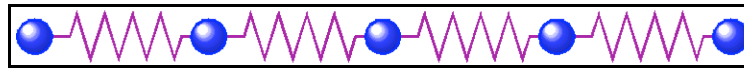
5.2 Mechanische Wellen

5.2.1 Lineare Kette



Bereits im Kapitel Schwingungen hatten wir ein Modell diskutiert, in dem Massen durch Federn verbunden sind. Diese Schwingungen können sich auch über die Kette ausbreiten, sich also als Wellen fortpflanzen. Dazu erweitern wir das Modell auf eine unendlich lange Kette. Für identische Massen und Federn entlang der Kette lautet die Bewegungsgleichung für eine einzelne Masse an der Stelle s

$$m \ddot{y}_s = - c\,(2\,y_s - y_{s-1} - y_{s+1})\,.$$

Die rechte Seite ist eine diskrete Variante der zweiten Ableitung nach der Raumkoordinate; dies ist somit eine Verallgemeinerung der Wellengleichung und wir erwarten, dass sich in diesem System eine harmonische Welle ausbreiten kann.

Diese müsste in komplexer Schreibweise die Form

$$y(x,t) = y_0 \exp(i(\omega t\text{-}kx))$$

aufweisen. Da es sich um ein diskretes System handelt ersetzen wir die Ortskoordinate x durch den Index s

$$x = s\,a,$$

wobei a den Abstand zwischen benachbarten Massen im Gleichgewicht bezeichnet. Dann wird

$$y_s(t) = y_0 \exp(i(\omega t\text{-}ksa))\,.$$

Die zweite Ableitung nach der Zeit ist

$$\ddot{y}_s = - \omega^2\, y_s\,.$$

Zur Auswertung der rechten Seite verwenden wir

$$\exp(i(\omega t\text{-}k(s+1)a)) = \exp(i(\omega t\text{-}ksa))\, \exp(\text{-}ika)\,.$$

Damit lässt sich die Differenz zur Summe der Auslenkungen der Nachbarn schreiben als

$$2\,y_s - y_{s-1} - y_{s+1} = y_0 \exp(i(\omega t\text{-}ksa))\,(2 - \exp(ika) - \exp(\text{-}ika)) = 2\,y_s\,(1 - \cos(ka))\,.$$

Die Beschleunigung $\ddot{y}_s$ wird also proportional zur Auslenkung y_s.

5.2.2 Harmonische Longitudinalwelle

Die Bewegungsgleichung ergibt

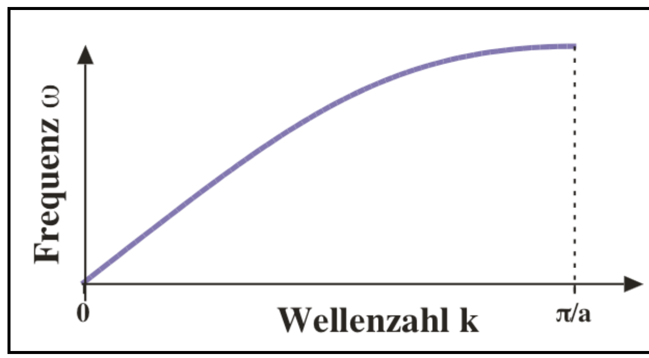
$$\ddot{y}_s = -\omega^2 y_s = -2\,\frac{c}{m}\,(1 - \cos(ka))\,y_s\,.$$

Somit ist der obige Wellenansatz eine Lösung der Bewegungsgleichung wenn

$$\omega^2 = 2\,\frac{c}{m}\,(1-\cos(ka)) = 4\,\frac{c}{m}\,\frac{1-\cos(ka)}{2}\,.$$

Mit $\sin^2(\alpha) = (1-\cos(2\alpha))/2$ kann dies geschrieben werden als

$$\omega = 2\sqrt{\frac{c}{m}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right|.$$



Für kleine Wellenzahlen, d.h. große Wellenlängen wird die Frequenz proportional zur Wellenzahl

