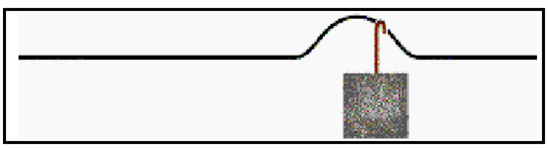
# 5.3 Energietransport

## 5.3.1 Phänomenologie

Da schwingungsfähige Systeme Energie enthalten und sie zwischen den gekoppelten Systemen ausgetauscht wird, findet in Wellen ein Transport von Energie statt. Dies ist der wesentliche Unterschied zwischen einer Schwingung und einer Welle: in beiden Fällen führen Teilchen (z.B. Moleküle, Massen in einer Kette) Schwingungen durch; in einer Welle wird dabei jedoch gleichzeitig Energie von einem Element zum nächsten (in Ausbreitungsrichtung) übertragen.

Diese Tatsache kann man z.B. verifizieren indem man mit Hilfe einer Schallwelle Energie auf ein Glas überträgt und dieses dadurch zerstört. In diesem Fall ist die Energie in der Form von Druckschwankungen gespeichert, welche Eigenschwingungen des Glases anregen. Voraussetzung für den Erfolg dieses Experimentes ist auch, dass das Glas die Energie aufnehmen kann, d.h. dass die Schallfrequenz eine Resonanzfrequenz des Glases trifft.

Energieübertragung ist immer eine notwendige Voraussetzung für die Übertragung von Information, sowohl bei Schallwellen, wie auch bei elektromagnetischen Wellen. Das Sonnenlicht, eine elektromagnetische Welle, liefert die Energie, welche auf der Erde für biologische und industrielle Prozesse benötigt wird.



Man kann sich die Übertragung von Energie so plausibel machen, dass die Welle an jeder Stelle, die sie erreicht, Arbeit verrichten kann.

## 5.3.2 Schallschnelle und Schalldruck

Wir betrachten zunächst eine Schallwelle. Die Auslenkung sei

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t - kx) .$$

Die Geschwindigkeit der Teilchen

$$v(x, t) = \dot{y}(x, t) = - y_0 \, \omega \, \sin(\omega t - kx)$$

wird bei einer Schallwelle auch als **Schallschnelle** bezeichnet. Die Beschleunigung ist

$$a(x, t) = - y_0 \, \omega^2 \cos(\omega t - kx) .$$

Bei der Herleitung der Wellengleichung für Schallwellen hatten wir die Bewegungsgleichung

$$F/V = \rho\, a = -\frac{dp}{dx} = \rho\, \frac{d^2y}{dt^2}$$

erhalten. Räumliche Integration ergibt

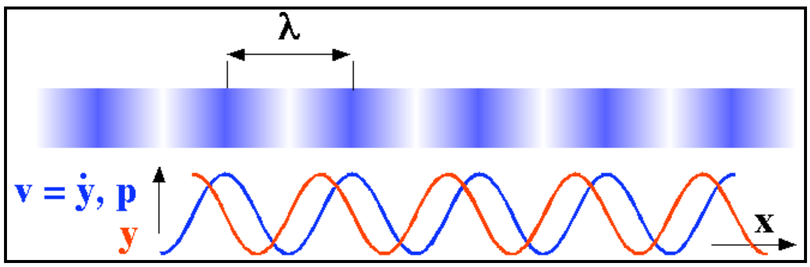
$$p = \int \frac{dp}{dx}\, dx = -\int \rho\, a\, dx = \rho\, y_0\, \omega^2 \int \cos(\omega t - kx)\, dx = -\rho\, y_0\, \omega^2/k\, \sin(\omega t - kx)\ .$$

Offenbar sind die Druckwelle und die Schallschnelle in Phase zueinander, d.h. sie weisen die gleiche Abhängigkeit von Raum und Zeit auf: $\sin(\omega t - kx)$. Das Verhältnis der beiden Amplituden beträgt

$$Z = \frac{p}{v} = \rho\, \frac{\omega}{k} = \rho\, v_P\ .$$

Es wird als Schallwiderstand bezeichnet.

Schallschnelle $\dot{y}$ und Schalldruck p sind in Phase, während die Auslenkung y dazu 90 Grad außer Phase ist.




### 5.3.3 Energiedichte

Da es sich um ein mechanisches System handelt können wir die Energiedichte in kinetische und elastische Energie aufteilen,

$$\varepsilon_E = \varepsilon_E^{kin} + \varepsilon_E^{elast}\ .$$

Pro Volumeneinheit beträgt die kinetische Energie

$$\varepsilon_E^{kin} = \frac{1}{2}\, \rho\, v^2 \qquad .$$

Für die Herleitung der elastischen Energie verwendet man die Definition des Kompressionsmoduls

$$d\tilde{p} = -K\, \frac{dV}{\Delta V}\ .$$

Wir schreiben hier $d\tilde{p}$ für die Druckänderung durch die Schallwelle. Die Änderung der elastischen Energie eines Volumens $\Delta V$ bei einer Erhöhung des Drucks ist

$$d\varepsilon_E^{elast} = \frac{dE_p}{\Delta V} = -\frac{\tilde{p}\, dV}{\Delta V} = \frac{1}{K}\, \tilde{p}\, d\tilde{p}\ .$$

