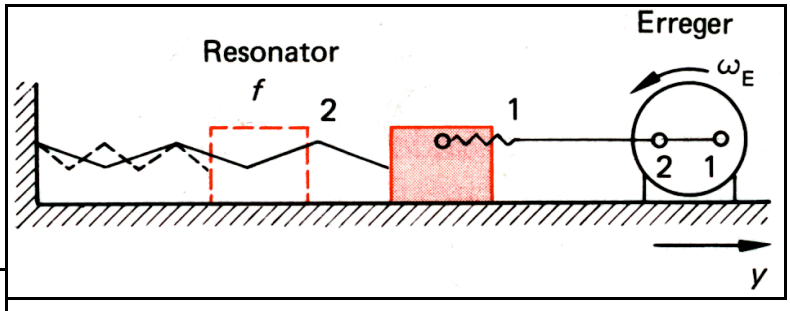
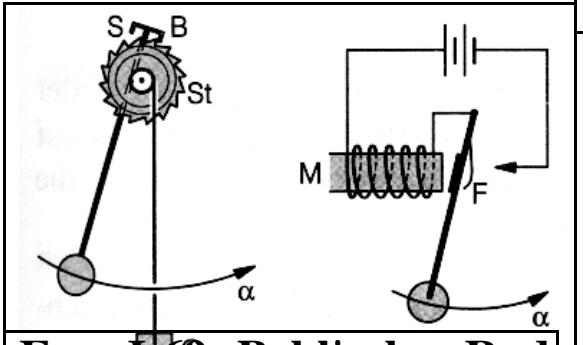
4.5 Erzwungene Schwingung

4.5.1 Bewegungsgleichung

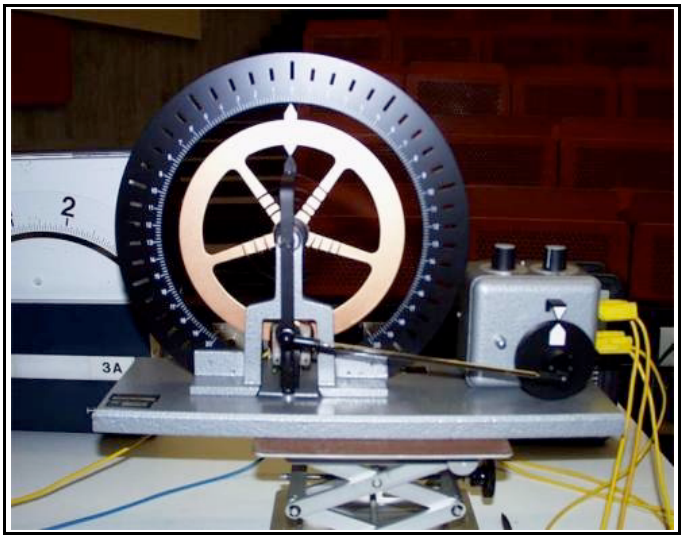
In vielen Fällen schwingt ein System nicht frei, sondern man führt ihm von außen Energie zu, indem man eine periodische Kraft am schwingenden System angreifen lässt.





Exp. I-69: Pohl'sches Rad

Typische Beispiele sind ein Uhrwerk oder eine Klingel. Im Uhrwerk stammt die Energie von einem Gewicht oder eine Feder. In einer Klingel wird eine elektromagnetische Kraft verwendet, welche durch die mechanische Bewegung ein und ausgeschaltet wird.



In diesem Beispiel wird ein Drehpendel über einen Exzenter angeregt.

Ein getriebener Oszillator, resp. eine erzwungene Schwingung wird durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben:

$$\ddot{x} + 2\,\square\,\dot{x} + \square_o^2\, x = K(t)/m\ ,$$

wobei K(t) eine äußere Kraft beschreibt, welche hier als periodisch angenommen wird.

