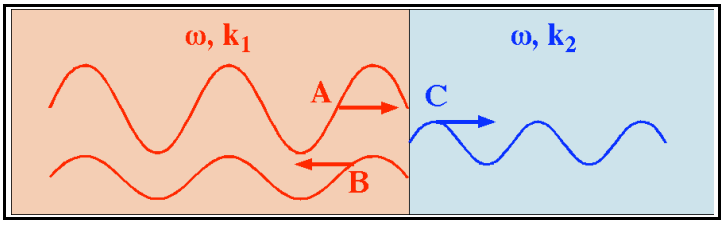
6.3 Reflexion und Brechung

6.3.1 Reflexion: Grundlagen

Wie bereits bei den Seilwellen diskutiert werden Wellen reflektiert wenn die Bedingungen für die Ausbreitung sich ändern. Das einfachste Beispiel war das Seil, welches am Ende befestigt war. In diesem Fall wurde die gesamte Welle reflektiert, es bildete sich eine stehende Welle aus.



Allgemein treten Reflexionen auf wenn sich Wellen über Grenzflächen ausbreiten, unabhängig von der Art der Welle. Grenzflächen sind hierbei Punkte, an denen sich der Wellenwiderstand ändert. In der Optik ist der Wellenwiderstand durch den Brechungsindex bestimmt, bei einer Seilwelle z.B. durch die Dicke oder die Spannung des Seils. Hier treten also z.B. Reflexionen auf, wenn die Dicke des Seils sich ändert.

Für den einfachen Fall einer eindimensionalen Welle kann man über die Erhaltung der Energie, welche mit der Welle transportiert wird, allgemein folgende Ausdrücke für die Reflexion und Transmission herleiten:

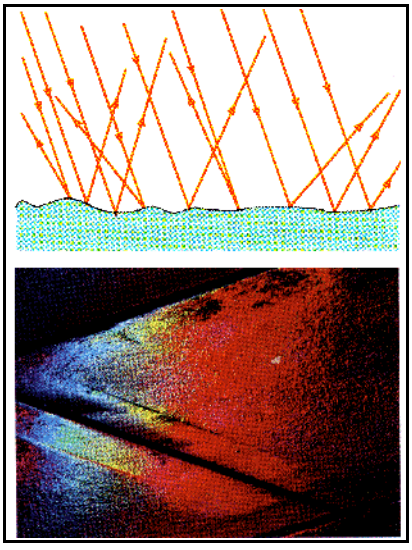
$$B = (k_1-k_2)/(k_1+k_2)\ A \qquad C = 2\ k_1/(k_1+k_2)\ A\ ,$$

wobei A die Amplitude der einlaufenden Welle, B diejenige der reflektierten, und C die Amplitude der transmittierten Welle bezeichnen. Die Frequenz ω ist für alle drei Wellen identisch.

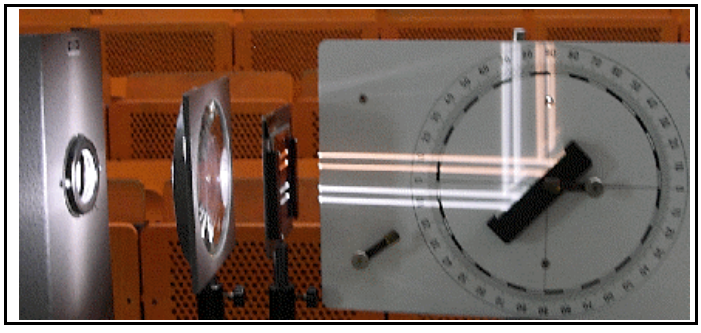
In drei (oder auch in zwei Dimensionen) tritt ebenso Reflexion auf. Wir beschränken uns hier ausschließlich auf ebene Wellen, so dass die Ausbreitung ebenfalls eindimensional erfolgt. Wenn wir eine ebene Welle betrachten, die senkrecht auf eine Grenzfläche einfällt, so ist das Problem exakt analog zum eindimensionalen Fall. Trifft die Welle unter einem Winkel auf die Grenzfläche auf, so ist nicht mehr von vornherein klar, unter welchem Winkel sie reflektiert wird.

Zunächst unterscheidet man diffuse und spekuläre Reflexion. Diffuse Reflexion ist eigentlich das allgemeinere Phänomen. Es ist z.B. dafür verantwortlich, dass Sie die Schrift an der Tafel lesen können.

Wir können es zum mindesten qualitativ darauf zurückführen, dass Licht auf eine raue Oberfläche auftrifft und in unterschiedliche Richtungen reflektiert wird. Offensichtlich ist dieses Phänomen sehr stark von der Beschaffenheit der Oberfläche abhängig.