Integration ergibt die elastische Energie pro Volumen $\Delta V$

$$\rho_E^{elast} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{K}\,\tilde{p}^2$$

Für die oben beschriebene Schallwelle wird dies

$$\rho_E^{elast} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{K}\,\rho^2\, y_0{}^2\, \omega^4/k^2 \sin^2(\omega t - kx)\,.$$

Mit $\omega^2/k^2\ v_P{}^2 = K/\rho$ kann dies geschrieben werden als

$$\rho_E^{elast} = \frac{1}{2}\,\rho\, y_0{}^2\, \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)\,.$$

Ein Vergleich mit der kinetischen Energiedichte

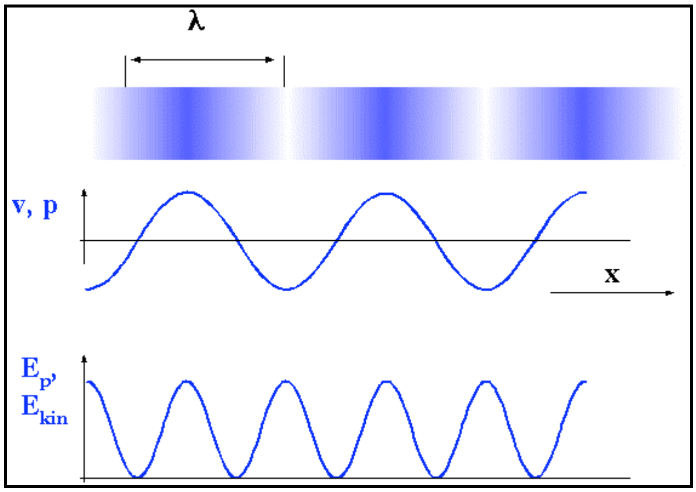
$$\rho_E^{kin} = \frac{1}{2}\,\rho\, y_0{}^2\, \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

zeigt, dass

$$\rho_E^{kin} = \rho_E^{elast}$$

und die gesamte Energiedichte

$$\rho_E = \rho_E^{kin} + \rho_E^{elast} = \rho\, y_0{}^2\, \omega^2 \sin^2(\omega t - kx).$$




Die Energie ist somit sinusförmig entlang der Welle verteilt, wobei die Periode einer halben Wellenlänge entspricht. Die Energiedichte einer mechanischen Welle ist proportional zum Quadrat ihrer Frequenz und zum Quadrat ihrer Amplitude, resp. zum Quadrat der maximalen Geschwindigkeit $y_0\omega$ der Elemente.

Die Energie wird durch die Welle in x-Richtung transportiert. Die Schallintensität ist die Energie, die pro Zeiteinheit durch eine Fläche A fließt:

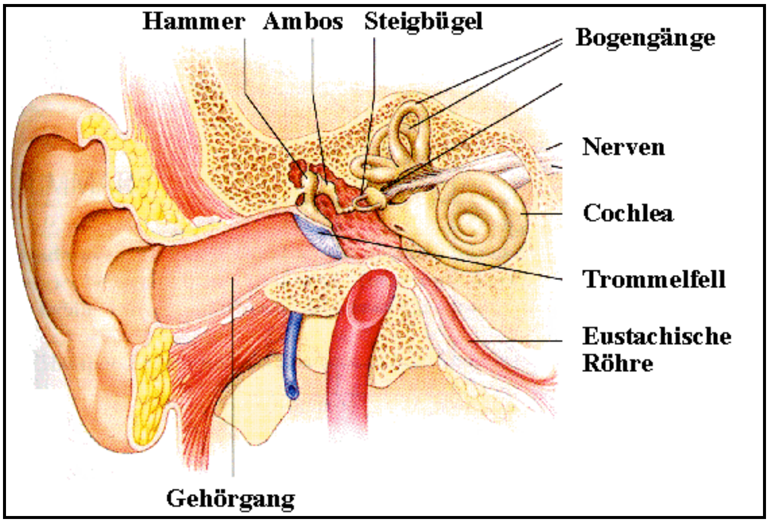
$$I = \frac{\Delta E}{A\,\Delta t} = \frac{\Delta E}{A\,\Delta x}\,\frac{\Delta x}{\Delta t} = \langle\rho_E\rangle_T\, v_P\ \ \frac{1}{2}\,\rho\, y_0{}^2\, \omega^2\,.$$

Dieser Ausdruck gilt nicht nur für Schallwellen: die Intensität einer Welle kann allgemein geschrieben werden als Produkt aus Energiedichte (gemittelt über eine Periode) und Geschwindigkeit.

### 5.3.4 Messung von Schallwellen

Schallwellen werden meist dadurch in Signale umgewandelt, dass man sie auf eine Membran fallen lässt, die dadurch zu Schwingungen angeregt wird.

Im Ohr ist das Trommelfell diese Membran. Es gibt die Schwingungen über einige Knöchelchen an das Innenohr weiter, wo die Druckschwankungen in Nervenimpulse umgewandelt werden.