4.5.2 Energiebillanz

Die äußere Kraft leistet am System Arbeit, so dass die Energie des Systems zu, aber auch abnehmen kann. Dies hängt davon ab ob die Kraft in Richtung der Geschwindigkeit oder in entgegengesetzter Richtung wirkt.

Wir berechnen die dem System zugeführte Leistung P = F v durch Multiplikation der obigen Gleichung mit $m\,\dot{x}$:

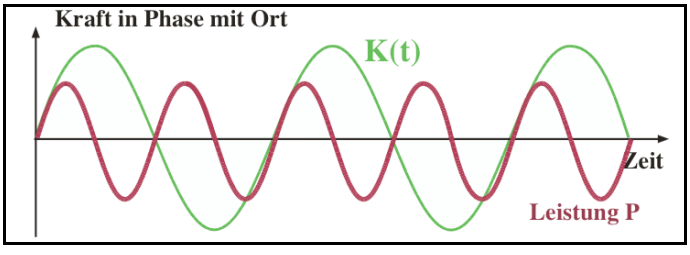
$$P = K(t)\,\dot{x} = m\,\ddot{x}\,\dot{x} + 2\,\square\, m\,\dot{x}^2 + \square_o^2\, m\, x\,\dot{x}\ .$$

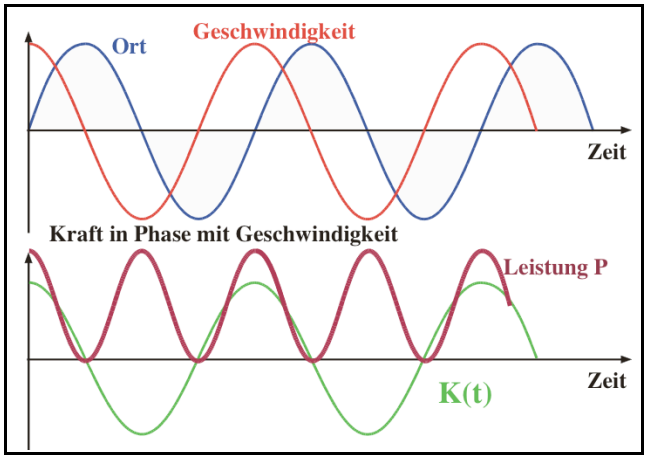
Wir verwenden $\omega_o^2 m = c$ und schreiben den ersten und dritten Term um:

$$P = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{c}{2}x^2\right) + 2\beta m \dot{x}^2 \quad .$$

Die beiden Terme in der Klammer stellen gerade die kinetische und potenzielle Energie des schwingenden Systems dar. Die extern geleistete Arbeit fließt somit zum einen in die Änderung der mechanischen (kinetischen plus potenziellen) Energie, der Rest kompensiert die Reibungsverluste, die dem System Energie entziehen.

Die zugeführte Leistung ist positiv wenn K(t) und $\dot{x}$ das gleiche Vorzeichen haben, d.h. wenn Kraft und Geschwindigkeit in Phase sind.





Ist die Kraft hingegen mit dem Ort in Phase, also gegenüber der Geschwindigkeit 90 Grad außer Phase, so wird dem System abwechselnd Energie zugeführt und wieder entzogen. Über eine Schwingung gemittelt verschwindet die zugeführte Energie.

4.5.3 Lösungsweg

Die Bewegungsgleichung ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die allgemeine Lösung eines solchen Systems wird durch zwei linear unabhängige Funktionen aufgespannt, welche zusammen zwei freie Parameter enthalten, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden. Der einfachste Weg zur allgemeinen Lösung folgt dem Rezept