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}\,k\,a\,.$$

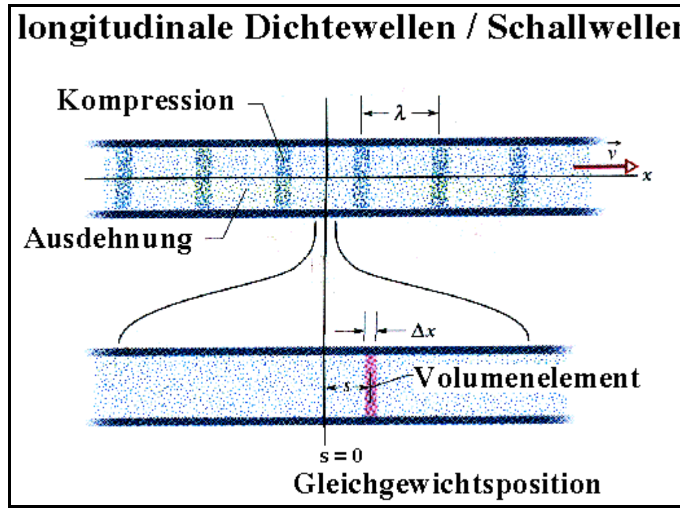
Die Phasengeschwindigkeit ist somit in diesem Bereich konstant:

$$v_P = \omega/k = \sqrt{\frac{c}{m}}\,a\,.$$

Bei höheren Wellenzahlen (kürzeren Wellenlänge) steigt die Frequenz langsamer, die Phasengeschwindigkeit nimmt also ab. Die Frequenz erreicht ihren Maximalwert für $ka=\pi$, also dann wenn benachbarte Massen in Gegenphase schwingen. Damit wird die Kraft $c\,(1 - \cos(ka))\,y_s$ maximal. Ein noch größerer Wellenvektor ist physikalisch nicht von einem kleineren unterscheidbar. Dieses Verhalten findet man allgemein bei diskreten Gittern.

Offenbar wächst die Phasengeschwindigkeit mit der Steifigkeit der Federn und sinkt mit der Größe der Massen.

5.2.3 Druckwellen



Eine wichtige Klasse von Wellen sind Druckwellen. Die Auslenkung ist in diesem Fall eine lokale Druckänderung (Kompression) und, daran gekoppelt, eine Verschiebung des Mediums. Als Modell verwenden wir ein Rohr, in dem sich eine harmonische Welle ausbreitet. Die Wände des Rohrs haben dabei keine Bedeutung und tauchen in der Lösung nicht auf.

Für die Herleitung der Wellengleichung betrachten wir die Kraft auf ein Volumenelement □V = A dx, wobei A die Querschnittsfläche des Rohrs darstellt. Das Wegelement dx soll klein sein im Vergleich zur Wellenlänge. Die Kraft kann als Differenz der Normalkräfte auf beiden Seiten berechnet werden:

$$F = A\,[p(x) - p(x+dx)] = -\,A\,\frac{dp}{dx}\,dx\,.$$

Die Druckänderung dp ist über den Kompressionsmodul K an eine Volumenänderung dV gekoppelt:

$$dp = -\,K\,dV/\square V\,.$$

Wir stellen die Auslenkung als eine Verschiebung s(x, t) einer (imaginären) Trennwand zwischen benachbarten Volumenelementen dar. Damit kann die Volumenänderung dargestellt werden als Unterschied in der Verschiebung

$$dV = A\,(s(x+dx) - s(x)) = A\,\frac{ds}{dx}\,dx\,.$$

Mit □V = A dx erhalten wir für die Druckänderung

$$dp = -\,K\,\frac{ds}{dx}$$

und für die Kraft

$$F = A\,K\,\frac{d^2s}{dx^2}\,dx\,.$$

Damit erhalten wir eine Bewegungsgleichung für die Auslenkung s des Massenelementes □ □V:

$$\rho \, A \, dx \, \frac{d^2 s}{dt^2} = - A \, \frac{dp}{dx} \, dx = A \, K \, \frac{d^2 s}{dx^2} \, dx \, .$$

Division durch ρ A dx ergibt die Wellengleichung

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{K}{\rho} \, \frac{d^2 s}{dx^2} \, .$$

Die Schallgeschwindigkeit, d.h. die Geschwindigkeit einer Schallwelle ist somit eine Konstante für ein gegebenes Medium, unabhängig von der Frequenz und Wellenlänge. Sie beträgt

$$v_S = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \, .$$

Sie hängt jedoch stark vom Material ab. Ein hoher Kompressionsmodul (d.h. niedrige Kompressibilität) erhöht die Schallgeschwindigkeit, da eine Störung sich stark auf ein benachbartes Volumenelement auswirkt. Eine geringe Dichte erhöht ebenfalls die Schallgeschwindigkeit, da die Volumenelemente rascher beschleunigt werden.

