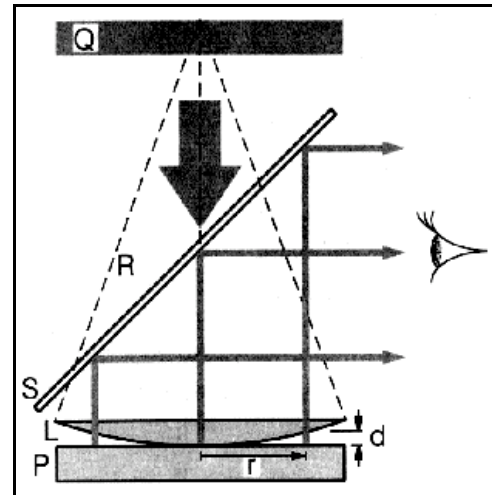
Dies kann man auflösen nach den Radien r_m , bei denen Auslöschung stattfindet:

$$r_m = \sqrt{R^2 - (R - m\lambda/2)^2} \sim \sqrt{m\lambda R}.$$

Offenbar nimmt der Abstand zwischen aufeinanderfolgenden dunklen Ringen ab. Dies ist in der Figur deutlich erkennbar. Solche Muster werden z.B. zur Qualitätssicherung verwendet.

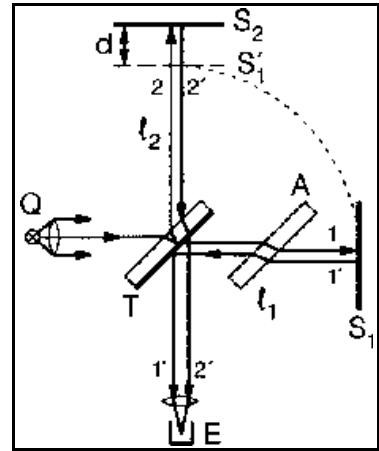
Interferenz kommt nur zustande wenn die interferierenden Wellen die gleiche Polarisation aufweisen. So interferieren die beiden Teilstrahlen nicht, welche beim Durchgang von unpolarisiertem Licht durch Kalkspat entstehen. Bringt man jedoch einen Polarisator in den Strahl, so werden beide Teilstrahlen dadurch auf eine gemeinsame Polarisationssebene projiziert und können deshalb interferieren. Die resultierenden Interferenzmuster sind farbig, da die Differenz der optischen Weglängen von der Wellenlänge abhängt. Verwendet man monochromatisches Licht so sind entsprechend mehr Interferenzringe sichtbar.

Exp. 60a) Interferenz am Kalkspat



6.6.7 Interferometer als Messinstrumente

Wahrscheinlich das bekannteste optische Interferometer ist der Typ des Michelson Interferometers. Dieses System wurde von Michelson und Morley zur Messung der Lichtgeschwindigkeit verwendet. Dabei wird ein Lichtstrahl an einem Strahlteiler in zwei Teile aufgeteilt, die zwei unterschiedliche Wege durchlaufen. Nach Reflexion an einem Spiegel werden sie auf dem gleichen Strahlteiler wieder kombiniert. Haben beide Strahlen den gleichen optischen Weg zurückgelegt, so beobachtet man konstruktive Interferenz; ist der Wegunterschied gerade gleich der halben Wellenlänge, so beobachtet man destruktive Interferenz.