Das Ohr ist erstaunlich empfindlich: die Hörschwelle liegt bei $10^{-12}$ W/m$^2$. Die entspricht dem Energiestrom von weniger als 50 Gasmolekülen mit thermischer Energie. Lautstärken werden in Dezibel (dB) gemessen, wobei sie definiert sind als

$$L = 10 \log I/I_0 .$$

$I_0$ ist die Hörschwelle. Es handelt sich hier um eine logarithmische Skala, bei jeweils 10 dB nimmt die Leistung um eine Größenordnung zu. Der Bereich von der Hörschwelle zur Schmerzgrenze liegt etwa zwischen 0 und 120 dB.

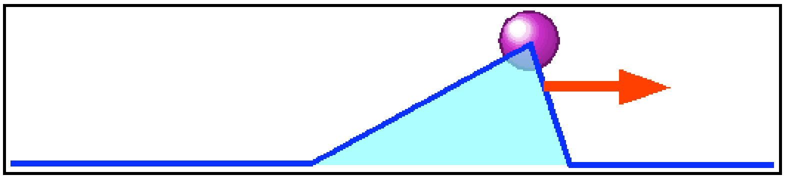
| | |
|---|---|
| Startender Jet in 50 m | 150 dB |
| Presslufthammer in 1 m | 90-120 dB |
| Verkehrslärm | 80 dB |
| normale Unterhaltung | 50 dB |
| Flüstern | 30 dB |
| Hörschwelle | 0 dB |

### 5.3.5 Energie einer Transversalwelle

In ähnlicher Weise kann man die Energie einer Transversalwelle berechnen.

**Video Energietransport**

Dazu betrachten wir als Modell zunächst eine lokalisierte Auslenkung, die sich nach rechts bewegt. Offenbar ist in diesem System die Masse an der Spitze des Wellenberges diejenige mit der größten Energie. Wenn die Welle sich bewegt wird somit Energie transportiert.



Für die Berechnung der Energieübertragung beginnen wir mit der Schwingungsenergie eines Elementes,

$$E = E_{kin} + E_{pot} = 1/2\, m\, \dot{y}^2 + 1/2\, c\, y^2 ,$$

wobei c die Kraftkonstante bezeichnet. Für harmonische Wellen kann dies geschrieben werden als

$$E = \frac{m}{2}\,(\dot{y}^2 + \frac{c}{m}\,y^2) = \frac{m}{2}\,(\dot{y}^2 + \omega^2\,y^2) = \frac{m}{2}\,\omega^2\,y_0^2\,(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) = \frac{m}{2}\,\omega^2\,y_0^2\,.$$

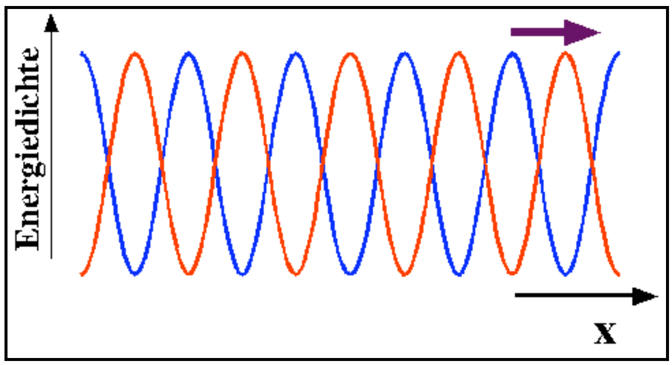
Für kontinuierliche Systeme können wir diesen Ausdruck in differenzieller Form schreiben:

$$dE = \rho\,dV\,\omega^2\,y_0^2\;dE = \rho_E\,dV\,.$$

Die Energiedichte beträgt somit

$$\rho_E = \frac{\rho}{2}\,\omega^2\,y_0^2\,,$$

wiederum proportional zum Quadrat der Amplitude und zum Quadrat der Frequenz.




Mit der Ausbreitung der Welle wandern sowohl potenzielle wie auch kinetische Energie mit der Welle mit. Die Intensität der Welle, also die Energie, welche pro Zeit und Fläche transportiert wird:

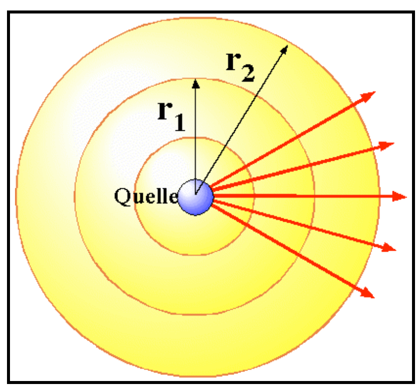
$$I = \rho_E\,v_P\,,$$

d.h. die Intensität ist gleich der Energiedichte mal der Phasengeschwindigkeit. Da die Energiedichte proportional zum Quadrat der Auslenkung, also zur Amplitude der Welle ist, gilt offenbar

$$I \sim y_0^2\,,$$

d.h. die Intensität einer Welle ist proportional zum Quadrat ihrer Amplitude.

Bei ebenen Wellen ist die Amplitude und damit die Energiedichte überall im Raum gleich.