Dies kann man z.B. beim Vergleich unterschiedlicher Gase sehen: Je leichter das Molekulargewicht, desto größer die Schallgeschwindigkeit. Der Kompressionsmodul ist für ein ideales Gas konstant. Multipliziert man die Schallgeschwindigkeit mit der Wurzel aus der Molekülmasse für das entsprechende Gas so erhält man eine Zahl, die für alle drei Gase in der Größenordnung von 1800 liegt.

Medium	v_S/ m/s	$v_S \sqrt{m}$
Luft	331	1782
Helium	972	1944
H_2	1286	1813

Exp. 15: Klingel im Vakuum

Dass Schall wirklich als Druckwelle in Luft übertragen wird sieht man wenn man die Luft entfernt: Die Klingel ist nicht mehr hörbar.

5.2.4 Druckwellen in Flüssigkeiten und Festkörpern

Die Behandlung von Druckwellen in Flüssigkeiten und Festkörpern läuft analog. Ein formaler Unterschied zwischen kondensierten Materialien und Gasen ist, dass hier die Beziehung zwischen Volumenänderung und Normalspannung über den Elastizitätsmodul E definiert ist:

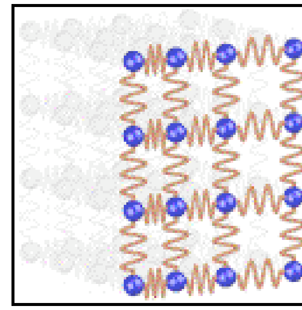
$$\sigma = - E \, ds/dx \, .$$

Damit wird die Wellengleichung

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{E}{\rho}\frac{d^2s}{dx^2}$$

und die Schallgeschwindigkeit

$$v_S = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \ .$$



Ein wesentlicher Unterschied ist, dass in Festkörpern im Gegensatz zu Flüssigkeiten und Gasen auch eine Scherspannung existieren kann. Damit wirkt auch bei einer lateralen Auslenkung eines Volumenelements eine rücktreibende Kraft und eine Kopplung an das benachbarte Volumenelement. Die Phasengeschwindigkeit ist in diesem Fall gegeben durch das Verhältnis von Schubmodul G zu Dichte,

$$v_P = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \ .$$

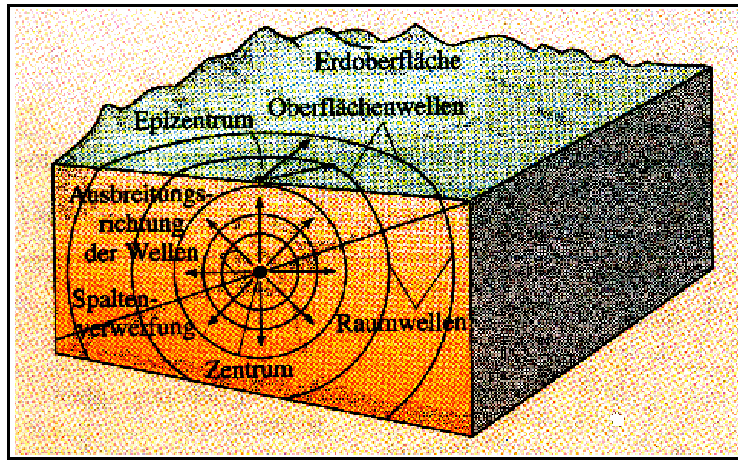
	Dichte ϱ in $\frac{kg}{m^3}$	Schallgeschwindigkeit c in $\frac{m}{s}$
Luft – 20 °C trocken	1,396	319
Luft 0 °C trocken	1,293	331
Luft 20 °C trocken	1,21	344
Luft 100 °C trocken	0,947	387
Wasserstoff 0 °C	0,090	1260
Wasserdampf 130 °C	0,54	450
Wasser 0 °C	1000	1400
20 °C	998	1480
Glyzerin	1260	1950
Eis	920	3200
Holz	600	4500
Glas	2500	5300
Beton	2100	4000
Stahl	7700	5050

Die Phasengeschwindigkeit in einem Material ist um so höher je starrer das Material und je geringer die Dichte ist.