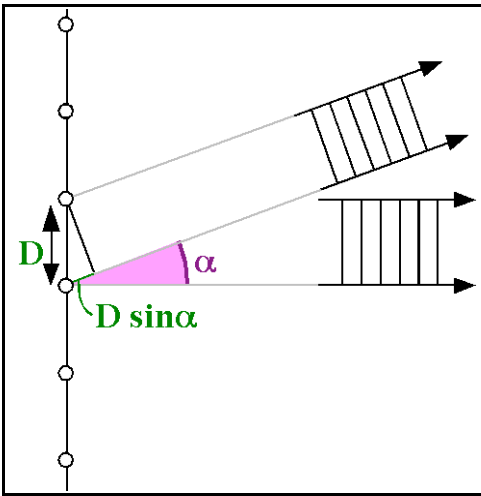
Verwendet man einen Strahl, der nicht vollständig einer ebenen Welle entspricht, so erscheinen auf dem Schirm Ringe, die mit den Newton'schen Ringen vergleichbar sind. Man kann sich aber auf das Zentrum des Ringsystems konzentrieren. Bei diesem Interferometer kann die Länge des einen Arms durchgefahen werden. Fährt man mit einem Motor einen der Arme durch, wo sieht man die Ringe über den Schirm wandern.

Exp 63 : Michelson Interferometer

Michelson Interferometer haben unterschiedlichste Verwendungen. Bei einem Weglängenunterschied von $d = 0$ ist die Interferenz für alle Wellenlängen positiv, resp. negativ. Bei einer endlichen Weglängendifferenz kann positive Interferenz für bestimmte Wellenlängen auftreten, negative für andere. Man kann Michelson Interferometer deshalb für die Analyse von Lichtwellenlängen verwenden. So enthalten die sog. FTIR (=Fourier Transform Infrarot) Spektrometer ein Michelson Interferometer, in dessen einem Arm die zu untersuchende Probe steht. Andere Anwendungen verwenden diese Interferometer um Weglängen oder Brechungsindizes zu bestimmen.

Die größten Geräte dieses Typs weisen eine Armlänge von mehreren km auf und sollen für den Nachweis von Gravitationswellen verwendet werden. Solche Geräte befinden sich in mehreren Ländern im Bau und sollen relative Längenänderungen von etwa 10^{-20} nachweisen können. Das bedeutet auf die Armlänge von etwa 3 km bezogen eine Längenänderung um einige Prozent eines Atomkerndurchmessers.

6.6.8 Vielstrahlinterferenz



In vielen Fällen interferieren mehr als zwei Wellen. Als ein einfaches Beispiel dafür betrachten wir n gleiche Quellen, die sich auf einer Geraden befinden. Sie sollen die gleiche Frequenz haben. Wir betrachten das resultierende Intensitätsmuster in einer Richtung, die durch den Winkel α gegenüber der Normalen gegeben sei. Die Weglängendifferenz in diese Richtung zwischen den Beiträgen

zweier benachbarten Quellen beträgt

$$\Delta = D \sin \alpha .$$

Sind alle Quellen in Phase, so führt diese Weglängendifferenz beim Beobachter zu einer Phasendifferenz zwischen den Beiträgen benachbarter Quellen von

$$\Delta \phi = 2 \pi \Delta / \lambda = 2 \pi D \sin \alpha / \lambda .$$

Je nach Richtung α können die Phasendifferenzen zu konstruktiver oder destruktiver Interferenz führen.

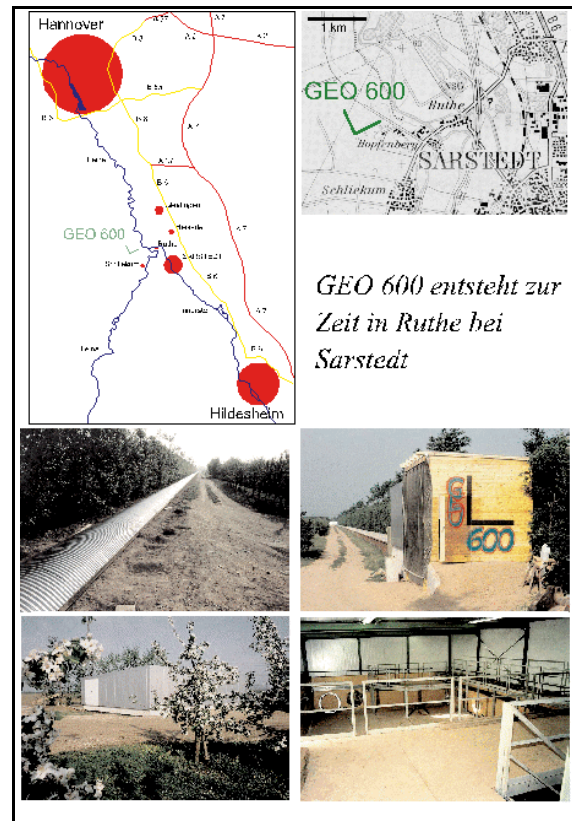
Wir suchen nun die Bedingung, dass die verschiedenen Beiträge konstruktiv interferieren. Dies ist offenbar dann der Fall, wenn $\Delta \phi$ ein Vielfaches von 2π ist, d.h. wenn