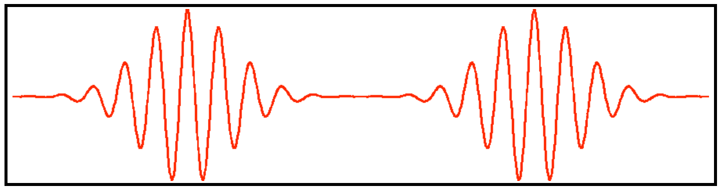

In Kugelwellen fällt sie quadratisch mit dem Abstand ab. Dies kann als Folge der Energieerhaltung verstanden werden: die Ausdehnung einer Wellenfront wächst quadratisch mit dem Abstand von der Quelle. Bei konstanter Gesamtenergie nimmt deshalb die Energiedichte quadratisch und die Amplitude der Kugelwelle linear mit dem Abstand ab.

### 5.3.6 Wellengruppen

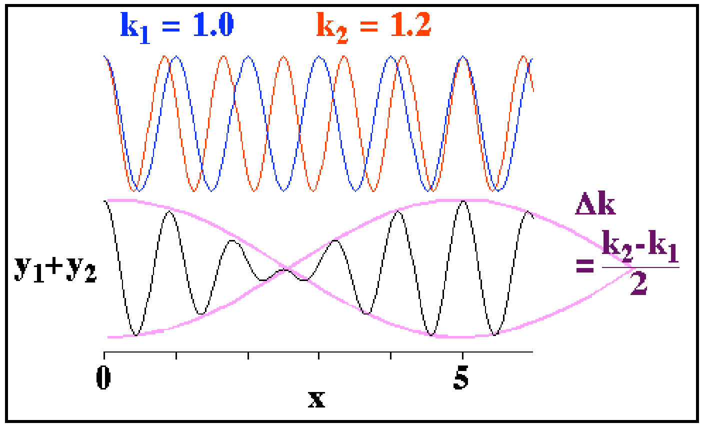
Harmonische Wellen

$$y = y_0\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

sind räumlich und zeitlich unendlich ausgedehnt. Damit ist auch die Energiedichte der Welle überall gleich.



Reale Wellen sind jedoch immer endlich, und wenn mit Hilfe von Wellen z.B. Information übertragen wird, müssen sie moduliert werden: man bildet Pulse oder begrenzte Wellenzüge. Man kann diese als Überlagerung von mehreren harmonischen Wellen darstellen.




Als einfaches Modell addieren wir zunächst zwei Wellen mit gleicher Amplitude, vergleichbarer Frequenz und vergleichbarem Wellenvektor:

$$y = y_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + y_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x) =$$

$$= 2\, y_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) =$$

$$= 2\, y_0 \cos(\omega t - kx) \cos(\Delta\omega t - \Delta k x) ,$$

wobei

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad k = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad \Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2} .$$

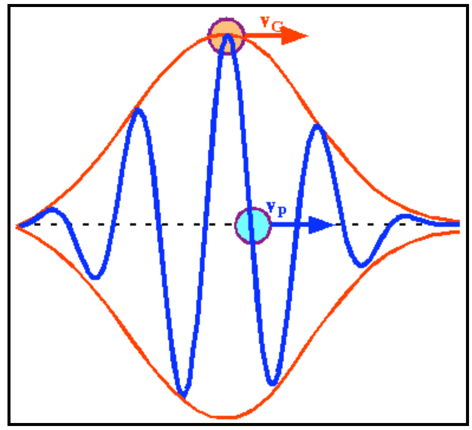
Der erste Faktor stellt eine laufende Welle dar, wobei Frequenz und Wellenvektor dem Durchschnittswert der beiden Teilwellen entsprechen. Der zweite Faktor stellt eine Einhüllende, d.h. eine Modulation dar.

Die Energiedichte ist proportional zum Quadrat der Amplitude; sie verschwindet deshalb dort wo die Einhüllende einen Nulldurchgang aufweist. Der Energietransport erfolgt mit der Geschwindigkeit der Einhüllenden, nicht mit der Phasengeschwindigkeit. Die Geschwindigkeit der Einhüllenden wird als Gruppengeschwindigkeit bezeichnet. Sie beträgt offenbar

$$v_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} .$$

Die infinitesimale Schreibweise ist vor allem für eine Wellengruppe aus einer kontinuierlichen Verteilung von Wellen sinnvoll.

### 5.3.7 Dispersion



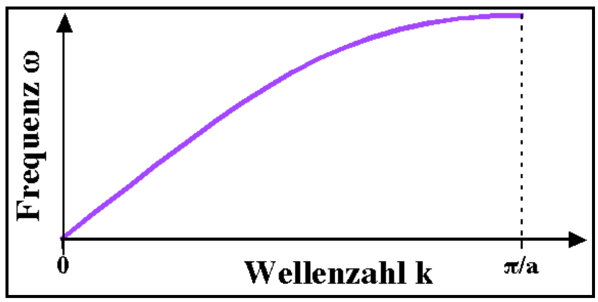

Die Gruppengeschwindigkeit stellt die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Wellengruppe dar, resp. deren Einhüllenden. Mit der Gruppengeschwindigkeit werden Energie und Information transportiert. Wir können die Gruppengeschwindigkeit auch anders ausdrücken:

$$v_G = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(v_P\, k) = v_P + k\frac{d}{dk}\, v_P \,.$$

Die Gruppengeschwindigkeit weicht somit dann von der Phasengeschwindigkeit ab, wenn diese von der Wellenlänge abhängt. Dieser Effekt wird als Dispersion bezeichnet.