Da wir hier an einfach zu behandelnden Modellsystemen interessiert sind behandeln wir ausschließlich den Fall der spekulären Reflexion, also der Reflexion an einer idealen glatten Oberfläche, die entlang der gesamten Fläche identische Eigenschaften aufweist.



Eine einfache Messung bestätigt unser Erfahrungswissen dass ein Lichtstrahl so reflektiert wird dass die rücklaufende Welle einen Winkel zur Flächennormalen aufweist, der gerade gleich dem Winkel der einlaufenden Welle ist, d.h.

Exp 38: Strahlengänge: Reflexion

- der einfallende und der reflektierende Strahl liegen in einer Ebene mit dem Einfallslot.
- der Einfallswinkel und der Reflexionswinkel sind gleich, $\theta_r = \theta_e$.

Diese Beziehung hatten wir bereits aus dem Prinzip von Fermat hergeleitet.

6.3.2 Herleitung des Reflexionsgesetzes

Dieses Gesetz wurde erstmals von Euklid 300 v Chr. formuliert. Es ist im Rahmen der Korpuskulartheorie leicht herleitbar aus den Gesetzen über den elastischen Stoß: die Komponente des Impulses parallel zur Grenzfläche wird durch die Reflexion nicht beeinflusst, die senkrechte Komponente wird elastisch invertiert.

Hier möchten wir noch eine Herleitung aus dem Wellenbild durchführen. Dafür beschreiben wir das Licht nicht mehr als Strahl, sondern als Welle. Der einfallende Strahl sei durch den Wellenvektor

$$k^{(i)} = \{k_x, 0, k_z\}$$

definiert. Damit sind die Abstände der Knotenflächen auf der Grenzfläche festgelegt. Die Grenzfläche legt immer gewisse Randbedingungen für die Wellen fest; so müssen an einer metallischen Grenzfläche die parallelen Komponenten des elektrischen Feldes verschwinden. Diese Randbedingungen können nur dann eingehalten werden wenn die einfallende und die reflektierte Welle an der Grenzfläche das gleiche zeitliche Verhalten (d.h. die gleiche Frequenz ω) und das gleiche räumliche Verhalten (d.h. gleiche Wellenvektoren parallel zur Grenzfläche) aufweisen.

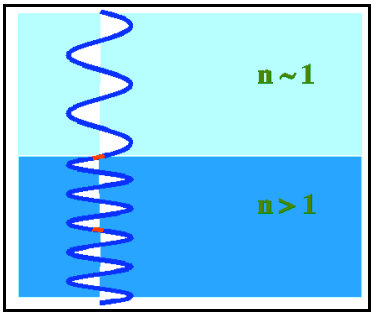
Da der Brechungsindex und somit die Phasengeschwindigkeit für die einfallende und die reflektierte Welle gleich sind muss somit auch die z-Komponente des Wellenvektors den gleichen Betrag haben - sie unterscheiden sich nur im Vorzeichen. Somit ist der Wellenvektor der reflektierten Welle gegeben durch

$$k^{(r)} = \{k_x, 0, -k_z\}$$

Die impliziert die obige Beziehung für die Winkel.

Diese Herleitung ist mit der Diskussion der Impulserhaltung eng verbunden, da der Wellenvektor proportional zum Impuls des Lichtes ist: die z-Komponente wird invertiert, die beiden parallel Komponenten bleiben erhalten.

6.3.3 Brechung des Lichts an einer ebenen Grenzfläche

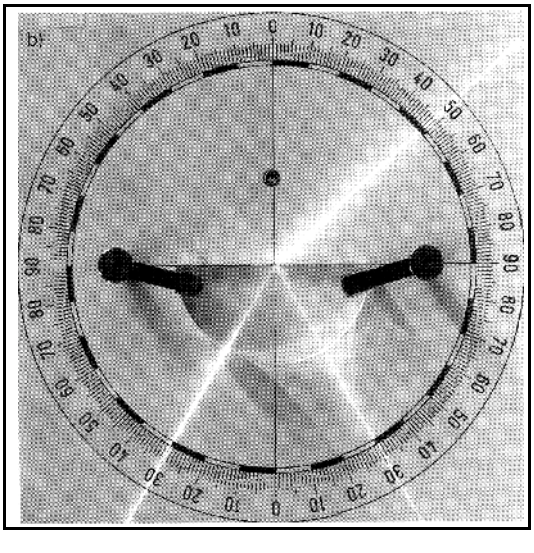


Wir betrachten zunächst eine Welle, die senkrecht auf die Grenzfläche einfällt. Die Brechungsindizes seien n_1 und n_2. Da wir bereits gesehen hatten, dass ein Teil der Welle reflektiert wird muss die transmittierte Welle eine geringere Intensität besitzen. Außerdem wird die i.a. eine andere Wellenlänge besitzen: Die Frequenz ist gleich, aber die Phasengeschwindigkeit unterscheidet sich um das Verhältnis der Brechungsindizes,