$$\Delta \phi = 2 \pi D \sin \alpha / \lambda = 2 \pi m ,$$

d.h. wenn

$$D \sin \alpha = m \lambda .$$

oder



GEO 600 entsteht zur Zeit in Ruthe bei Sarstedt

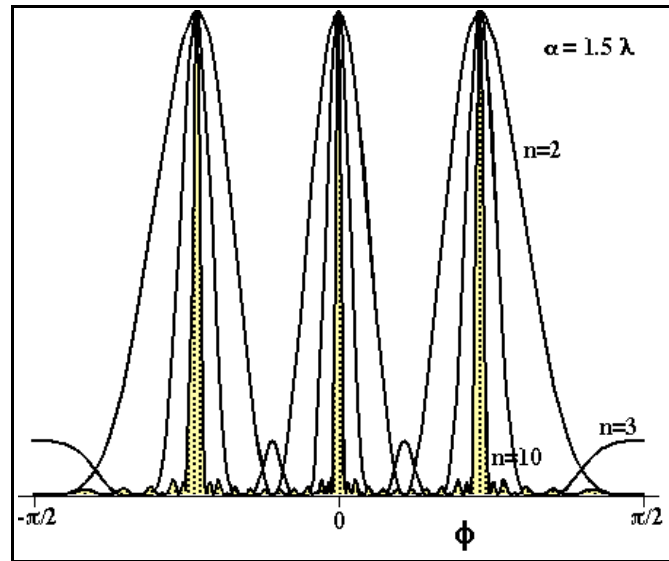
$$\sin \varphi = m \lambda / D ; m = 0, 1, 2, \dots$$

In diese Richtungen erhalten wir eine maximale positive Interferenz, d.h. maximale Intensität.

Für den Fall von $n=2$ Quellen variiert die Intensität zwischen den beiden Maxima sinusförmig; Für n Quellen addieren sich n Cosinusfunktionen zur Amplitude

$$A(\sin \varphi) = \sum_{k=1, n} a_k \cos(k \varphi) .$$

Wie man sich leicht überzeugen kann ist das Resultat proportional zu n wenn die obige Bedingung für konstruktive Interferenz erfüllt ist. Das Resultat ist offenbar einfach eine Fourierreihe, deren Koeffizienten a_k durch die Amplituden der einzelnen Quellen gegeben sind. Wir betrachten hier zunächst identische Amplituden, $a_k = a_0$.