Ein Beispiel für Dispersion haben wir im Fall der linearen Kette kennengelernt, wo die Frequenz proportional zum Sinus des Wellenvektors ist.

$$\omega = 2\sqrt{\frac{c}{m}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right| .$$




Aus dieser Dispersionsrelation folgt, dass nur für kleine Wellenvektoren die Frequenz proportional zur Wellenzahl und damit die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit also ähnlich groß sind. Das Beispiel zeigt die Ausbreitung einer Wellengruppe, die durch die Superposition von vier Wellen gebildet wird, deren mittlerer k-Vektor $\pi/3a$ beträgt.

**C: Wellengruppe 1**

Wie man sieht bewegt sich hier die Wellengruppe mit nahezu konstanter Form nach rechts, d.h. die Gruppengeschwindigkeit ist praktisch gleich der Phasengeschwindigkeit.

Wenn die Wellenzahl gegen $\pi/a$ läuft geht die Steigung $d\omega/dk \to 0$ und die Gruppengeschwindigkeit verschwindet.

**C: Wellengruppe 2**

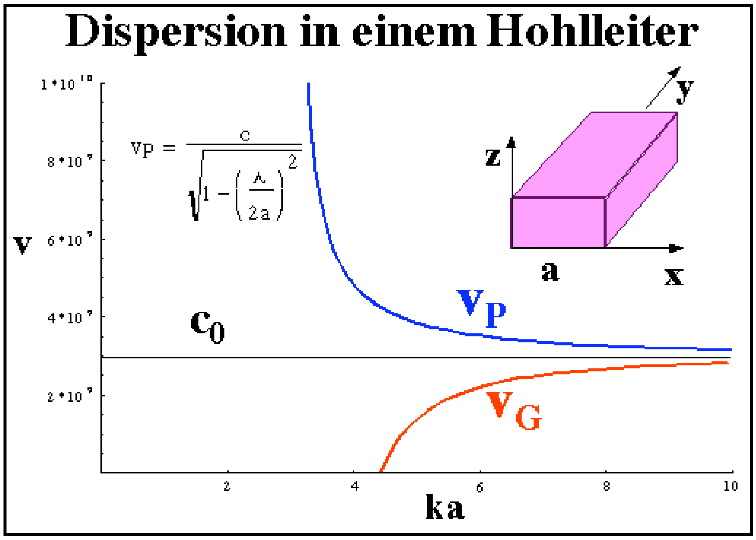
Für diese Wellengruppe beträgt der mittlere k-Vektor fast $\pi/a$ (ka=1.5), Dann bleibt die Einhüllende praktisch stationär, während die Phasengeschwindigkeit praktisch gleich hoch ist wie im vorherigen Fall. Die Gruppengeschwindigkeit bezeichnet die Geschwindigkeit der Einhüllenden, die Phasengeschwindigkeit diejenige eines beliebigen Nulldurchgangs.

### 5.3.8 Dispersion in einem Hohlleiter

Ein weiteres klassisches Beispiel für Dispersion ist die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Hohlleiter.

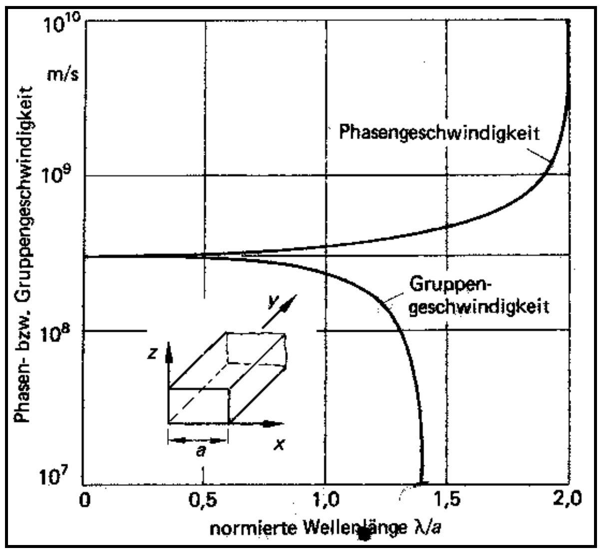
Für eine elektromagnetische Welle, deren Feldvektor in z-Richtung steht, und deren Ausbreitungsrichtung die y-Achse ist, beträgt die Phasengeschwindigkeit

$$v_P = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} .$$




Für große Wellenlängen ($\lambda > 2a$) wird die Phasengeschwindigkeit imaginär. In diesem Bereich können Felder nur über eine kurze Distanz in den Wellenleiter eindringen; im Inneren fallen sie exponentiell ab. Im k-Raum entspricht dies einer Wellenzahl $k = \pi/a$. Für größere Wellenzahlen findet man eine Phasengeschwindigkeit, die immer größer ist als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Die Gruppengeschwindigkeit ist hingegen immer kleiner als die Vakuum - Lichtgeschwindigkeit.