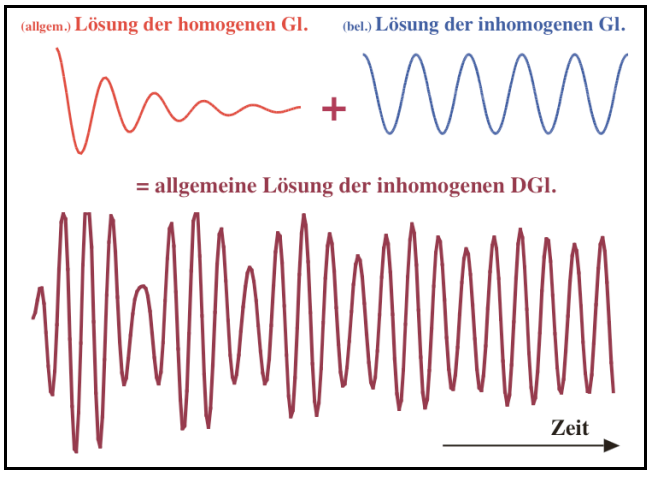
allg. Lsg. der inh. DGl. = allg. Lsg. der homog. Dgl + beliebige Lsg der inh. Dgl.

Die homogene Differentialgleichung entspricht dem freien harmonischen Oszillator, den wir bereits in Kapitel 4.4 diskutiert haben. Die entsprechende Lösung

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{i\omega_s t} + A_2 e^{-i\omega_s t}\right) = e^{-\beta t} A \cos(\omega_s t + \varphi) \; . \qquad \omega_s = (\omega_o^2 - \beta^2)^{1/2}$$

können wir übernehmen. Jetzt benötigen wir zusätzlich eine (beliebige) Lösung der inhomogenen Gleichung.

Eine relativ einfache Lösung, die auch häufig von speziellem Interesse ist, ist die stationäre Lösung, d.h. der Zustand, der sich einstellt wenn die Anfangsbedingungen nicht mehr relevant sind. Wir betrachten dafür nur eine spezielle Form der äußeren Kraft, nämlich eine harmonische Anregung. Wir verwenden hier die komplexe Schreibweise



$$K(t) = K_0\, e^{i\omega t}\,,$$

wobei die physikalische Kraft dem Realteil entspricht,

$$K_p(t) = K_0 \cos(\omega t)\,.$$

Für die Lösung machen wir den Ansatz, dass das System der äußeren Kraft mit dessen Frequenz folgt, d.h. wir setzen

$$x(t) = a(\omega)\, e^{i\omega t} = A(\omega)\, e^{i(\omega t+\varphi)}\,,$$

mit $a(\omega) = A(\omega)\, e^{i\varphi}$ als Amplitude in komplexer Schreibweise, und $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ reelle Amplitude und Phase.

4.5.4 Stationäre Lösung

Offenbar sind für diesen Ansatz die Ableitungen

$$\dot{x}(t) = i\,\omega\, a(\omega)\, e^{i\omega t} = i\,\omega\, x(t)\,, \qquad \ddot{x}(t) = -\,\omega^2\, x(t)\,.$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt

$$(-\,\omega^2 + 2\,i\,\omega\,\gamma + \omega_0^2)\, a(\omega) = K_0/m\,.$$

Auflösen nach a ergibt

$$a(\omega) = A(\omega)\, e^{i\varphi} = \frac{K_0}{m}\,\frac{1}{\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2}\,.$$

Dies ist bereits die Lösung in komplexer Schreibweise. Offenbar ist die Antwort des Systems proportional zur äußeren Anregung. Diese Proportionalität wird geschrieben als

$$a(\omega) = \frac{K_0}{m}\, Y(i\omega)\,,$$

wobei

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2\beta s + \omega_0^2}$$

die komplexe **Transferfunktion** des Systems darstellt. Sie stellt das Verhältnis zwischen einer harmonischen äußeren Kraft und der Antwort des Systems dar. Diese einfache Beziehung gilt natürlich nur weil das System linear ist.

4.5.5 Real und Imaginärteil

Die physikalische Auslenkung entspricht dem Realteil der komplexen Funktion

$$x_p(t) = \mathrm{Re}\{a(\omega)\, e^{i\omega t}\} = \mathrm{Re}\{a(\omega)\}\cos(\omega t) - \mathrm{Im}\{a(\omega)\}\sin(\omega t)\ .$$

Somit beschreibt der Realteil von $a(\omega)$ die In-Phase Komponente der Auslenkung, der Imaginärteil den Außer-Phase Teil.

