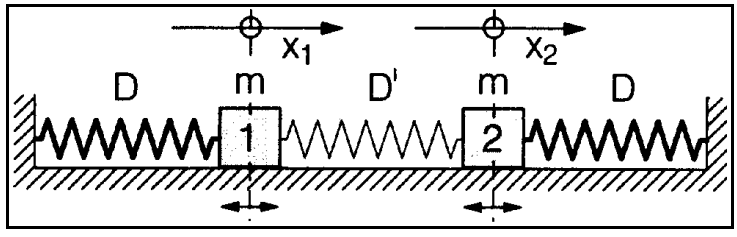
4.6 Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden

4.6.1 Das Doppelpendel

Wir betrachten nun nicht mehr einzelne, unabhängige harmonische Oszillatoren, sondern mehrere, die aneinander gekoppelt sind.

Exp. III/6: Doppelpendel

Wenn wir eines der gekoppelten Pendel anstoßen, so wird seine Energie auf das andere übertragen. Die Schwingung des ersten Pendels wird dabei gedämpft bis es ganz still steht, diejenige des zweiten Pendels baut sich auf, bis der Vorgang sich umkehrt. Offenbar wird hier Energie von einem Pendel auf das andere übertragen.



Ein ähnliches System besteht aus zwei über Federn gekoppelten Massen.

Um eine Bewegungsgleichung für dieses System zu erhalten gehen wir aus vom freien, ungedämpften harmonischen Oszillator. Im Vergleich dazu erhalten wir in diesem Fall eine zusätzliche rückstellende Kraft für jeden der beiden einzelnen Pendel, welche proportional zur Differenz der beiden Auslenkungen ist:

$$\ddot{\Box}_1 = - \Box_0^2 \Box_1 + \Box (\Box_2 - \Box_1) \qquad \ddot{\Box}_2 = - \Box_0^2 \Box_2 + \Box (\Box_1 - \Box_2) .$$

Offenbar erhalten wir ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen.

Im Allgemeinen kann man Systeme von gekoppelten linearen Differentialgleichungen lösen indem man die Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt. In diesem Fall handelt es sich um ein speziell einfaches System: Wir können die Lösung finden indem wir Summe und Differenz dieser beiden Gleichungen bilden:

$$\ddot{\Box}_1 + \ddot{\Box}_2 = \ddot{\Box}_1 = - \Box_0^2 (\Box_1 + \Box_2) = - \Box_0 \Box_1 .$$

$$\ddot{\Box}_1 - \ddot{\Box}_2 = \ddot{\Box}_2 = - \Box_0^2 (\Box_1 - \Box_2) + 2 \Box (\Box_2 - \Box_1) = - (\Box_0^2 + 2 \Box) \Box_2 .$$

Somit haben wir zwei voneinander unabhängige Differentialgleichungen für die Variablen $(\Box_1 + \Box_2)$ und $(\Box_1 - \Box_2)$ gefunden, welche jeweils einem harmonischen Oszillator entsprechen. Somit sind die Lösungen für diese beiden Variablen

$$\Box_1 + \Box_2 = \Box_1 = A\, e^{i(\Box_0 t + \Box)} ,$$

wobei Amplitude A und Phase φ durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Entsprechend findet man für

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 = B\, e^{i(\omega_2 t+\varphi)} \qquad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\kappa} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2\kappa}{\omega_0^2}} \sim \omega_0 \left(1+\frac{\kappa}{\omega_0^2}\right).$$

Die zweite Frequenz liegt somit immer höher als die Frequenz für die symmetrische Mode. Die Erhöhung wird durch das Verhältnis aus Kopplungsstärke und Modenfrequenz bestimmt.

4.6.2 Eigenschwingungen

Die beiden Lösungen entsprechen offenbar Zuständen des Systems, in denen es mit einer einzelnen Frequenz schwingt. Man bezeichnet diese speziellen Schwingungstypen als Normalmoden oder Normalschwingungen des Systems. Es ist möglich, Normalmoden gezielt anzuregen, indem man die Anfangsbedingungen geeignet wählt. Eine daran anschließende freie Oszillation des Systems kann dann durch diese Normalschwingung allein beschrieben werden.