$$v_1\, n_1 = v_2\, n_2 = c$$

oder

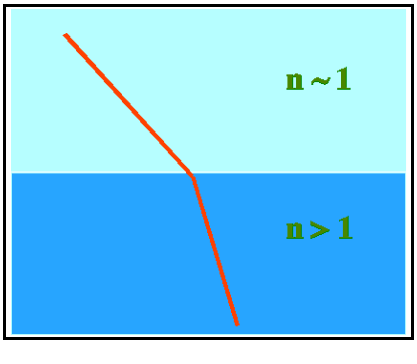
$$k_{1,2} = \square\ n_{1,2} / c\ .$$

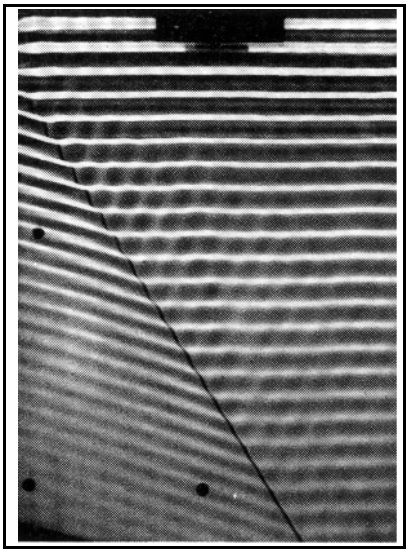


Exp. 36: Brechung, Reflexion

Jetzt betrachten wir eine Welle, die in einem Winkel $\square$ von der Senkrechten auf eine Grenzfläche einfällt. Wie bei einem Spiegel hat der reflektierte Strahl den gleichen Winkel zur Senkrechten wie der einfallende Strahl.

Der gebrochene Strahl hat einen kleineren Winkel, $\square_2 < \square_1$, falls der Übergang von einem optisch dünneren in ein optisch dichteres Medium geht (z.B. Luft $\square$ Wasser).





Diesen Winkel kann man aus der Bedingung herleiten, dass die Welle an der Grenzfläche stetig ins andere Medium übergehen muss. In den beiden Medien beträgt die Wellenlänge, d. h. der Abstand zwischen den Phasenflächen,

$$2\pi/k_1 \,, \qquad \text{resp.} \qquad 2\pi/k_2 \,.$$

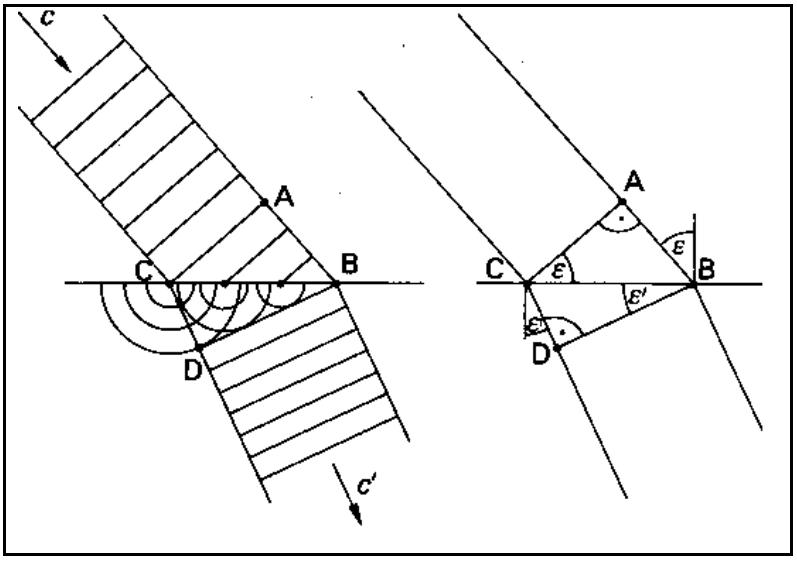
Wie bereits bei der Reflexion diskutiert müssen die Wellenvektoren parallel zur Grenzfläche gleich sein, d.h. Knoten und Maxima der beiden Wellen müssen an der Grenzfläche am gleichen Ort auftreten. Somit ist die Projektion des Abstandes zwischen den Phasenflächen, d.h. $2\pi/k_i$ auf die Grenzfläche identisch,

$$2\pi/(k_1 \sin\alpha_1) = 2\pi/(k_2 \sin\alpha_2) \,.$$

Mit $k_i = \omega\, n_i / c$ erhalten wir

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 \qquad \text{oder} \qquad \sin\alpha_1/\sin\alpha_2 = n_2/n_1 \,.$$

Dies wird auch als das Brechungsgesetz von Snellius bezeichnet. Wir hatten diesen Ausdruck auch schon aus dem Prinzip von Fermat hergeleitet.