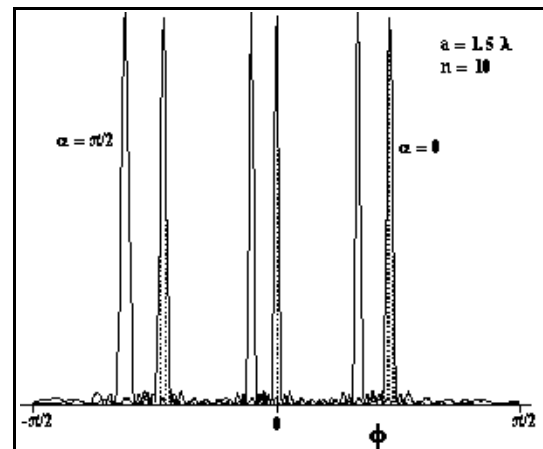


Zwischen den Interferenzmaxima nähert sich die Kurve der Nulllinie. Da die Interferenz nur in eine Richtung (resp. eine diskrete Zahl von Richtungen) konstruktiv ist erreicht man auf diese Weise eine Richtungsabhängigkeit der abgestrahlten Welle. Je größer die Anzahl der beteiligten Wellen, desto stärker die Richtungsabhängigkeit. In der Figur sind die Intensitäten als Funktion des Winkels φ für eine Zahl von $n = 2, 3, 10$ Quellen gezeichnet.

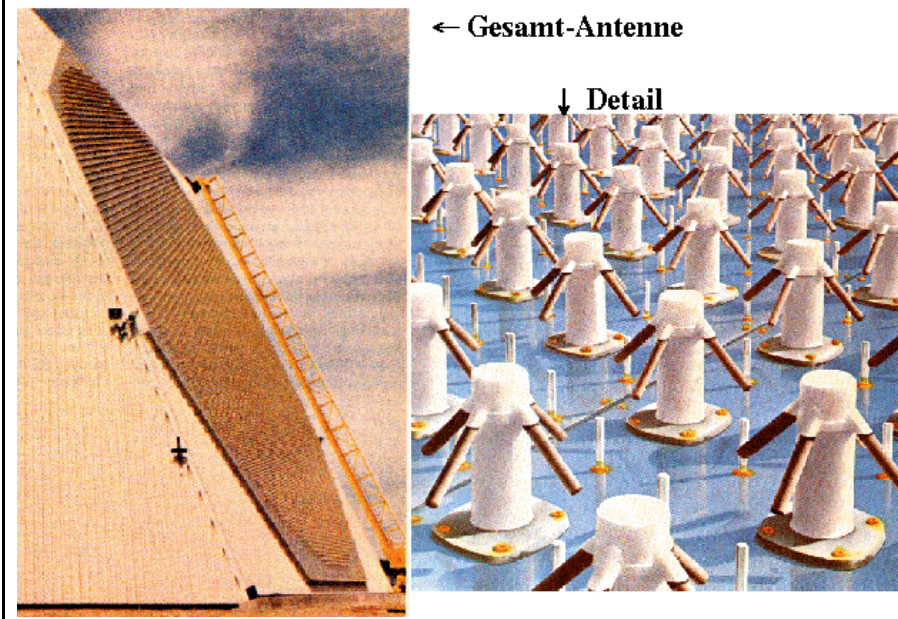
Die Richtung, in die konstruktive Interferenz auftritt, ist durch die obige Bedingung, aber auch durch die Phase der Quellen bestimmt. Indem man die Phase der einzelnen Quellen verschiebt kann man die Richtung des Interferenzmaximums steuern. Wird zwischen benachbarten Quellen eine Phasendifferenz von φ geschaltet, so verschiebt sich die Interferenzbedingung zu

$$D \sin \varphi - \varphi = m \lambda .$$

Damit kann man die Abstrahlrichtung verschieben. In diesem Beispiel wurde die Phasendifferenz φ zu $\pi/2$ gewählt. Dadurch verschiebt sich die Lage der Interferenzmaxima um $(\pi/2)/2\pi = 1/4$ des Abstandes der Maxima.



"Phased-array" Radar



Diese Möglichkeit wird z.B. beim Radar verwendet. Man kann Radarstrahlen in bestimmte Richtungen abstrahlen, die durch die relative Phase zwischen einer großen Zahl von kleinen Antennen festgelegt sind.

