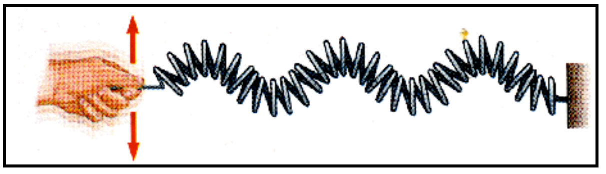
5. Wellen

5.1 Grundlagen

5.1.1 Beispiele und Definition

Als Welle bezeichnet man die Ausbreitung einer Störung in einem kontinuierlichen Medium oder einer räumlich periodischen Struktur.



Exp. 9a: Welle auf Feder

In diesem Beispiel wird auf eine Feder von Hand ausgelenkt. Diese Störung läuft der Feder entlang bis zu ihrer Befestigung.

Wellen treten z.B. in Festkörpern auf, wo Atome durch interatomare Kräfte ("Federn") aneinander gekoppelt sind: jedes Atom kann schwingen, doch sind die Schwingungen voneinander abhängig. Die Störung ist in diesem Fall die Auslenkung der Atome aus ihrer Ruhelage. Da die Atome dabei eine Kraft auf ihre Nachbarn ausüben, wird die Störung auf den Nachbarn übertragen, wie dies im Rahmen der gekoppelten Schwingungen diskutiert wurde.

Exp. : Wasserwelle

Eine bekannte Art von Wellen sind Wasserwellen: hier schwingen Flüssigkeitsteile vertikal, die Störung breitet sich entlang der Flüssigkeitsoberfläche aus. Während in Masse-Feder Systemen klar ist, dass die einzelnen Massen sich nicht fortbewegen ist dies in einem flüssigen- oder gasförmigen System weniger offensichtlich.

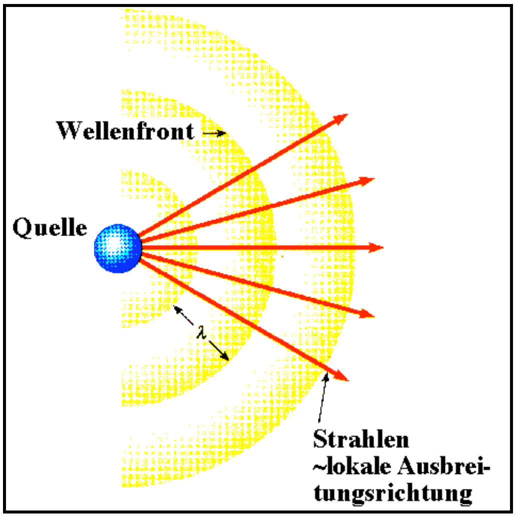
Video: Wasserwelle

Während die Wellen den Eindruck erwecken, dass Wasser entlang der Oberfläche transportiert wird, erkennt man durch "Markieren" eines Flüssigkeitsvolumens, z.B. mit Hilfe eines schwimmenden Körpers, dass die einzelnen Flüssigkeitsteile nur lokale Bewegungen ausführen; in diesem Fall ist es eine nahezu kreisförmige Bewegung. Dies zeigt, dass allgemein bei einer Welle keine Materie transportiert wird. Es wird jedoch Energie übertragen.

5.1.2 Ausbreitung von Wellen

Wenn die Wellen auch keine Materie transportieren ist es trotzdem sinnvoll, von der Ausbreitung der Welle zu sprechen. Damit wird die Ausbreitung der Störung, also der Auslenkung bezeichnet. Für die Beschreibung von Wellen vergleicht man zunächst die Orte gleicher Phase, d.h. die Vereinigung aller Elemente, die um den gleichen Betrag ausgelenkt sind.

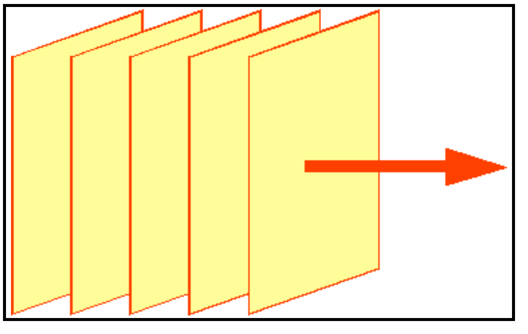
Diese wird als Wellenfront bezeichnet. Bei den zweidimensionalen Wasserwellen in diesem Beispiel handelt es sich um eine Linie (resp. 2 Linien); bei einer Seilwelle ist die Wellenfront ein Punkt; in einem dreidimensionale Medium handelt es sich um eine Fläche.