Eine weitere Erklärung des Brechungsgesetzes kann man aus dem Prinzip von Huygens herleiten: Man nimmt an dass an der Grenzfläche Elementarwellen ausgestrahlt werden, wobei der Zeitpunkt für die Ausstrahlung vom Eintreffen der einfallenden Wellenfronten bestimmt wird. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit in den beiden Medien sei $v_1 = c/n_1$, resp. $v_2 = c/n_2$. Für die beiden Dreiecke ΔABC, BCD gilt

$$\sin\alpha_1 = AB/CB = t\, v_1/CB \qquad \text{und}$$

$$\sin\alpha_2 = CD/CB = t\, v_2/CB \,.$$

Daraus folgt das Brechungsgesetz von Snellius:

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

oder

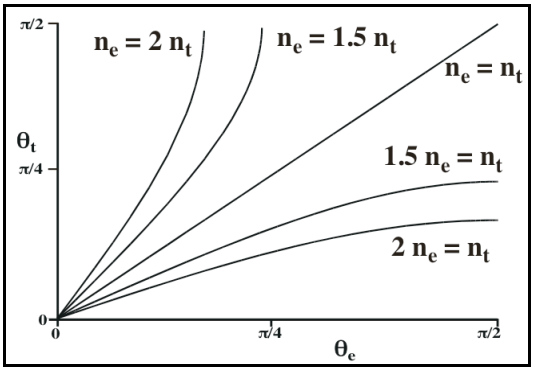
$$\sin\alpha_1\, n_1 = \sin\alpha_2\, n_2 \,.$$

Ist der eine Brechungsindex ~1 (z.B. Luft), so kann der Ausdruck vereinfacht werden zu

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = n_1 .$$

Die Zeichnung stellt das Verhältnis von Einfalls- zu Transmissionswinkel dar für den Fall dass das Licht aus Luft oder Vakuum auf ein Medium mit Brechungsindex n_1 einfällt. Bei kleinen Einfallswinkeln sind Einfalls- und Ausfallswinkel direkt proportional;

Qualitativ kann man das Resultat so zusammenfassen, dass beim Übergang vom optisch dünneren zum optisch dichteren Medium der Strahl in Richtung auf die Senkrechte gebrochen wird, beim Übergang vom optisch dichteren zum optisch dünneren Medium weg von der Senkrechten. Offenbar erreicht der Transmissionswinkel im optisch dichteren Medium einen Maximalwert, d.h. es gibt einen Winkelbereich, der von außen nicht zugänglich ist.



6.3.4 Reflexions- und Transmissionskoeffizienten

Das einfallende Licht wird an der Grenzfläche in zwei Teilwellen aufgeteilt, die reflektierte und die transmittierte Welle. Um das Teilungsverhältnis zu bestimmen benötigt man offenbar zwei Gleichungen um die beiden unbekannten Amplituden zu berechnen. Die beiden Gleichungen erhält man aus der Energieerhaltung sowie aus den Maxwell Gleichungen.

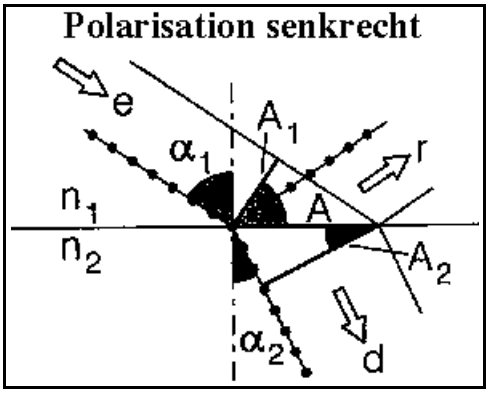
Die Energieerhaltung sagt, dass die Leistung des einfallenden Strahls gleich der Summe der Leistungen des reflektierten und des transmittierten Strahles sein muss. Die Leistung in einem Lichtstrahl kann berechnet werden aus Energiedichte ρ, Lichtgeschwindigkeit c und Querschnitt A:

$$P = c\ \rho\ A .$$

Somit gilt

$$c_1\ \rho^e\ A_1 = c_1\ \rho^r\ A_1 + c_2\ \rho^t\ A_2 .$$

Hier bezeichnet der Index 1 das Medium aus dem der Lichtstrahl einfällt, 2 das untere Medium; die oberen Indices bezeichnen den einfallenden, reflektierten und transmittierten Strahl. Die Querschnitte A_1 und A_2 können auf die entsprechende Fläche auf der Grenzfläche bezogen werden:



$$A_1 = A \cos\theta_1 \qquad A_2 = A \cos\theta_2 .$$

Die Energiedichte beträgt jeweils

$$\rho^i = \rho_0\ \rho_i\ E_i^2$$

und die Lichtgeschwindigkeit $c_i = c/n_i$.

Somit wird die Energiebillanz

$$c/n_1\, \varepsilon_0\, \varepsilon_1\, E_e^2\, A \cos\alpha_1 = c/n_1\, \varepsilon_0\, \varepsilon_1\, E_r^2\, A \cos\alpha_1 + c/n_2\, \varepsilon_0\, \varepsilon_2\, E_t^2\, A \cos\alpha_2 \,.$$

Mit $\varepsilon_i = n_i^2$ erhält man

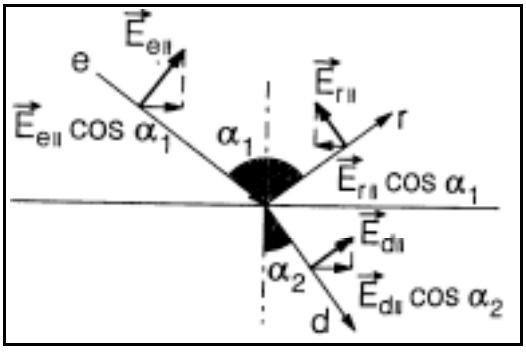
$$n_1\, (E_e^2 - E_r^2) \cos\alpha_1 = n_2\, E_t^2 \cos\alpha_2 \,.$$

Dies ist die erste der beiden notwendigen Gleichungen. Die zweite erhält man aus der Maxwellgleichung: die elektrische Feldkomponente parallel zur Grenzfläche muss stetig sein. Für eine Welle, die senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, sind alle Feldkomponenten parallel zur Oberfläche. Damit ist

$$E_1 = E_2 = E_{e,s} + E_{r,s} = E_{t,s} \,.$$

Für Polarisation in der Einfallsebene muss gelten

$$(E_{e,p} - E_{r,p}) \cos\alpha_1 = E_{t,p} \cos\alpha_2 \,.$$



6.3.5 Fresnelformeln

Aus den beiden Bedingungen erhält man

$$r_s = \left(\frac{E_r}{E_e}\right)_\perp = -\frac{n_2 \cos\alpha_2 - n_1 \cos\alpha_1}{n_2 \cos\alpha_2 + n_1 \cos\alpha_1} = -\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \,.$$

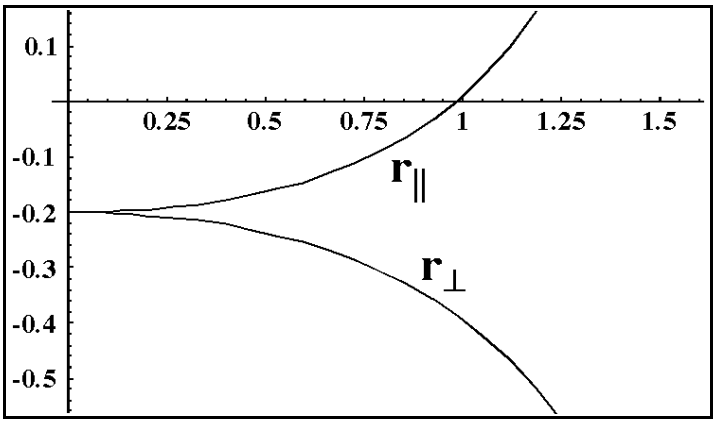
$$t_s = \left(\frac{E_t}{E_e}\right)_\perp = 1 - \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \,.$$

$$r_p = \left(\frac{E_r}{E_e}\right)_\parallel = -\frac{n_2 \cos\alpha_1 - n_1 \cos\alpha_2}{n_2 \cos\alpha_1 + n_1 \cos\alpha_2} = -\frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)} \,.$$

$$t_p = \left(\frac{E_t}{E_e}\right)_\parallel = \left(1 - \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)}\right) \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \,.$$

Diese Gleichungen werden als Fresnel-Gleichungen bezeichnet.