Experimentelle Daten sind mit dieser allgemeinen Vorstellung in guter Übereinstimmung. Bei Gasen findet man Schallgeschwindigkeiten im Bereich 300-450 m/s, außer bei Wasserstoff, der eine sehr geringe Dichte aufweist. In Flüssigkeiten ist die Schallgeschwindigkeit um 1500 m/s, in Festkörpern, wo die Dichte vergleichbar, die Steifigkeit jedoch höher ist, bei 3000-6000 m/s.

5.2.5 Seismische Wellen

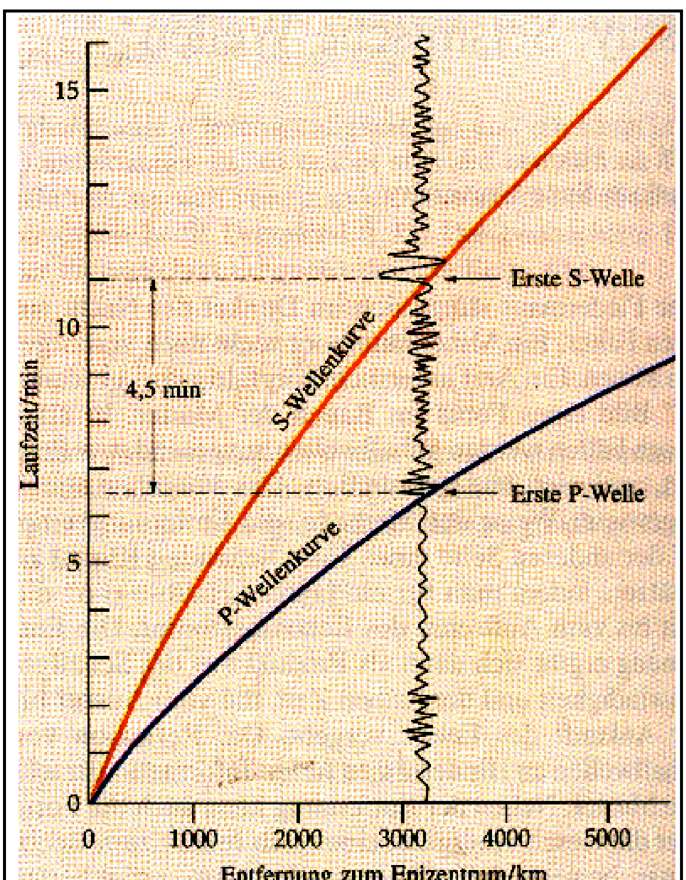
Sowohl longitudinale Druck- als auch transversale Scherwellen spielen bei Erdbeben eine Rolle. Die so genannten P- (Primär-) und S- (Sekundär-) Wellen breiten sich im Volumen aus. P-Wellen sind Longitudinalwellen (wie Schallwellen), S-Wellen sind Schwerwellen. Love-Wellen sind Torsionswellen, welche sich an der Oberfläche ausbreiten. Rayleigh-Wellen sind ebenfalls Oberflächenwellen, sie gleichen aber Meereswellen.



Da der Elastizitätsmodul immer größer ist als das Schermodul erwarten wir für longitudinale Druckwellen eine höhere Ausbreitungsgeschwindigkeit als für transversale Scherwellen.

Elastische Konstanten

Werkstoff	Elastizitäts-Modul E in GN/m^2	Schub-Modul G in GN/m^2
Eis	9,9	3,7
Blei	17	5,5 bis 7,5
Al (rein)	72	27
Glas	76	33
Goldl	81	28
Messing (kaltverf.)	100	36
Kupfer (kaltverf.)	126	47
V2A-Stahl	195	80



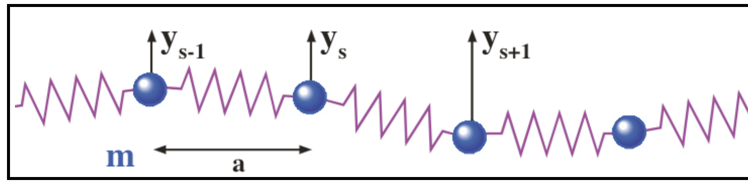
Dies stimm mit Messungen überein: Die Primärwellen, welche als erste bei einer Messstation eintreffen, sind Druckwellen, während die später eintreffenden Sekundärwellen Scherwellen sind.