- Die Ausbreitungsrichtung der Welle ist immer senkrecht zur Wellenfront. Bei einer optischen Welle (d.h. Licht) entspricht diese lokale Ausbreitungsrichtung dem Lichtstrahl. Wird die Welle durch eine punktförmige Anregung erzeugt, so sind die Wellenfronten konzentrische Kugelflächen. Man spricht in diesem Fall von einer Kugelwelle.

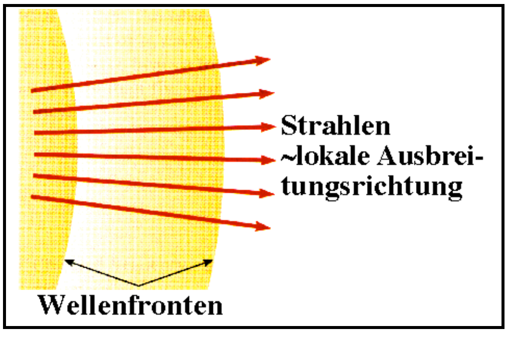
Exp.: Wellenwanne

Kugelwellen kann man z.B. in einer Wasserwanne durch periodisches Eintauchen eines Stifts erzeugen.



Ein anderer wichtiger Wellentyp sind ebene Wellen. Hier sind die Wellenfronten parallele Ebenen. Die Ausbreitungsrichtung, welche senkrecht auf den Phasenflächen steht, ist somit überall die gleiche.

Auch für diese Art von Wellen können wir in der Wellenwanne ein zweidimensionales Analogon erzeugen, indem die Wellen mit einem geraden Blech erzeugt werden.



Beide, sowohl die Kugelwelle wie auch die ebene Welle sollten als mathematisch einfache Idealisierungen der Wirklichkeit verstanden werden. Es gibt auch viele Fälle, die zwischen diesen Extremfällen liegen: Eine Kugelwelle weit vom Ursprung kann näherungsweise als ebene Welle beschrieben werden.

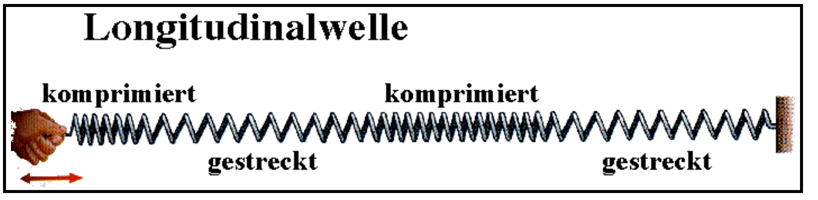
5.1.3 Wellentypen

Wellen beschreiben immer eine Auslenkung eines Systems aus dem Gleichgewicht als Funktion von Ort und Zeit. Man kann sie somit nach dem Medium klassifizieren, in dem diese Auslenkung stattfindet, oder nach der Art der Auslenkung. Als Medium kommen Gase, Flüssigkeiten, Festkörper, aber auch das Vakuum in Betracht. Elektromagnetische Wellen stellen ein Beispiel dar, bei dem kein Medium benötigt wird: hier beschreibt die Welle die Stärke des elektromagnetischen Feldes als Funktion von Ort und Zeit. Elektromagnetische Wellen umfassen Radiowellen, Licht, Röntgenstrahlen, und Gammastrahlen. Die wichtigsten elektromagnetischen Wellen sind Licht. Diese werden im Rahmen eines eigenen Kapitels (6 Optik) separat diskutiert.

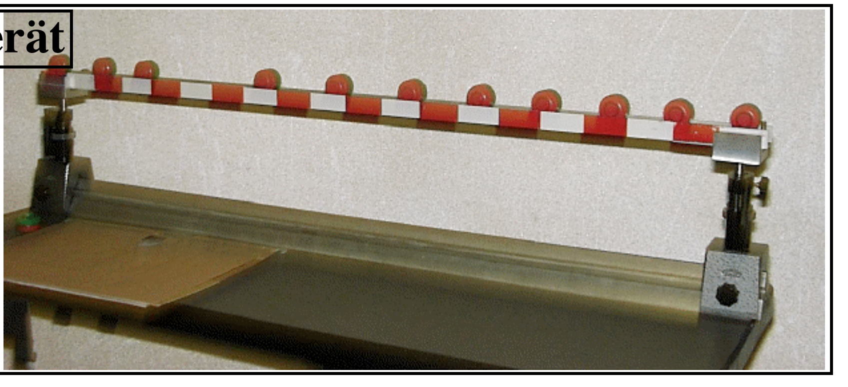
Das Medium bestimmt unter anderem auch die mögliche Art der Auslenkung. Bei einer Seilwelle ist die Störung eine Auslenkung des Seils, welche sich entlang dem Seil bewegt. Bei einer Oberflächenwelle, wie z.B. Wasserwellen oder bestimmten Arten von seismischen Wellen, ist die Störung die Auslenkung von Volumenelementen aus der Gleichgewichtsoberfläche. Bei Schallwellen ist die Störung eine Druckschwankung.