Trägt man die beiden Reflexionskoeffizienten für n1 = 1, n2 = 1.5 gegen den Einfallswinkel auf, so findet man dass die beiden Reflexionskoeffizienten bei kleinem Winkel, also senkrechtem Einfall, den gleichen Betrag aufweisen. Dies ist nicht verwunderlich: Bei senkrechtem Einfalls sind die beiden Polarisationen nicht unterscheidbar. Sie betragen dann



$$r_{\square}(\square_1=\square_2=0) = r_{||}(\square_1=\square_2=0) = \square\frac{n_2 \square n_1}{n_2 + n_1}$$

.

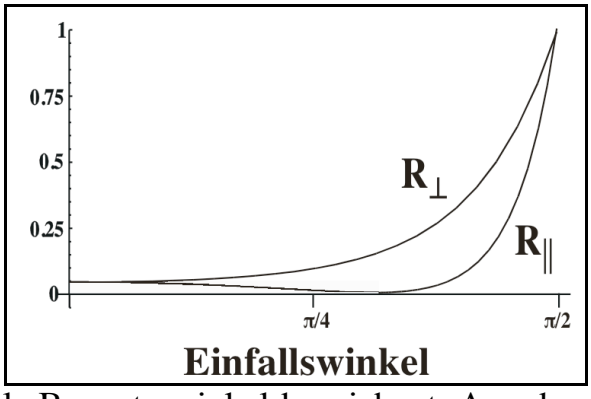
Das negative Vorzeichen zeigt dass die reflektierte Welle einen Phasensprung von π gegenüber der einfallenden Welle hat, falls sie an einem optisch dichteren Medium ($n_2 > n_1$) reflektiert wird, jedoch nicht im umgekehrten Fall.

Häufig verwendet man auch das Reflexionsvermögen, welches definiert ist als das Verhältnis der reflektierten Intensität zur einfallenden Intensität. Für senkrechten Einfall

$$R = I_r/I_i = \left(\frac{n_2 \square n_1}{n_2 + n_1}\right)^2 .$$

Typische Zahlen für die Grenzfläche Luft / Glas (n_1 = 1, n_2 = 1.5) sind

$$r(\square=0) \sim \square\frac{0.5}{2.5} = 0.2 . \qquad R = r^2 \sim = 0.04 .$$



Sowohl beim Eintritt wie beim Austritt aus Glas wird also rund 4% der Lichtintensität reflektiert.

Die Reflexion von parallel polarisiertem Licht weist einen Nulldurchgang auf. Der zugehörige Winkel wird als Brewsterwinkel bezeichnet. Aus den Fresnelgleichungen sieht man dass die Bedingung dafür ist dass

$$\tan(\square_1+\square_2) \square \qquad , \qquad \text{d.h. } (\square_1+\square_2) = \pi/2 ,$$

d.h. der transmittierte und reflektierte Strahl stehen senkrecht aufeinander. Nach dem Brewsterwinkel nehmen beide Reflexionskoeffizienten zu und erreichen eins bei $\square_1 = \pi/2$, d.h. bei streifendem Einfall.

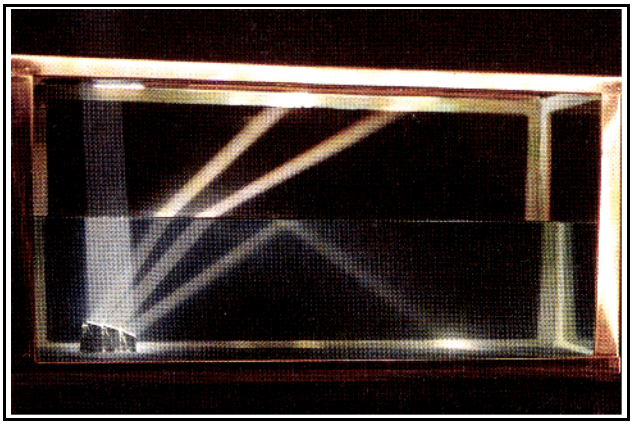
6.3.6 Totalreflexion

Ein interessanter Fall tritt ein wenn ein Strahl aus dem optisch dichteren Medium ins optisch dünnere Medium austritt, d.h. wenn das Verhältnis $n_2/n_1 < 1$ ist. Offenbar wird der Strahl dann von der Senkrechten weg gebrochen. Da der $\sin \leq 1$ ist kann die Gleichung nicht für alle Werte von θ_1 Lösungen aufweisen. Am kritischen Winkel

$$\theta_c = \sin^{-1}(n_2/n_1)$$

wird der gebrochene Strahl unter einem Winkel von $\pi/2$ abgestrahlt, d.h. parallel zur Grenzfläche. Wird der Einfallswinkel weiter erhöht, so kann das Licht nicht mehr aus dem Material austreten. Man bezeichnet diesen Bereich als Totalreflexion.