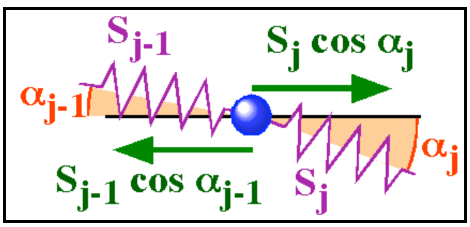
Video: Kobe '95

Die Zerstörungskraft von S-Wellen ist größer als die von P-Wellen. Sie können deshalb als (kurzzeitige) Vorwarnung verstanden werden. In diesem Video "spüren" offenbar die beiden Männer das Eintreffen des Erdbebens voraus.

5.2.6 Transversalwellen in einer Massenkette

Wir betrachten die transversale Auslenkung von Massenpunkten, welche durch Federn verbunden sind. Wir nehmen an, dass die beiden transversalen Koordinaten voneinander und von der longitudinalen Koordinate unabhängig sind, d.h. wir nehmen an dass die Abstände in x-Richtung konstant sind, so dass die potenzielle und kinetische Energie nur durch die y-Verschiebung zustande kommen.





Unter dieser Voraussetzung muss die x-Komponente der Kraft im Gleichgewicht sein, d.h. die Kräfte auf benachbarte Segmente stehen im Verhältnis

$$S_{j-1} \cos\alpha_{j-1} = S_j \cos\alpha_j ,$$

wobei S_j die Federkraft in der Feder j darstellt. Wir beschränken uns hier auf kleine Auslenkungen, d.h. $\alpha \ll 1$, so dass

$$\cos\alpha_{j-1} \approx \cos\alpha_j \approx 1 ,$$

und damit

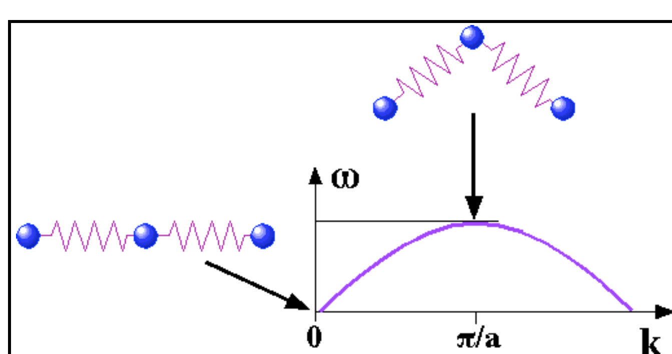
$$S_{j-1} = S_j = S,$$

d.h. alle Kräfte sind nach Betrag gleich oder die Spannung der Kette ist konstant.

Die transversale Kraft ist

$$F_j = - S \sin\alpha_{j-1} + S \sin\alpha_j \approx - \frac{S}{a}(y_j - y_{j-1}) + \frac{S}{a}(y_{j+1} - y_j) = \frac{S}{a}(y_{j+1} - 2\, y_j + y_{j-1}) ,$$

wobei y_j die Auslenkung der j'ten Masse beschreibt. Diese Bewegungsgleichung hat die gleiche Form wie bei den longitudinalen Wellen; lediglich die Kraftkonstante ist nicht mehr die Federkonstante selber. Somit sollte eine Transversalwelle die gleiche Form haben wie eine Longitudinalwelle.



Dies beinhaltet auch die gleiche Dispersionsrelation, d.h. die maximale Frequenz wird erreicht wenn die Wellenlänge dem doppelten Abstand entspricht. Die Proportionalitätskonstante zwischen der zweiten Ableitung der Auslenkung und der Kraft ist jedoch nicht die Federkonstante c, sondern der Quotient S/a aus Federkraft und Abstand. Damit wird die Phasengeschwindigkeit einer Transversalwelle abhängig von der Spannung der Kette,

$$\omega = 2\sqrt{\frac{S}{am}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right| .$$

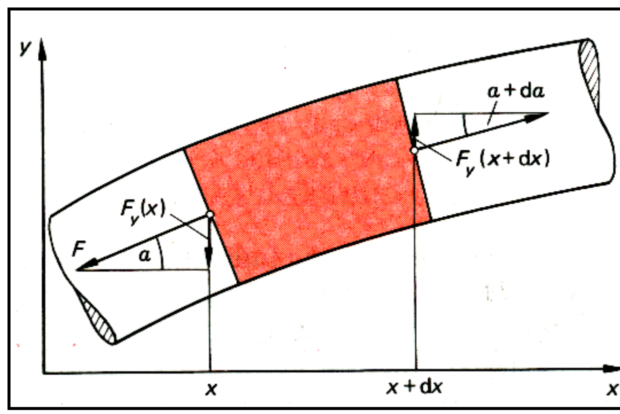
Hier haben wir benutzt dass für entspannte Federn die longitudinal- und die transversale Auslenkung unabhängig sind.