Man unterscheidet Longitudinal- und Transversalwellen, je nachdem ob die Auslenkung in Ausbreitungsrichtung oder senkrecht dazu geschieht.

Eine Longitudinalwelle kann z.B. als Druckwelle verstanden werden: eine Dichteschwankung (wie hier in der Feder) läuft entlang der Ausbreitungsrichtung.

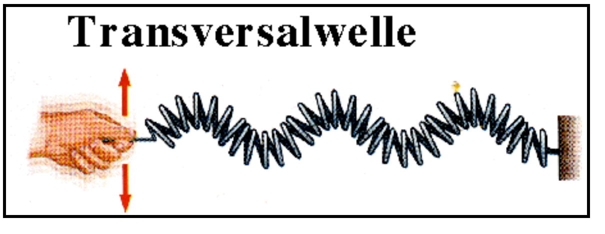


Exp. 19: Magnetrollengerät

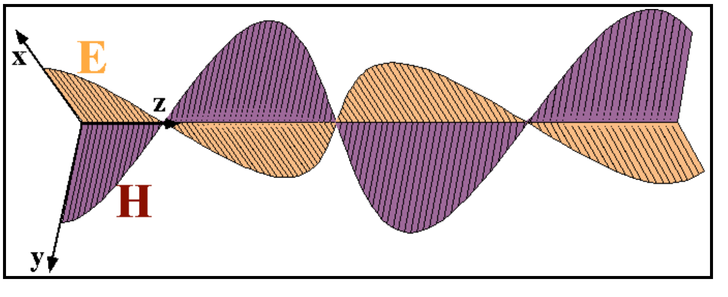


Ein einfaches Beispiel für eine Longitudinalwelle ist dieses Magnetrollengerät: Die Dichteschwankung kann durch manuelles Anstoßen erzeugt werden, und die Wechselwirkung zwischen den Rollen wird durch die magnetische Abstoßung bestimmt. Typische Beispiele von Longitudinalwellen sind Schallwellen.

Im Fall der Seilwelle war die Auslenkung senkrecht zur Bewegungsrichtung, d.h. hier handelt es sich um eine Transversalwelle.



Ein wichtiger Unterschied zwischen Longitudinal- und Transversalwellen ist, dass Transversalwellen Polarisationseffekte zeigen: sie können z.B. horizontal oder vertikal polarisiert sein, oder zirkular. für transversale Wellen elektromagnetische Wellen. Das elektrische und magnetische Feld stehen senkrecht zueinander und zur Ausbreitungsrichtung. Die beiden Felder zeigen die gleiche räumliche und zeitliche Abhängigkeit.



Video: Long.-/Transversalwelle

Hier wird der Unterschied nochmals zusammengefasst.

Eine der wichtigsten Entdeckungen des letzten Jahrhunderts war, dass auch die Konstituenten der Materie, also Elementarteichen, Atome und Moleküle Welleneigenschaften besitzen. Dies konnte man zunächst für Elektronen zeigen; später auch für Neutronen, Atome, und sogar für Moleküle. Die Wellenlänge dieser Wellen hängt ab von der Masse und der Geschwindigkeit der Teilchen, ist aber meist im Bereich von wenigen nm oder Bruchteilen davon.

5.1.4 Mathematische Beschreibung harmonischer Wellen

Wellen werden mathematisch durch Wellenfunktionen $\square(x, t)$ dargestellt, welche die Auslenkung als Funktion von Raum und Zeit beschreiben. Diese muss einer Wellengleichung der Form

$$\frac{\partial^2 \square}{\partial t^2} = v_p^2 \frac{\partial^2 \square}{\partial x^2}$$