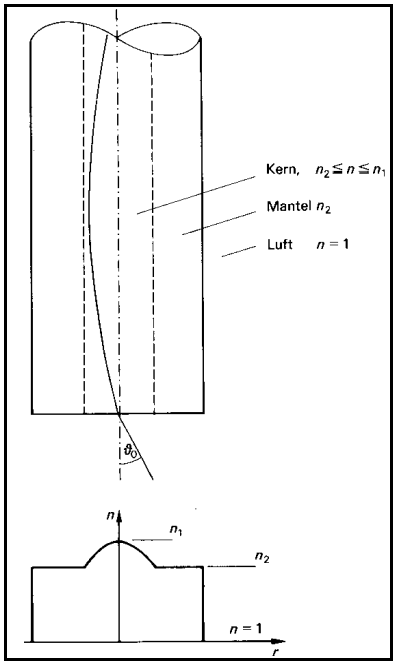
Exp 36: Totalreflexion



Das Feld im optisch dünneren Medium kann aber nicht einfach verschwinden, da sonst die Kontinuitätsbedingungen verletzt wären. Der Feldverlauf im Medium 2 ist in diesem Fall exponentiell. Diese Welle, die parallel zur Grenzfläche läuft und deren Amplitude im Medium exponentiell mit dem Abstand von der Grenzfläche abfällt wird als evaneszente oder quergedämpfte Welle bezeichnet.

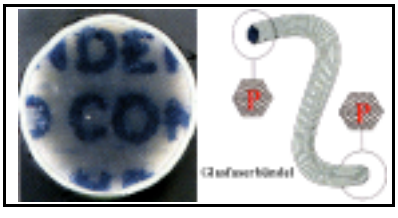
Die Eindringtiefe divergiert am kritischen Winkel. Für größere Winkel nimmt sie rasch ab bis auf die Größe der optischen Wellenlänge, also typischerweise weniger als ein μm. Dieser Teil des optischen Feldes wird auch gerne für Experimente verwendet. Das interessante daran ist, dass es eine Möglichkeit darstellt, Licht in der Nähe einer Grenz- oder Oberfläche zu lokalisieren.

Die Totalreflexion wird z.B. in Glasfasern für die Übertragung von Licht verwendet. Geführt werden kann das Licht wenn der Einfallswinkel kleiner als der kritische Winkel ist, der durch die Differenz der Brechungsindizes bestimmt ist. Typische Parameter sind z.B. $n_1 = 1.474$, $n_2 = 1.453$ $\Rightarrow$ $\theta_c = 80.3^o$, resp. rund 10 Grad von der Grenzfläche aus gemessen.



Exp. 36b: Totalreflexion in einem Acrylstab

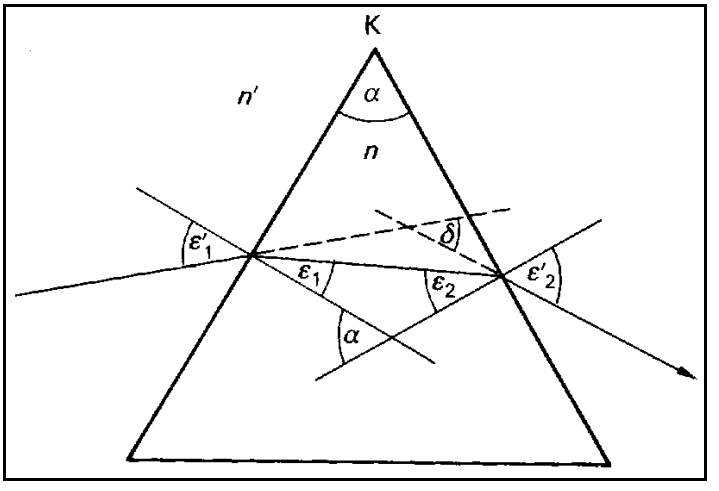
Hier wird Licht in einem Acrylstab, also einem vergrößerten Modell einer Glasfaser, geführt.



Glasfasern werden für die Datenübertragung verwendet, aber auch für die Übermittlung von Bildern.