Wir betrachten zunächst den Fall

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0 \; ; \; \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \;,$$

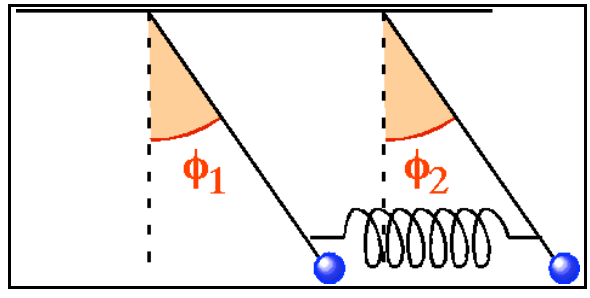
d.h. den Fall, dass beide Pendel zur gleichen Seite ausgelenkt werden und aus der Ruhe losgelassen werden. Eingesetzt in die obigen Lösungen für φ_1 und φ_2 finden wir **Exp.**

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_1 = 2\,\varphi_0\, e^{i\omega_0 t}\,, \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 = 0\,,$$

oder

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0\, e^{i\omega_0 t}\,,$$

d.h. beide Pendel schwingen mit der gleichen Frequenz ω_0, gleicher Amplitude und gleicher Phase. Die Kopplungsfeder ist in diesem Fall entspannt und hat deshalb keinen Einfluss auf das System.



Als nächstes betrachten wir den Fall, dass die beiden Pendel in entgegengesetzte Richtung ausgelenkt und aus der Ruhe losgelassen werden,

$$\varphi_1(0) = -\,\varphi_2(0) = \varphi_0\,; \qquad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0\;.$$

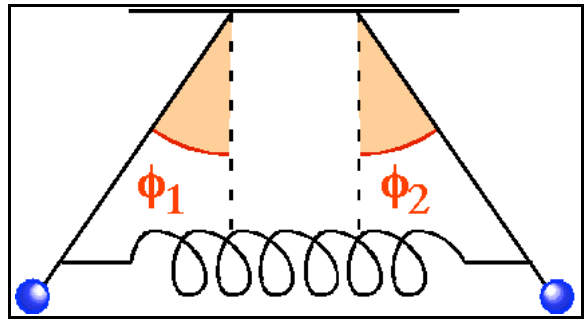
Aus dieser Anfangsbedingung erhalten wir

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 = 2\,\varphi_0\, e^{i\omega_2 t}\,, \qquad \varphi_1 + \varphi_2 = 0$$

oder

$$\varphi_1 = -\,\varphi_2 = \varphi_0\, e^{i\omega_2 t}\,.$$

Somit bewegen sich in diesem Fall beide Pendel mit gleicher Frequenz und Amplitude, diesmal aber in Gegenphase. Dadurch ist die Feder in diesem Fall immer maximal gespannt, so dass die rücktreibende Kraft auf beide Pendel um den entsprechenden Wert größer wird. Die Resonanzfrequenz



$$\omega_2 = \omega_0 + 2\,\omega$$

für diese zweite Normalmode ist deshalb um 2ω größer als die Grundfrequenz. Wir bestätigen diese Voraussage im Experiment indem wir die Periode der beiden Schwingungen messen. Sie betragen

$$T_1 = 1.9\ \text{s} \qquad T_2 = 1.65\ \text{s}\,.$$

Wird die Feder in die Mitte der Pendel verschoben wird die Kopplungsstärke reduziert. Wir messen in diesem Fall eine Periode von $T_3 = 1.8$ s.

4.6.3 Schwebungen

Als dritten Fall betrachten wir die Situation, dass einer der beiden Pendel ausgelenkt wird, während der andere in der Gleichgewichtslage ist, und beide zunächst in Ruhe, d.h.

$$\varphi_1(0) = \varphi_0\,, \qquad \varphi_2(0) = 0, \qquad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0\ .$$

In den Variablen φ_1 und φ_2 muss die zeitliche Entwicklung somit

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_1 = \varphi_0\, e^{i\omega_0 t}\,, \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 = \varphi_0\, e^{i\omega_2 t}$$

sein. Die Auslenkung der beiden Pendel wird damit

$$\varphi_1 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2 = \varphi_0/2\,(e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_2 t}) \qquad \varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi_2)/2 = \varphi_0/2\,(e^{i\omega_0 t} - e^{i\omega_2 t})\,.$$