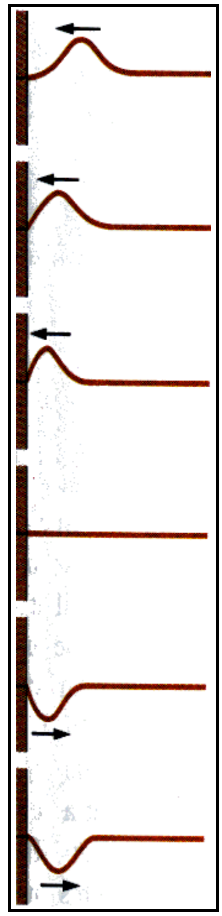
Natürlich kann man die beiden Geschwindigkeiten auch gegen die Wellenlänge auftragen. Bei sehr kurzen Wellenlängen sind Phasen- und Gruppengeschwindigkeit identisch und gleich der Vakuum - Lichtgeschwindigkeit. In diesem Bereich macht sich der Wellenleiter nicht bemerkbar. Dies entspricht zum Beispiel einem Wellenleiter mit einem Querschnitt im cm-Bereich und optischen Wellenlängen: Man kann durch ihn hindurch schauen. Für Wellenlänge die größer sind als die Dimension des Wellenleiters nimmt die Gruppengeschwindigkeit rasch ab, es wird somit kaum noch Energie durch den Wellenleiter transportiert.




### 5.3.9 Reflexion

Wenn immer Wellen sich in einem inhomogenen Medium ausbreiten treten Reflexionen auf.

# Exp.: Reflexion von Seilwellen



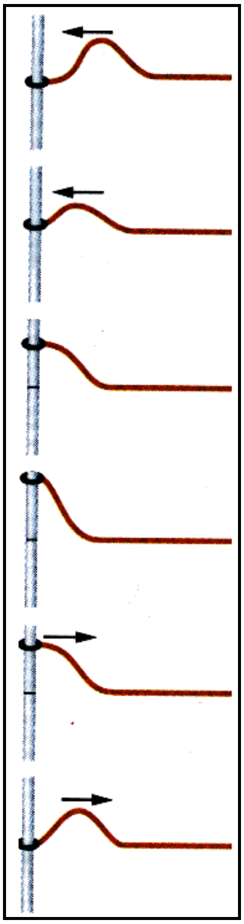
Ein klassisches Beispiel sind Seilwellen. Trifft z.B. eine Seilwelle auf eine Wand, so übt sie darauf eine Kraft aus. In diesem Beispiel wirkt die Kraft nach oben. Nach dem Newton'schen Axiom Actio = Reactio übt die Wand eine gleich starke, aber entgegengerichtete Kraft auf das Seil aus, d.h. sie zieht es nach unten. Dadurch erzeugt sie selber eine Welle, die anfangs nach unten ausgelenkt ist und damit eine zurücklaufende Welle mit entgegengesetztem Vorzeichen. In der Nähe der Wand, wo sich beide zur gleichen Zeit befinden und überlagern löschen sie sich gegenseitig aus; es entsteht deshalb an dieser Stelle ein Schwingungsknoten: die Schwingungsamplitude bleibt Null für alle Zeiten.

Die Beziehung zwischen einlaufender und reflektierter Welle kann man auch aus der Randbedingung erhalten: Da sich das Seilende (bei x=0) nicht bewegen kann, muss die Auslenkung dort identisch verschwinden, $y(0, t) = 0$. Wir können die Auslenkung als Summe der einlaufenden und reflektierten Welle schreiben:

$$y(x, t) = y_e \cos(\omega t + kx) + y_r \cos(\omega t - kx) .$$

Für den Endpunkt ergibt dies

$$y(0, t) = 0 = (y_e + y_r) \cos(\omega t) \Rightarrow \quad y_r = - y_e .$$



Die Situation sieht anders aus wenn das Seil nicht an einer starren Wand, sondern an einem losen Ring oder an einer dünnen Schnur befestigt ist. Diese kann dann nach oben (z.B.) ausweichen. Die Welle wird auch hier reflektiert, läuft aber auch mit positiver Auslenkung aus. Einlaufende und rücklaufende Welle überlagern sich hier konstruktiv; es entsteht zeitlich begrenzt ein Schwingungsbauch. Dieser ist doppelt so groß wie die Amplitude der einlaufenden Welle, da die rücktreibende Kraft der Fortsetzung des Seils fehlt. Somit gilt in diesem Fall, dass die Amplitude der reflektierten Welle gleich derjenigen der einlaufenden Welle ist,

$$y_r = y_e \,.$$

### 5.3.10 Stehende Wellen

Die Überlagerung der einlaufenden mit der reflektierten Welle ergibt stehende Wellen. Zwei ebene Wellen $y_1$ und $y_2$ gleicher Amplitude $y_0$ und Frequenz $\omega$, die sich in entgegengesetzter Richtung ausbreiten,

$$y_1 = y_0 \cos(\omega t - kx) \qquad\qquad y_2 = y_0 \cos(\omega t + kx)$$

addieren zu

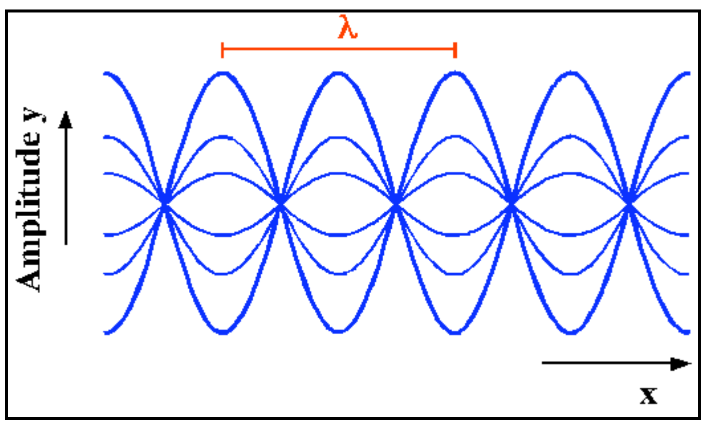
$$y = y_1 + y_2 = 2\, y_0 \cos(\omega t) \cos(kx) \,.$$