6.6.9 Kohärenz

Wir haben bisher angenommen, dass die verschiedenen Lichtquellen eine konstante Phasendifferenz (die gleich null sein kann) besitzen. Dies ist nicht immer der Fall. Wenn man in einem Zimmer mehrere Lichtquellen einschaltet wird es überall heller – offenbar gibt es

keine Interferenz. Der Grund ist dass Wellen (z.B. Licht) nur dann Interferenzmuster bilden können wenn sie eine definierte Phasenbeziehung zueinander aufweisen.

Die Phase einer optischen Lichtquelle kann zeitlich und räumlich variieren. Man quantifiziert die Phasenkonstanz sowohl bezüglich ihres räumlichen wie auch ihres zeitlichen Verhaltens und bezeichnet diese als Kohärenz. Eine zeitlich kohärente Lichtquelle ist per Definitionem monochromatisch. Diese Bedingung wird für keine Lichtquelle absolut erfüllt.

Eine thermische Lichtquelle hat ein breites Frequenzspektrum. Dies bedeutet dass die Frequenz nicht exakt definiert ist, resp. rasch variiert. Damit ist die Phase auch nicht definiert. Thermische Lichtquellen haben deshalb vollständig zufällige Phasen. Einzelne Atome besitzen ein scharfes Linienspektrum und somit relativ gut definierte Frequenz. Die Phase ist jedoch immer noch zufällig, da der Zeitpunkt, zu dem das Atom sein Photon aussendet, durch den Zufall bestimmt wird.

Im Gegensatz dazu weist ein Laser über eine gewisse Zeit eine konstante Phase auf. Für einen kommerziellen Laser liegt diese Zeit bei etwa einer μsec , bei einem hochgezüchteten Forschungsgerät kann sie bis auf etwa eine Sekunde verlängert werden. Man kann solche Kohärenzzeiten praktisch nur messen indem man die Phasen von zwei unabhängigen Lasersystemen vergleicht.

Die räumliche Kohärenz einer Lichtquelle bezeichnet die Variation der optischen Phasen über den Raum. Bei einer thermischen Lichtquelle existiert hier zunächst wiederum keine Kohärenz, d.h. die Kohärenzlänge ist von der gleichen Größenordnung wie die optische Wellenlänge. Ein Laser hingegen besitzt eine gute räumliche Kohärenz, die praktisch beliebig hoch sein kann. Auch mit thermischen Quellen können räumlich kohärente Quellen erzeugt werden, indem man z.B. einen dünnen Spalt oder ein kleines Loch beleuchtet. Sofern die Dimensionen dieser Sekundärquellen klein sind im Vergleich zur Kohärenzlänge der Primärquelle verbessert man damit die Kohärenzeigenschaft.

Die Kohärenzlänge kann auch über die Frequenzbandbreite ausgedrückt werden:

$$l_{\text{coh}} = \frac{c}{\Delta \nu}.$$

Typische Frequenzbandbreiten und Kohärenzlängen sind

Licht	Bandbreite	Kohärenzlänge
"weißes" Licht	200 THz	$1.5 \mu\text{m}$
Spektrallampe	1.5 GHz	20 cm
Halbleiterlaser	10 MHz	30 m
HeNe Laser stabilisiert	150 kHz	2 km

Man kann zwei (zueinander) räumlich und zeitlich kohärente Lichtstrahlen erzeugen indem man einen Lichtstrahl an einem Strahlteiler trennt. Allerdings darf die Weglängendifferenz zwischen den beiden Teilstrahlen nicht mehr als die Kohärenzlänge sein.

Die Messung der räumlichen Kohärenz einer Lichtquelle erlaubt z.B. die Messung des Durchmessers von Sternen: eine punktförmige Quelle ist immer räumlich (aber nicht unbedingt zeitlich) kohärent. Ein Stern hat aber eine endliche Oberfläche, deren Teile zueinander nicht kohärent sind. Indem man die Phase von Lichtstrahlen im Abstand von einigen Dutzend m misst kann man die Ausdehnung eines Sterns bestimmen. Die Bedingung hierfür ist praktisch identisch wie die Auflösungsbedingung von Abbé.