In reeller Schreibweise entspricht dies für

$$\varphi_1 = \varphi_0/2\,[\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_2 t)]\ .$$

Mit Hilfe des Additionstheorems

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

und

$$\omega_2 \sim \omega_0\left(1+\frac{\kappa}{\omega_0^2}\right)$$

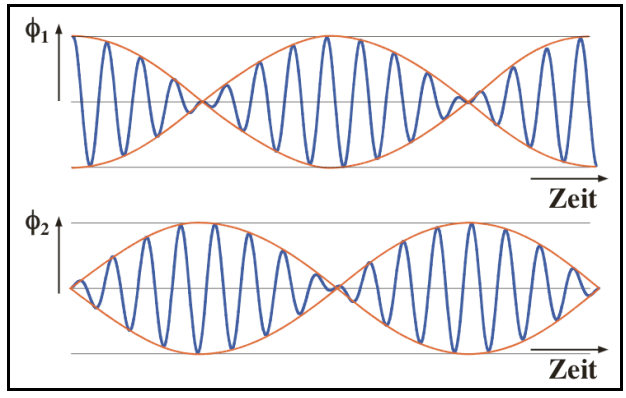
können wir dies umformen zu

$$\phi_1 = \phi_0\cos\left(\frac{\omega_0+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_0}{2}t\right) = \phi_0\cos\left(\omega_0\left(1+\frac{\kappa}{2\omega_0^2}\right)t\right)\cos\left(\frac{\kappa}{2\omega_0}t\right).$$

Für das zweite Pendel erhalten wir entsprechend

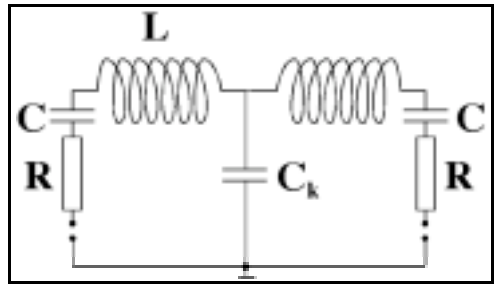
$$\phi_2 = \phi_0/2\,[\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_2 t)] = \phi_0\sin\left(\omega_0\left(1+\frac{\kappa}{2\omega_0^2}\right)t\right)\sin\left(\frac{\kappa}{2\omega_0}t\right).$$

Offenbar schwingen beide Pendel jetzt mit der mittleren Frequenz $\frac{\omega_0+\omega_2}{2}$, wobei die Amplitude noch mit der halben Differenzfrequenz $\kappa/(2\omega_0)$ moduliert ist. Man bezeichnet diese Erscheinung als Schwebung.



4.6.4 Gekoppelte elektronische Schwingkreise

Wie mechanische Schwingkreise können auch elektronische Schwingkreise gekoppelt werden. Wir betrachten hier als Beispiel ein System von zwei kapazitiv (d.h. über einen Kondensator) gekoppelten Schwingkreisen.



Die beiden Schwingkreise sind unabhängig voneinander sofern der Kopplungskondensator C_k sehr groß wird: in diesem Fall wirkt er als Kurzschluss und der Punkt zwischen den beiden Spulen ist auf dem Potenzial der Masse. Jeder der beiden Schwingkreise entspricht dann einem unabhängigen harmonischen Oszillator. Ist der Widerstand klein, so beträgt die Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Unter Berücksichtigung des Kopplungskondensators können wir die eine Eigenmode des Systems finden wenn wir den Fall betrachten wo das System symmetrisch schwingt, d.h. über den entsprechenden Komponenten auf beiden Seiten liegt jeweils die gleiche Spannung an. Aus Symmetriegründen hat der Kopplungskondensator dann keine Wirkung. Das gesamte System besitzt dann die Eigenfrequenz

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2L\,\frac{1}{2}C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 .$$

Sind die beiden Kreise im Gegentakt, fließt der Strom also durch den Kondensator C_k, so wird die gesamte Kapazität des Schwingkreises

$$C_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{2C} + \frac{1}{C_k}} = \frac{2\,C\,C_k}{2C + C_k} .$$