5.2.7 Seilwellen

Wenn wir den kontinuierlichen Grenzfall $a \to 0$ betrachten, erhalten wir eine Saite oder ein Seil.

Exp. 9a Seilwellen

Eine seitliche Auslenkung eines gespannten Seils oder einer Feder wird als Transversalwelle übertragen. Wie bei der Kette ist die Spannkraft des Seils konstant über die Länge des Seils.



Für die Beschreibung von Seilwellen betrachten wir ein Volumenelement zwischen den Positionen x und x + dx, wobei x die Koordinate entlang der Saite beschreibt, y(x) die Auslenkung. An beiden Endflächen greifen Kräfte an, welche senkrecht auf die Endflächen wirken und damit in Richtung

$$\alpha(x) = \tan^{-1}(dy/dx) \sim dy/dx .$$

Die Näherung ist gültig für kleine Auslenkungen, wo

$$\sin\alpha \sim \tan\alpha \sim \alpha \sim dy/dx \qquad , \qquad \cos\alpha \sim 1 .$$

Der Betrag der beiden Kräfte ist gegeben durch die Saitenspannung und damit gleich,

$$|F(x)| = |F(x+dx)| = F .$$

Die y-Komponenten der beiden Kräfte addieren sich zu

$$dF_y = F_y(x) + F_y(x+dx) = F\,[\sin\alpha(x+dx) - \sin\alpha(x)] .$$

und damit

$$dF_y = F\,\frac{d\sin\alpha}{dx}\,dx \sim F\,\frac{d^2y}{dx^2}\,dx .$$

Diese resultierende Kraft wirkt als Rückstellkraft auf das Massenelement $dm = \rho\, A\, dx$, wobei ρ die Dichte und A den Querschnitt der Saite darstellen. Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$dm\ a = \rho\ A\ dx\ \frac{d^2y}{dt^2} = F\ \frac{d^2y}{dx^2}\ dx$$

oder

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F}{\rho A}\ \frac{d^2y}{dx^2}\ .$$

Dies ist die Differentialgleichung, welche die Ausbreitung der Welle auf einer gespannten Saite beschreibt.

Die Phasengeschwindigkeit beträgt somit

$$v_P = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}\ ,$$

d.h. sie ist proportional zum Verhältnis von Spannung des Seils zur Massendichte ρA pro Längeneinheit. Dicke, schwach gespannte Seile oder Saiten ergeben somit niedrige Frequenzen, leichte, stark gespannte eine hohe Frequenz. Die Abhängigkeit von der Spannung der Saite kann wieder leicht verstanden werden da ohne Spannung keine rücktreibende Kraft existiert. Die Abhängigkeit von der Massendichte (pro Länge) ist die gleiche wie bei allen Arten von Materiewellen, die wir bisher diskutiert hatten.

5.2.8 Übersicht Phasengeschwindigkeiten

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer harmonischen Welle wird bestimmt durch die Wellengleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = v_P{}^2\ \frac{d^2y}{dx^2}\ .$$

Die Phasengeschwindigkeit beträgt für

Druckwellen in Gasen, Flüssigkeiten: $v_P = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$. K: Kompressionsmodul; ρ : Dichte

Longitudinalwellen in Festkörpern: $v_P = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. E: Elastizitätsmodul

Torsionswellen in dünnen Rundstäben: $v_P = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$. G: Schubmodul

Seilwellen: $v_P = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$.

5.2.9 <u>Der Dopplereffekt</u>

Bewegen sich Quelle oder Beobachter relativ zum Medium, so unterscheiden sich die ausgestrahlten und die gemessenen Frequenzen. Diesen Effekt bezeichnet man als Dopplerverschiebung.