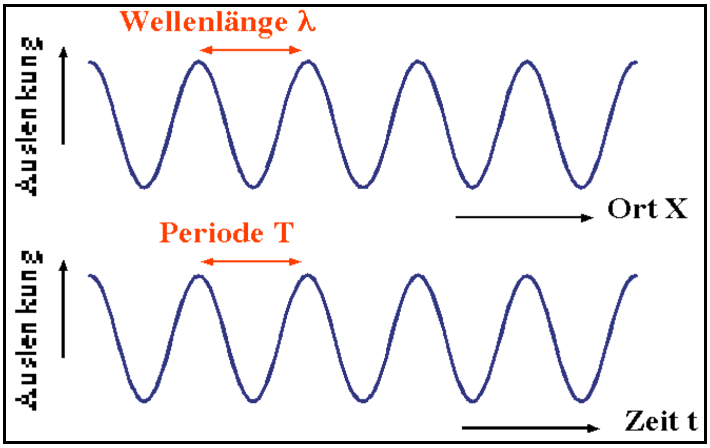
gehorchen. Hier stellt y die Auslenkung und v_p die Phasengeschwindigkeit der Welle dar. In drei Dimensionen lautet die entsprechende Gleichung

$$\frac{\partial^2 \square}{\partial t^2} = v_p^2 \left(\frac{\partial^2 \square}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \square}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \square}{\partial z^2}\right).$$

Wir beschränken uns hier hauptsächlich auf die Beschreibung harmonischer Wellen, also Wellen bei denen die Abhängigkeit von Raum und Zeit einer harmonischen Funktion entspricht. Dies ist natürlich immer eine Näherung, da in realen Systemen z.B. die Schwingung sich nie unendlich lange fortsetzt und das Medium nicht unendlich ausgedehnt ist. Trotzdem können viele der Schlussfolgerungen auf reale Systeme übertragen werden.

Eine harmonische Welle in einer Dimension kann geschrieben werden als

$$y(x, t) = y_0 \cos(2\pi(t/T - x/\square) + \square) = y_0 \cos(\square\, t - k\, x + \square).$$



Hier bezeichnen y die Auslenkung, x die räumliche und t die zeitliche Koordinate, T die Periode der Welle, □ die Wellenlänge, □ die Phase, □ die Kreisfrequenz und $k = 2\pi/\square$ die Wellenzahl.

Die Verallgemeinerung auf mehrere Dimensionen erhält man leicht indem für die Berechnung der Phase die Beiträge für alle drei Koordinaten addiert werden:

$$y(\vec{r}, t) = y_0 \cos(\square\, t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \square).$$

$\vec{k}$ stellt jetzt den Wellenvektor dar; er steht senkrecht auf den Phasenflächen, in Ausbreitungsrichtung der Welle. Offensichtlich kann man diesen Fall auf den eindimensionalen Fall zurückführen indem man die x-Achse entlang der Ausbreitungsrichtung wählt. In diesem Fall wird $\vec{k} = (k_x, 0, 0)$ und das Skalarprodukt $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x\, x$ reduziert sich auf einen Term. Dies stimmt mit der Betrachtung der Welle als parallele Phasenflächen überein: Das Problem hängt nicht von den Koordinaten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ab.

Die Periode T ist die Zeit, nach der sich das Wellenbild in Raum und Zeit reproduziert. Die Wellenlänge λ ist die Strecke zwischen zwei Maxima der Auslenkung.

Betrachten wir die Auslenkung an einem festen Ort x, so erhält man eine einfache Oszillation (deren Phase von x abhängt):

$$y_x(t) = y_0 \cos(\omega\, t + \varphi_x)$$

mit

$$\varphi_x = \varphi - k\, x\ .$$

Video: Wellenausbreitung

Die Phase φ_x ist ortsabhängig, sie wächst in diesem Fall linear mit der Koordinate x. Diese Funktion beschreibt eine Welle, die von links nach rechts (also in Richtung positives x) läuft. Eine Welle, die in entgegengesetzter Richtung läuft, kann durch einen negativen Wellenvektor dargestellt werden.

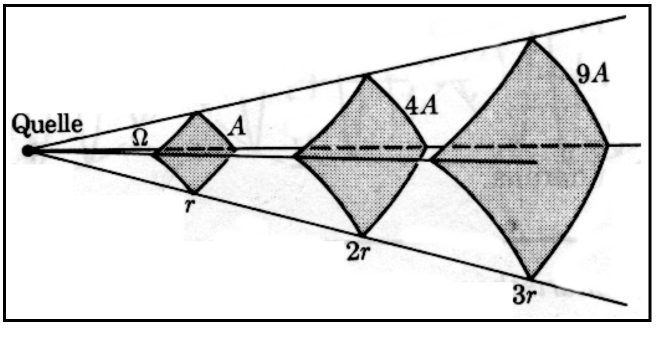
Einsetzen in die Wellengleichung ergibt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\,\omega^2\, y = v_p^2\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\, k^2\, v_p^2\, y\ .$$

Somit ist die angegebene Form eine Lösung der Wellengleichung für $v_p = \omega/k$.