Damit wird die Resonanzfrequenz

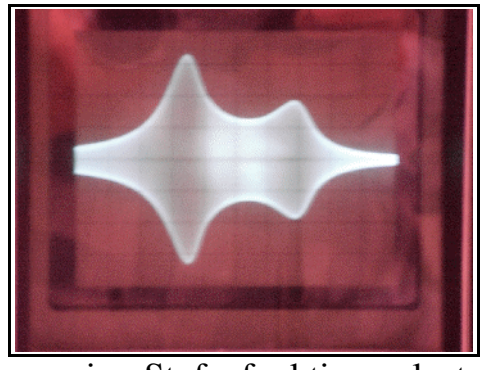
$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}L\,C_{tot}}} = \frac{1}{\sqrt{L\,\frac{CC_k}{2C + C_k}}} .$$

Wird der Kopplungskondensator sehr groß erhalten wir daraus wieder die Frequenz ω_0. Für sehr kleine Kopplungskondensatoren dominiert er und die zweite Resonanzfrequenz wächst auf

$$\omega_2 \approx \frac{1}{\sqrt{LC_k/2}} .$$

Offenbar kann diese Frequenz sehr hoch werden.

Exp. II/97: gekoppelte LC Kreise; Schwebung

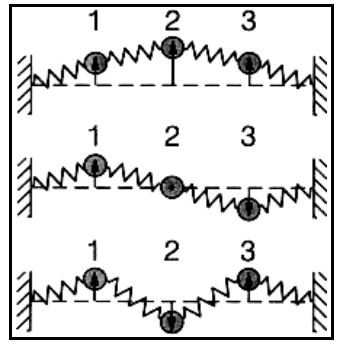


Wir können die beiden Resonanzfrequenzen im Experiment beobachten indem wir eine variable Wechselspannung anlegen und die Spannung über einer der beiden Spulen abgreifen. Für große Werte des Kopplungskondensators werden die beiden Resonanzfrequenzen praktisch identisch. Für kleine Werte nimmt die zweite Resonanzfrequenz stark zu.

Man kann am gleichen System auch das freie Schwingungsverhalten beobachten indem man als äußere Spannung eine Stufenfunktion anlegt. Man beobachtet wie beim einzelnen RLC Kreis eine gedämpfte Schwingung, wobei in diesem Fall auch eine Schwebung sichtbar ist. Mit zunehmender Kopplungsstärke (kleinerem Kondensator) nimmt die Periode der Schwebung ab, d.h. die Schwebungsfrequenz zu.

4.6.5 Transversalschwingungen

Die Atome können nicht nur in Richtung der Achse ausgelenkt werden, sondern auch senkrecht dazu. Man spricht im bisher diskutierten Fall von Longitudinalschwingungen, im andern Fall von Transversalschwingungen. Wir werden solche Schwingungen im Kapitel 5 (Wellen) diskutieren. In den meisten Fällen existieren zwei voneinander unabhängige transversale Schwingungsmoden.



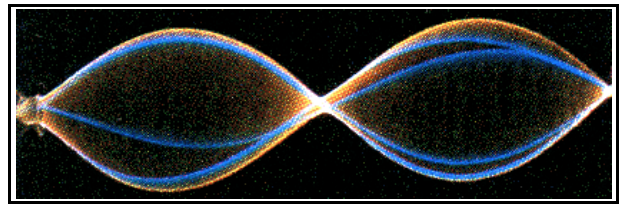
Eine zweidimensionale Schwingung kann man z.B. auf dem Luftkissentisch realisieren. In vielen Fällen ist es jedoch möglich, die beiden Dimensionen zu trennen und die Bewegungsgleichungen getrennt zu diskutieren.

Exp. 7: zweidimensionaler Federschwinger

Wenn wir bei solchen Schwingungen zum kontinuierlichen Grenzfall übergeht erhält man die Schwingungen einer Saite. Diese sollen auch im Kapitel "Wellen" genauer diskutiert werden. Qualitativ soll jedoch das Ergebnis hier vorweggenommen werden:

- Es gibt unendliche viele Eigenschwingungen, welche die Form

$$y_n = \sin(n \times \pi/L) \cos(\omega_n t)$$



besitzen. Hier stellt n eine laufende Zahl dar, welche die Eigenschwingungen ordnet, x die Koordinate entlang der Saite, L ihre Länge, und ω_n die Eigenfrequenz der Schwingung. Jede Eigenmode entspricht einer harmonischen Auslenkung der Saite, und die Auslenkung zeigt eine harmonische Zeitabhängigkeit. Da die Saite am Rand eingespannt ist verschwindet dort die Auslenkung immer, ebenso an den dazwischen liegenden Knoten, also den Nulldurchgängen der Auslenkung. Die n-te Eigenmode besitzt n1 Knoten.