Die räumliche und zeitliche Abhängigkeit sind jetzt unabhängig voneinander. Beides sind harmonische Funktionen.

Es existieren jetzt ortsfeste Knoten, also Punkte, an denen keine Schwingung stattfindet. Sie treten an den Punkten auf wo

$$\cos(kx) = 0 \,.$$

Der Abstand zwischen diesen Punkten ist gegeben durch den Abstand zwischen zwei Nulldurchgängen des Cosinus, d.h. k $\Delta x = \pi$, oder




$$\Delta x = \pi/k = \pi \,/\, (2\pi/\lambda) = \lambda/2 \,.$$

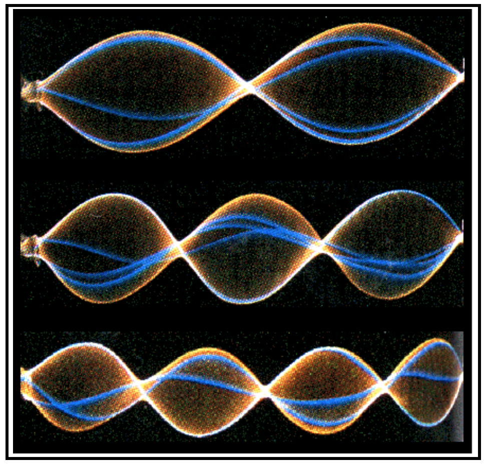
Der Abstand zwischen zwei Knoten beträgt somit eine halbe Wellenlänge. Dazwischen liegt jeweils ein Schwingungsbauch, ein Punkt maximaler Schwingungsamplitude.

Schwingungen in einem kontinuierlichen Medium können immer als stehende Wellen verstanden werden. Sie entstehen häufig durch Reflexion von Wellen.

### 5.3.11 Stehende Wellen auf einer Saite

Ein klassisches Beispiel ist die Reflexion von Seilwellen am Ende eines Seils. Dabei entsteht am Ende des Seils ein Schwingungsbauch oder ein Schwingungsknoten, je nach Randbedingung. Ist das Seil z.B. fix befestigt, so wird dadurch ein Knoten erzwungen. Dies wird bei Saiteninstrumenten verwendet.

Bei einer Saite, die an beiden Enden eingespannt ist, wird die Welle immer reflektiert, und es entsteht eine stehende Welle. Die Randbedingungen ergeben, dass an beiden Enden ein Knoten gebildet wird. Bei der Grundschwingung sind die Knoten nur an den Enden vorhanden. Beim ersten Oberton existiert ein zusätzlicher Knoten in der Mitte, und bei höheren Obertönen entsprechende zusätzliche Knoten. Somit ist die halbe Wellenlänge der Grundschwingung gerade gleich der Länge $\ell$ der Saite.



Die Phasengeschwindigkeit einer Seilwelle

$$v_P = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

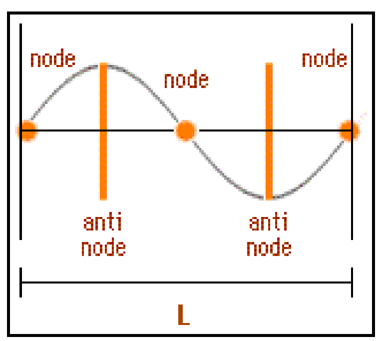
ist unabhängig von der Wellenzahl. Damit sind Phasen- und Gruppengeschwindigkeit gleich. Über die allgemeine Beziehung

$$v_P = \omega/k = \lambda \nu$$

können wir leicht die Eigenfrequenzen der Saite ausrechnen. Für die Grundschwingung ist die Wellenlänge die doppelte Länge der Saite, $\lambda = 2$ L, und damit die Grundfrequenz

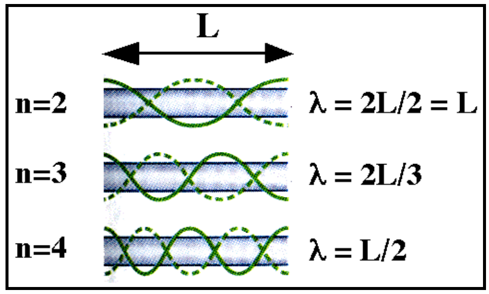
$$\nu_1 = v_P/2L = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \frac{1}{2L} .$$

In der Grundmode ist die Wellenlänge der Schwingungen gleich dem doppelten Abstand zwischen den Endpunkten. Man spricht von höheren Moden wenn die Wellenlänge einem Bruchteil von 2L entspricht. Allgemein ist für diesen Fall $\lambda = 2L/n$.