5.1.5 <u>Phasengeschwindigkeit</u>

Für eine harmonische ebene Welle ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit leicht zu bestimmen. Die Phasengeschwindigkeit v_P gibt an, wie schnell sich die Phase einer Welle, also z.B. ein Nulldurchgang, ausbreitet. Wenn die Welle durch eine Funktion $f(\omega t - kx + \varphi)$ beschrieben wird, ist ein Zustand konstanter Phase dadurch definiert, dass



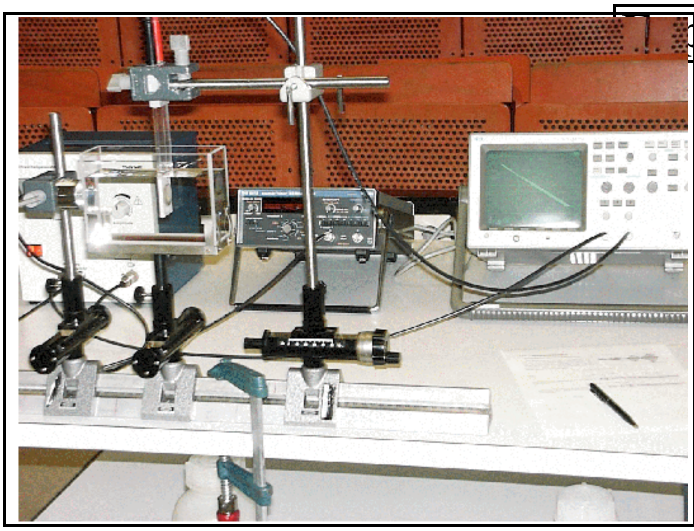
$$\omega t - kx + \varphi = \text{const},$$

oder

$$x = \frac{\square t \; + \; \square \; - \; \text{const}}{k} \; .$$

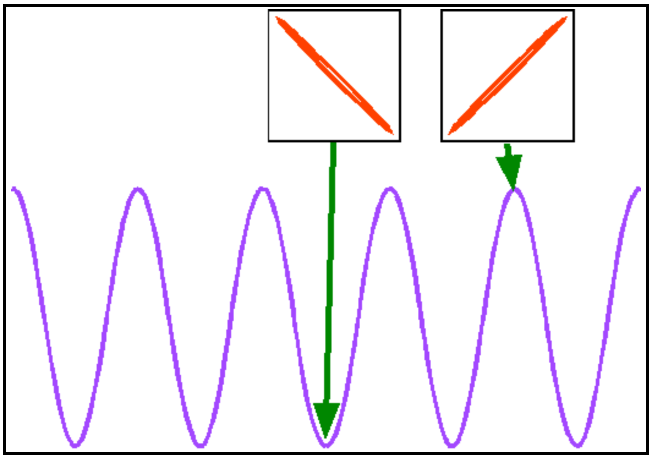
Die Phasengeschwindigkeit ist nach Definition

$$v_P = dx/dt = \square/k = \square/T = \square\square \, .$$



Exp. 22 / 32: Schallgeschwindigkeit

Diese Beziehung kann man für die Messung der Schallgeschwindigkeit verwenden. Wir messen in diesem Fall die Schallgeschwindigkeit in Wasser indem wir über einen "Transducer" eine Ultraschallwelle einkoppeln. Die Frequenz dieser Welle beträgt im Experiment 800 kHz.



Die Wellenlänge ergibt sich durch die Messung der eintreffenden Schallwelle an unterschiedlichen Orten. Der Schalldruck wird auf dem Oszilloskop gegen die Anregungsspannung aufgetragen. Sind die beiden in Phase, so erhält man eine Gerade mit positiver Steigung. Verschiebt man den Schallaufnehmer um eine halbe Wellenlänge, so sind die beiden Signale um 180 Grad außer Phase und die Gerade hat eine negative Steigung. Im Experiment wurde eine Wellenlänge von 1.86 mm gemessen. Dies entspricht einer Schallgeschwindigkeit

$$v_P = \square\square = 8 \cdot 10^5/\text{s} \cdot 1.86 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = 1485\ \text{m/s}.$$

Dies ist in guter Übereinstimmung mit dem Literaturwert von 1480 m/s bei 20°C.