Wir können Real und Imaginärteil erhalten indem wir mit dem konjugiert-komplexen des Nenners erweitern:

$$a(\omega) = \frac{K_0}{m}\,(-\omega^2 - 2\,i\,\beta\,\omega + \omega_o^2)/[(-\omega^2 + 2\,i\,\beta\,\omega + \omega_o^2)\,(-\omega^2 - 2\,i\,\beta\,\omega + \omega_o^2)]$$

$$= \frac{K_0}{m}\,(\omega_o^2 - \omega^2 - 2\,i\,\beta\,\omega)/[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\,\beta^2\omega^2]\ .$$

Somit sind

$$\mathrm{Re}[a(\omega)] = \frac{K_0}{m}\,(\omega_o^2 - \omega^2)/[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\,\beta^2\omega^2]\ .$$

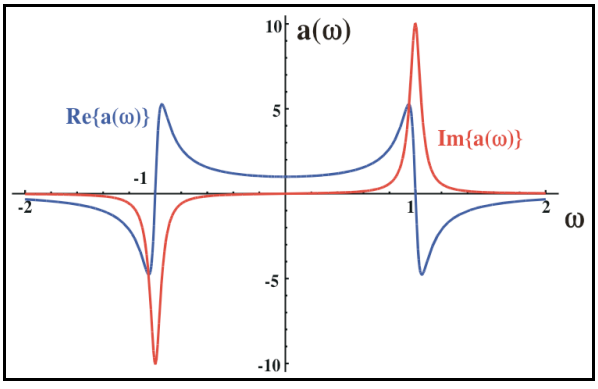
$$\mathrm{Im}[a(\omega)] = -\frac{K_0}{m}\,2\,\beta\,\omega\,/[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\,\beta^2\omega^2]\ .$$

Offenbar ist dies im Wesentlichen eine Funktion der Frequenz ω, d.h. der Frequenz mit der die äußere Kraft oszilliert.

Mit

$$\omega_o^2 - \omega^2 = (\omega_o + \omega)\,(\omega_o - \omega)$$

findet man zwei Maxima bei $\omega = \pm \omega_0$.

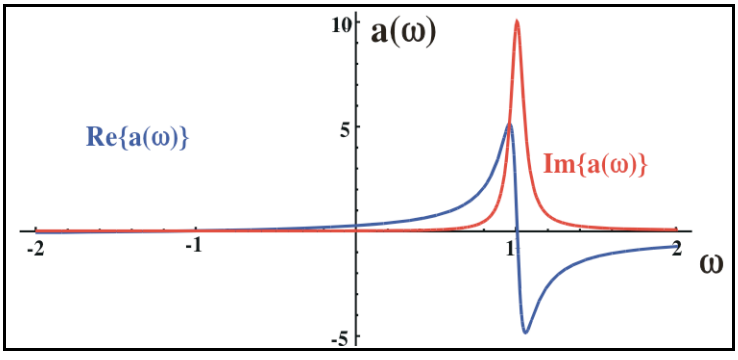


Ein interessanter Grenzfall ist derjenige für kleine Frequenzen: Wenn die Frequenz der äußeren Anregung gegen Null geht, $\omega \to 0$, verschwindet offenbar der Imaginärteil, während

$$\mathrm{Re}[a(0)] = \frac{K_0}{m}\,\omega_o^2/((\omega_o^2)^2 = K_0/(m\,\omega_o^2) = K_0/c\,.$$

Die Auslenkung ist somit gerade durch die Federkonstante c gegeben, in Übereinstimmung mit dem Hooke'schen Gesetz und unserer Erwartung für den Fall einer zeitunabhängigen äußeren Kraft.