Exp.: I / 71: Dopplereffekt, akustisch

Der Effekt kann bei einem vorbeifahrenden Zug (vor allem einem pfeifenden) beobachtet werden. Man kann ihn aber auch mit einem bewegten Lautsprecher hörbar machen. Mit Radarwellen wird er zur Geschwindigkeitsmessungen verwendet.

Für die Herleitung betrachten wir zunächst die Periode, die ein ruhender Beobachter misst, wenn eine Welle der Wellenlänge λ und Phasengeschwindigkeit v_P bei ihm eintrifft

$$T = \lambda / v_P \, .$$

Für einen Beobachter, der sich auf die Quelle zu bewegt, beträgt die Geschwindigkeit der Welle für ihn scheinbar v_P+v_B. Damit wird die Periode verkürzt auf

$$T_B = \lambda/(v_P+v_B)$$

oder

$$\nu_B = 1/T_B = (v_P+v_B)/\lambda \, .$$

v_B stellt hier die Geschwindigkeitskomponente des Beobachters in Richtung auf die Quelle dar; tangentiale Komponenten zählen nicht. Die Wellenlänge wird bestimmt durch die Frequenz, mit der die Wellen erzeugt werden, und die Phasengeschwindigkeit v_P:

$$\lambda = v_P \, T_Q = v_P/\nu_Q \, .$$

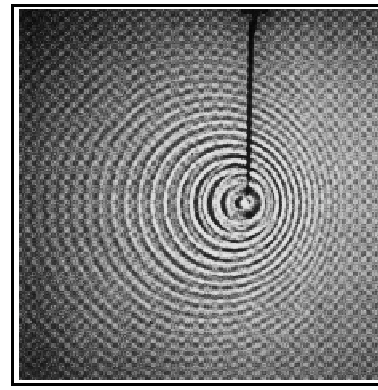
Damit ist

$$\nu_B = 1/T_B = \nu_Q \, (v_P+v_B)/v_P \, .$$

Offenbar ist die Frequenz, die der Beobachter misst, gegenüber der ausgestrahlten Frequenz höher um das Verhältnis der Geschwindigkeit des Beobachters gegenüber der Schallgeschwindigkeit:

$$\nu_B = \nu_Q \left(1 \pm \frac{v_B}{v_P} \right) .$$

Das + Zeichen bezieht sich auf den Fall wo der Beobachter sich in Richtung auf die Quelle bewegt, das – Zeichen auf den entgegengesetzten Fall.



Bewegt sich statt dem Beobachter die Quelle, so wird in Bewegungsrichtung der Abstand zwischen den Wellenflächen kleiner, auf der anderen Seite größer. Die einzelnen Kreiswellen markieren wie weit sich die Welle in den letzten n Perioden T_Q ausgebreitet haben. Wir nehmen an, dass ein ruhender Beobachter sich in Bewegungsrichtung (rechts im Bild) befindet. Die Wellenlänge, die er sieht, verringert sich um $v_Q T_Q$:

$$\lambda = \lambda_0 - v_Q T_Q \,.$$

Mit $\lambda_0 = v_P/\nu_Q$ wird

$$\nu_B = v_P/\lambda = v_P/(\lambda_0 - v_Q T_Q) = v_P/(v_P/\nu_Q - v_Q/\nu_Q) = \frac{\nu_Q}{1 - \frac{v_Q}{v_P}} \,.$$

Für den Fall, dass die Quelle sich vom Beobachter entfernt muss das - Zeichen durch ein + ersetzt werden. Offenbar unterscheiden sich somit die beiden Fälle wo sich Beobachter, resp. Quelle bewegen. Der Unterschied ist allerdings gering so lange die Geschwindigkeit klein ist im Vergleich zur Phasengeschwindigkeit im betreffenden Medium. Bewegen sich beide, so kann man die beiden Ausdrücke kombinieren:

$$\nu_B = \nu_Q \frac{1 + \frac{v_B}{v_P}}{1 - \frac{v_Q}{v_P}} = \nu_Q \frac{v_P + v_B}{v_P - v_Q} \,.$$