Die Frequenzen sind Vielfache der Grundfrequnenz, d.h.

$$\omega_n = n\,\omega_1 ,$$

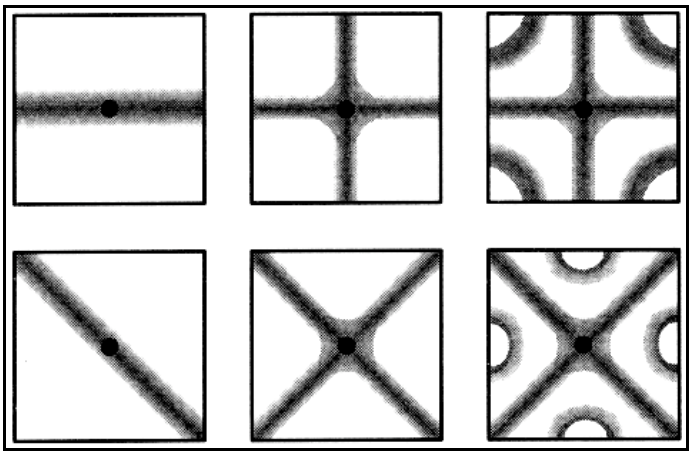
und die Grundfrequenz ist indirekt proportional zur Länge der Saite. Je länger eine Saite desto niedriger somit die Frequenz. Dies ist ein Grund dafür, dass tiefe Töne von großen Musikinstrumenten erzeugt werden.

4.6.6 Schwingungen von mehrdimensionalen Systemen

Ähnliche Schwingungen treten auch in mehrdimensionalen Systemen auf. Ein klassisches Beispiel sind die Schwingungen einer Membran. Unter einer Membran versteht man ein zweidimensionales schwingungsfähiges System. Dazu gehören z.B. Trommeln, wo eine elastische Membran am Rand eingespannt ist.

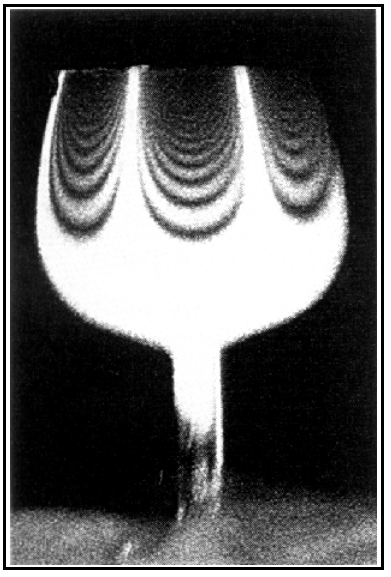
Exp 29, 29a: Membranschwingungen, Chladny'sche Klangfiguren

In diesem Experiment ist die "Membran" eine Platte aus Metall oder Glas, welche im Zentrum eingespannt ist. Mit Hilfe eines Bogens werden Schwingungen angeregt.



Diese können sichtbar gemacht werden indem Sand auf die Oberfläche gestreut wird.

Die Schwingung entspricht einer periodischen Auslenkung, bei der Teile der Membran sich nach oben verbiegen, andere nach unten. Nach einer halben Periode ist die Auslenkung umgekehrt. Es existieren jedoch Linien auf der Membran, welche nie ausgelenkt werden. Diese werden als Knotenlinien bezeichnet. Entlang der Knotenlinien sammelt sich der Sand und macht diese so sichtbar. Je größer die Anzahl der Knotenlinien, desto höher die Frequenz der entsprechenden Moden.