In vielen Fällen interessiert man sich in erster Linie für das Verhalten in der Nähe der Resonanzen. Sind diese gut isoliert, d.h. ist die Dämpfung nicht zu groß, so kann man sie getrennt diskutieren. Mathematisch erreicht man das, indem man $\omega \sim \omega_0$ setzt. Dadurch vereinfacht sich der Ausdruck im Nenner zu:



$$(\omega_o^2 - \omega^2)^2 = (\omega_o + \omega)^2\,(\omega_o - \omega)^2 \sim 4\omega_o^2\,(\omega_o - \omega)^2\,.$$

Wie die linke Figur zeigt betrachtet man dann nur noch den Beitrag der Resonanz bei positiven Frequenzen. Positive und negative Frequenzen können z.B. Rotationen in unterschiedliche Richtungen beschreiben. In der Figur sind Realteil und Imaginärteil der komplexen Amplitude als Funktion der Frequenz ω dargestellt für $K_0/m = 1$, $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.05$. Wesentlich ist, dass es sich um ein resonantes Verhalten handelt: Der Realteil, also der in-Phase Teil wächst zunächst mit zunehmender Frequenz, bis er bei $\omega_0 - \gamma$ ein Maximum erreicht. Mit weiter zunehmender Frequenz nimmt er wieder ab und geht auf der Resonanzfrequenz ω_0 durch 0. Hier erreicht jedoch der Imaginärteil sein Maximum. Die Breite der Resonanzlinie ist gegeben durch die Dämpfungskonstante γ.

4.5.6 Resonante Anregung

Ein weiterer wichtiger Spezialfall ist derjenige für $\omega = \omega_0$:

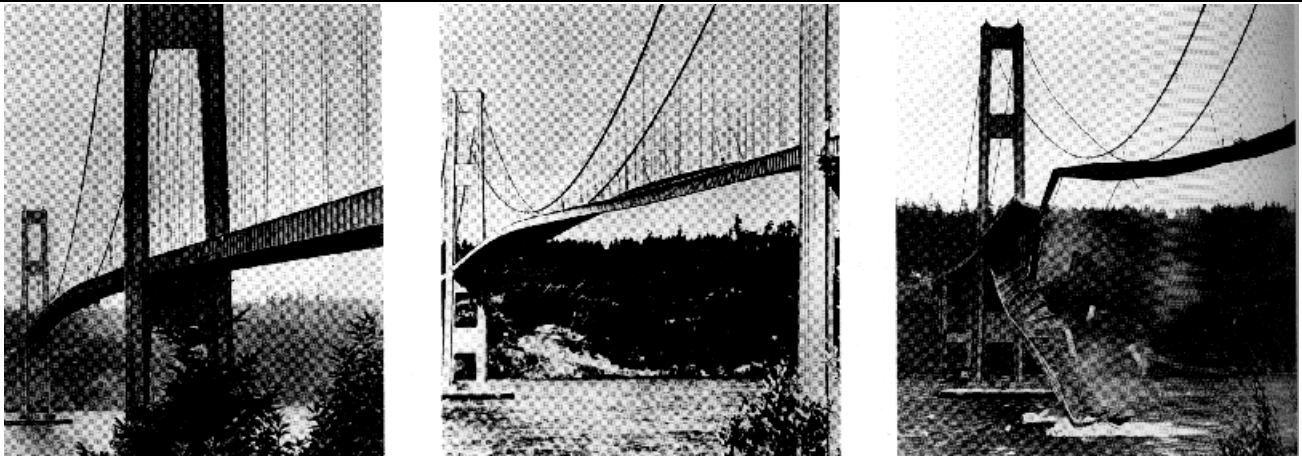
$$\mathrm{Re}[a(\omega_0)] = 0\,.$$

$$\mathrm{Im}[a(\omega_0)] = -\frac{K_0}{m}\,\frac{2\omega_0\gamma}{4\omega_0^2\gamma^2} = -\frac{K_0}{m}\,\frac{1}{2\omega_0\gamma} = -\frac{K_0}{c}\,\frac{\omega_0}{2\gamma}\,.$$