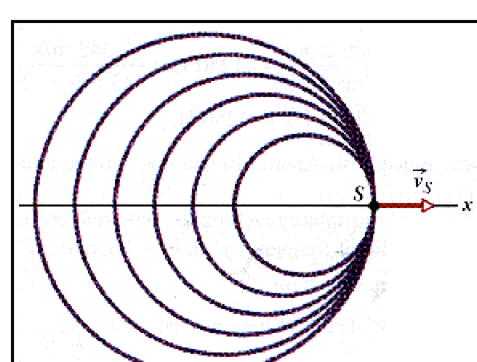
5.2.10 Überschallgeschwindigkeit

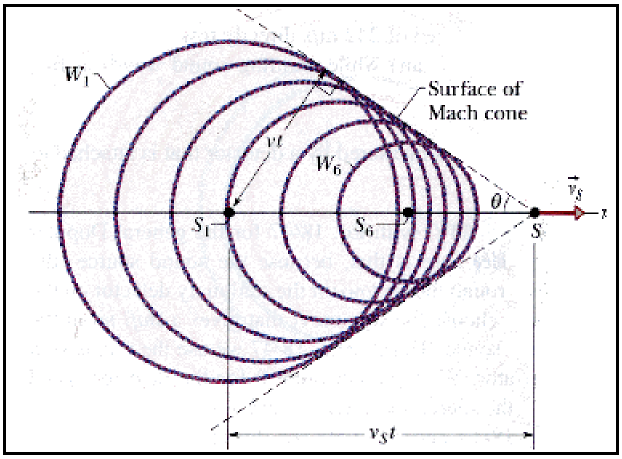
Die Wellenlänge der ausgestrahlten Welle

$$\lambda = \lambda_0 - v_Q T_Q = v_P T_Q - v_Q T_Q = (v_P - v_Q)\, T_Q$$

kann offenbar auch Null werden wenn die Geschwindigkeit der Quelle gleich der Phasengeschwindigkeit der Welle wird.

Dies entspricht dem Fall dass die Quelle sich mit der emittierten Welle mitbewegt. Für den Fall einer Schallwelle entspricht dies einer Bewegung der Quelle mit Schallgeschwindigkeit.



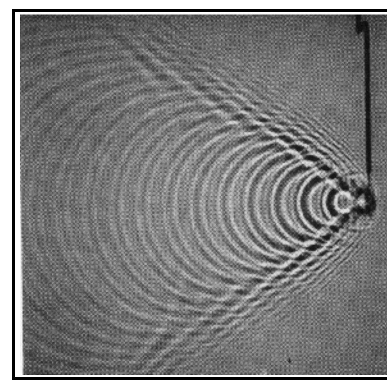


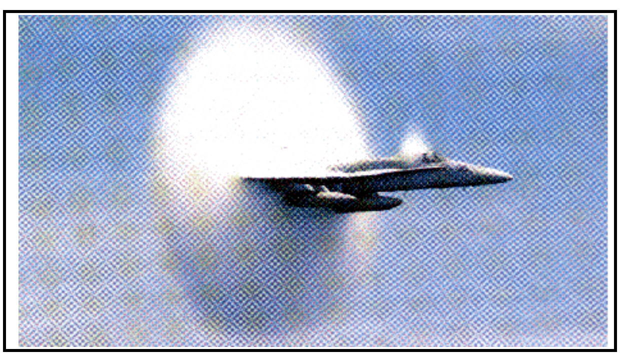
Bewegt sich die Quelle schneller als mit Schallgeschwindigkeit, so bilden die Wellen einen Kegel, der als Mach'scher Kegel bezeichnet wird. Wir können dessen Öffnungswinkel berechnen indem wir berücksichtigen, dass alle Kugelwellen den Kegel berühren. Befindet sich die Quelle zu t=0 bei A und zur Zeit t bei B, hat sie die Strecke AQ = t v_Q zurückgelegt, während die Schallwelle die Strecke AB = v_P t zurückgelegt hat. Somit ist der halbe Öffnungswinkel θ gegeben als

$$\sin \theta = v_P\, t/(v_Q\, t) = \frac{v_P}{v_Q} = \frac{1}{Ma} .$$

Die Zahl Ma, das Verhältnis der Geschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit, wird als Mach'sche Zahl bezeichnet.

Dies kann man z.B. in der Wellenwanne sichtbar machen.





Bei Flugzeugen wird der Mach'sche Kegel als Überschallknall hörbar, z.T. aber auch sichtbar. In diesem Beispiel kann man den Mach'schen Kegel sehen, da die Druckänderung zu einer Kondensation von Wasserdampf führt.