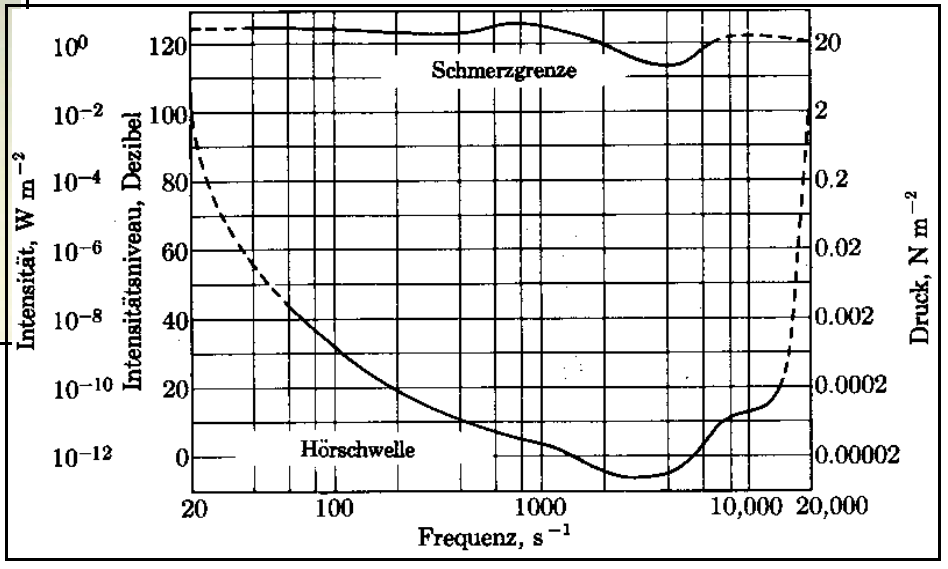


Moden existieren in jedem schwingungsfähigen System. Im Bild sind die Moden in einem Weinglas dargestellt, welche z.B. durch akustische Wellen angeregt werden können.

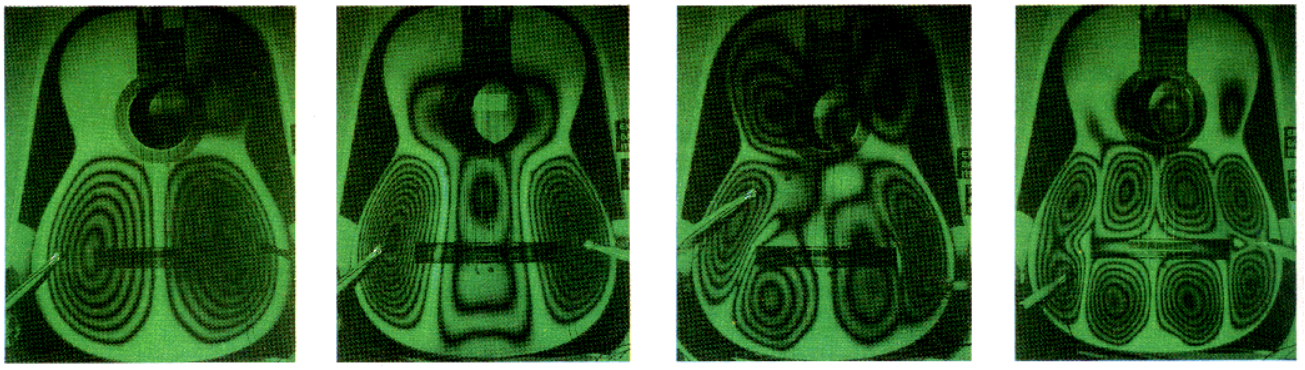
4.6.7 Akustische Schwingungen, Musikinstrument

Dreidimensionale Schwingungen in kontinuierlichen Medien sind z.B. akustische Schwingungen in Musikinstrumenten.