Die höheren Moden einer Saite mit Länge L haben die Wellenlängen $\lambda_n = 2L/n$. Die entsprechenden Frequenzen sind

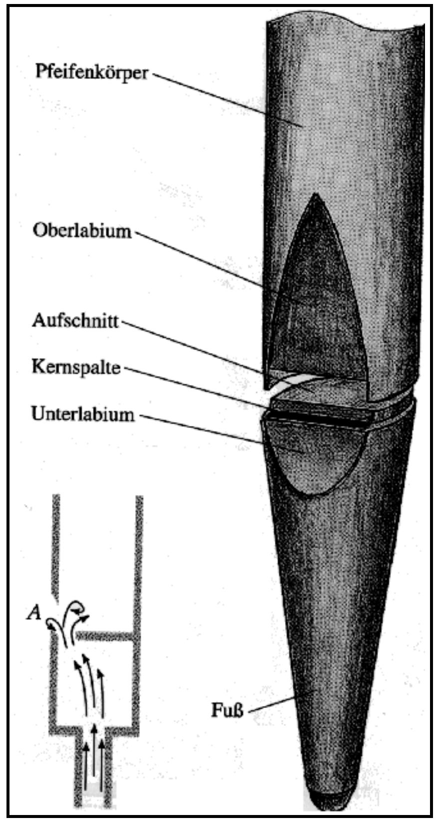
$$\nu_n = n\, \nu_1 .$$

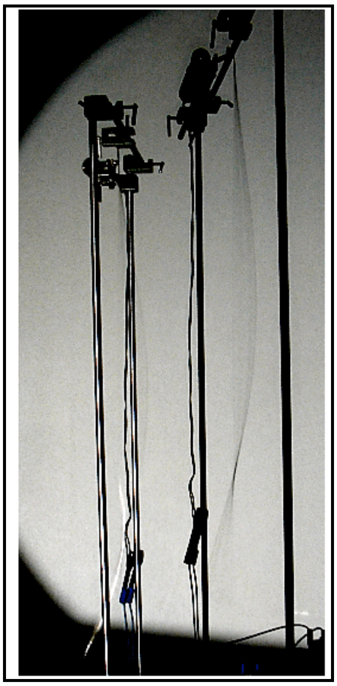



Andere Randbedingungen können zu anderen Resonanzfrequenzen führen, so z. B. bei Blasinstrumenten. Für ein Rohr, welches an beiden Enden offen ist, ergeben die Randbedingungen jeweils einen Schwingungsbauch an den Enden. Damit werden die Wellenlängen

$$\lambda_n = 2L/n \ .$$

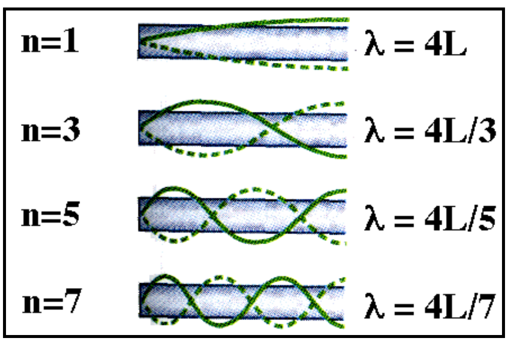
Für eine Orgelpfeife erzwingen die Randbedingungen am einen Ende einen Schwingungsknoten, am andern Ende einen Schwingungsbauch.



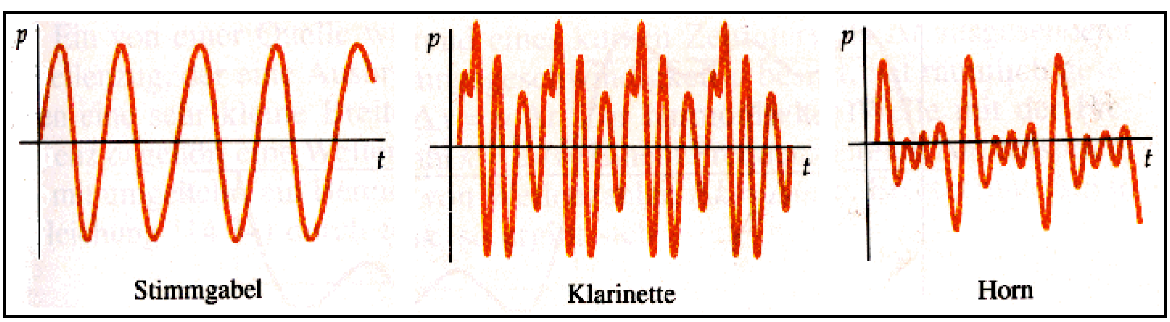



### Exp. 19a: einseitig eingespannter Stab

Die gleichen Randbedingungen kann man erzwingen, indem man einen Stab ein einem Ende einspannt und am anderen Ende frei schwingen läßt.




Hier wird die Wellenlänge der Moden $\lambda = 4L/n$, wobei n nur ungerade Werte annehmen kann.




Die Klangfarbe des Instruments wird vom Obertonspektrum bestimmt. Eine Stimmgabel erzeugt einen einzelnen Ton (praktisch ohne Obertöne), während z.B. Klarinette und Horn ein unterschiedliches Obertonspektrum besitzen.