6.3.7 Brechung am Prisma

Wir betrachten einen Lichtstrahl, der durch ein Prisma mit Brechungsindex n und Winkel α läuft. Er wird beim Eintritt und beim Austritt gebrochen. Der Ablenkwinkel δ beträgt



$$\delta = \varepsilon_1' + \varepsilon_2' - \alpha .$$

Nach Snellius ist

$$\sin \varepsilon_1' = n \sin \varepsilon_1 \qquad \sin \varepsilon_2' = n \sin \varepsilon_2 .$$

Außerdem ist $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha$. Mit

$$\varepsilon_2' = \sin^{-1}[n \sin \varepsilon_2] = \sin^{-1}[n \sin(\alpha - \varepsilon_1)] .$$

Wir eliminieren alle Variablen außer ε_1 indem wir verwenden $\sin(\alpha-\varepsilon) = \sin\alpha \cos\varepsilon - \cos\alpha \sin\varepsilon$:

$$\varepsilon_2' = \sin^{-1}[n (\sin\alpha \cos\varepsilon_1 - \cos\alpha \sin\varepsilon_1)] = \sin^{-1}[n \sin\alpha \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon_1} - \cos\alpha \sin\varepsilon_1']$$

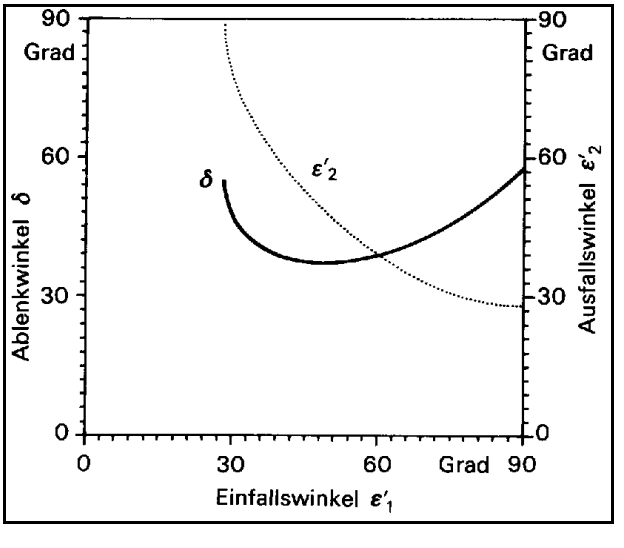
$$= \sin^{-1}[\sin\alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon_1'} - \cos\alpha \sin\varepsilon_1'] .$$

Damit wird der Ablenkwinkel

$$\delta = \varepsilon_1'-\alpha + \sin^{-1}[\sin\alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon_1'} - \cos\alpha \sin\varepsilon_1'].$$

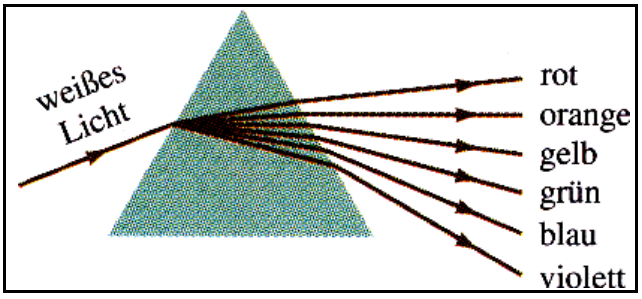
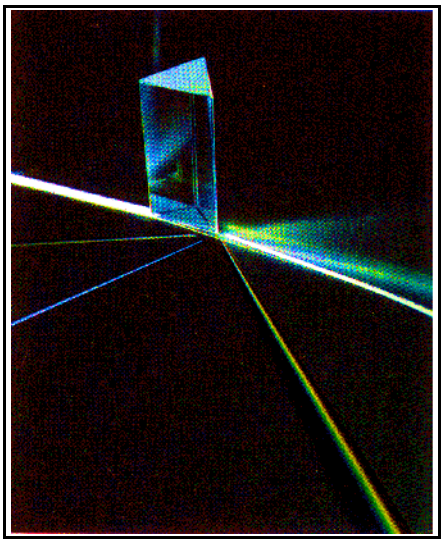
Die Strahlablenkung wird minimal wenn der Eintrittswinkel gleich dem Austrittswinkel ist, d.h. für einen symmetrischen Strahlengang:

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_2' = \frac{1}{2}(\delta+\alpha), \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \alpha/2 \quad \delta_{min} = 2 \sin^{-1}(n \sin\alpha/2) - \alpha .$$



Prismen werden außerdem gerne verwendet für die Umlenkung von Strahlen, als Umkehrprismen (2-malige Reflexion), oder als Umkehrprismen zur Umkehrung von Bildern in Feldstechern.

Ist der einfallende Lichtstrahl nicht eine einheitliche Farbe, so werden die einzelnen Komponenten unterschiedlich stark gebrochen.



Violettes Licht wird am stärksten gebrochen, Komponenten mit längerer Wellenlänge schwächer.