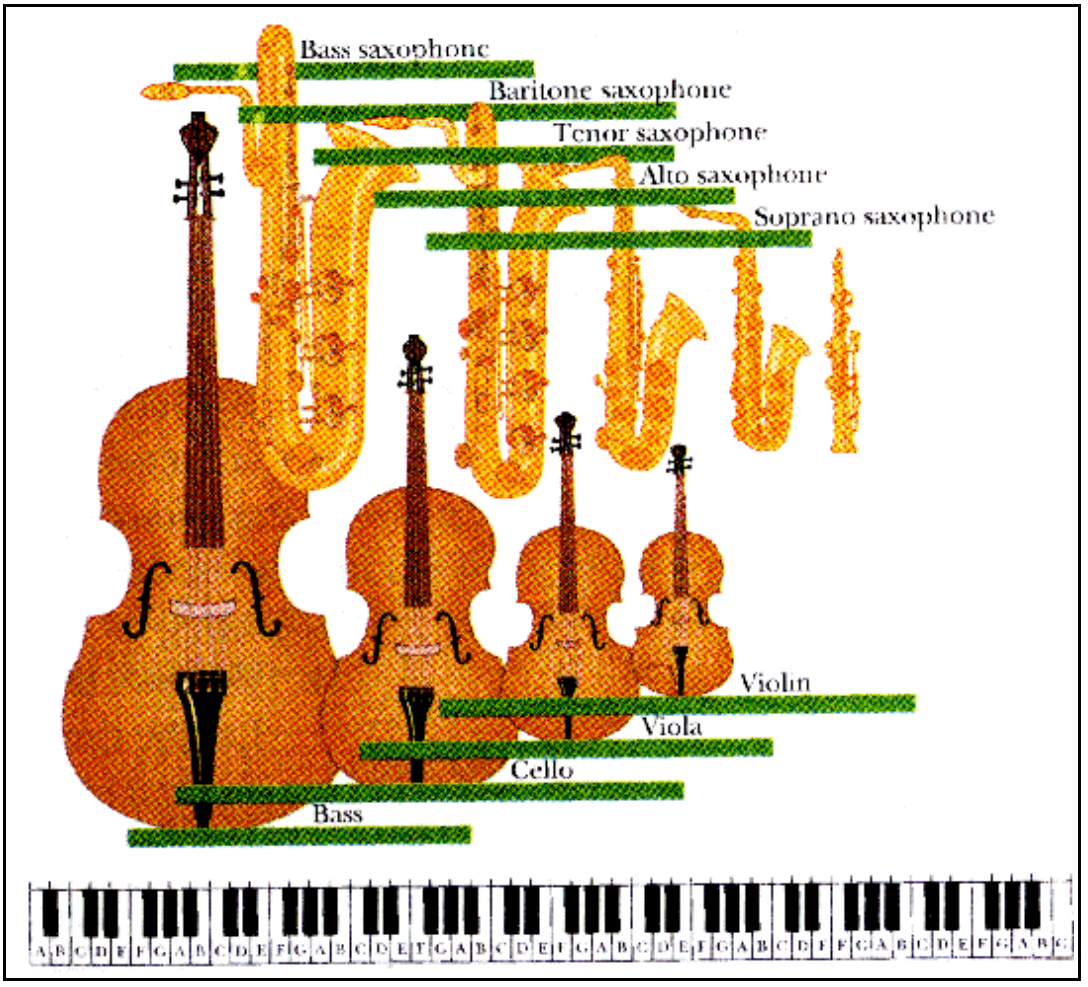
Ein Beispiel für ein einfaches Musikinstrument ist eine Flasche, in der man durch blasen die Luftsäule zu Schwingungen anregt.



Akustische Schwingungen sind hörbar wenn sie sich in einem Frequenzbereich von ca. 20 Hz bis 15 kHz befinden.



268 Hz (Q = 52) 553 Hz (Q = 66) 672 Hz (Q = 61) 1010 Hz (Q = 80)

Schwingungen können in Musikinstrumenten ähnlich wie in den gezeigten Membranen angeregt werden. Jedes Musikinstrument hat entsprechend eine Reihe von Eigenschwingungen. Zwar können z.B. bei einer Geige alle Töne erzeugt werden, doch werden nicht alle gleich gut wiedergegeben. Die Kombination der Eigenmoden ist für den Klang eines Instrumentes verantwortlich. Wie eine Geige oder Gitarre gebaut werden muss war deshalb lange Zeit ein kaum nachvollziehbares Geheimnis der Instrumentenbauer. Nicht nur die Form des Instrumentes ist wichtig, da sie die Lage der Moden bestimmt, auch das Material, welches z.B. die Dämpfung und damit die Breite der Resonanzen mitbestimmt.

Allgemein gilt, dass größere Instrumente tiefere Töne ergeben. Dieser Zusammenhang wird ebenfalls im Kapitel 5 Wellen noch diskutiert.