Der Realteil verschwindet also bei der Resonanzfrequenz, während der Imaginärteil sein Maximum erreicht. Das Maximum ist proportional zum Verhältnis der äußeren Kraft zur Kraftkonstante des Systems, und zum Verhältnis der Resonanzfrequenz zur Dämpfung. Dieses Verhältnis wird auch als Gütefaktor des Systems bezeichnet. Bei mechanischen Systemen ist es typischerweise in der Größenordnung von einigen 10 bis einigen 100. In atomaren Systemen kann diese Kreisgüte jedoch bis auf mehr als 10^{15} anwachsen. Entsprechend ist die Resonanzüberhöhung dort extrem groß.

Exp 95, 95a, 96: Getriebene Schwingung

Das Verhalten kann mit diesem Experiment schön gezeigt werden. Das Pendel wird mit einem Motor mit variabler Frequenz angetrieben. Bei kleinen Geschwindigkeiten schwingt das Pendel in Phase mit der äußeren Kraft; die Amplitude bleibt klein. Wenn wir die Geschwindigkeit des Motors, d.h. die Drehzahl, resp. Frequenz, erhöhen, gelangen wir in die Nähe der Resonanzfrequenz, wo die Auslenkung des Pendels sehr groß wird.



Video: Tacoma Narrows Bridge Collapse

Die Amplitude einer Schwingung kann sehr groß werden und zur Zerstörung des Objektes führen.

4.5.7 Absolutbetrag und Phase

Wir können daraus auch Absolutbetrag und Phase erhalten, z.B. als

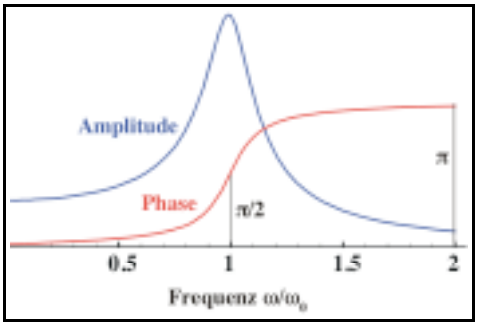
$$A(\omega) = (\mathrm{Re}[a(\omega)]^2 + \mathrm{Im}[a(\omega)]^2)^{1/2} = \frac{K_0}{m}\, 1/((\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\,\omega^2\gamma^2)^{1/2} .$$

und

$$\tan(\varphi) = -\,\mathrm{Im}[a(\omega)] / \mathrm{Re}[a(\omega)] = -\,2\,\omega\gamma\,/\,(\omega^2 - \omega_o^2) \quad .$$

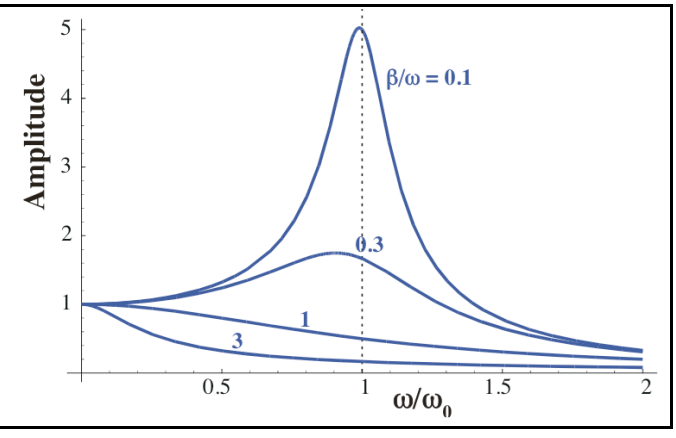
Offenbar erreicht der Absolutbetrag sein Maximum für $\omega = (\omega_0^2 - 2\,\gamma^2)^{1/2}$.

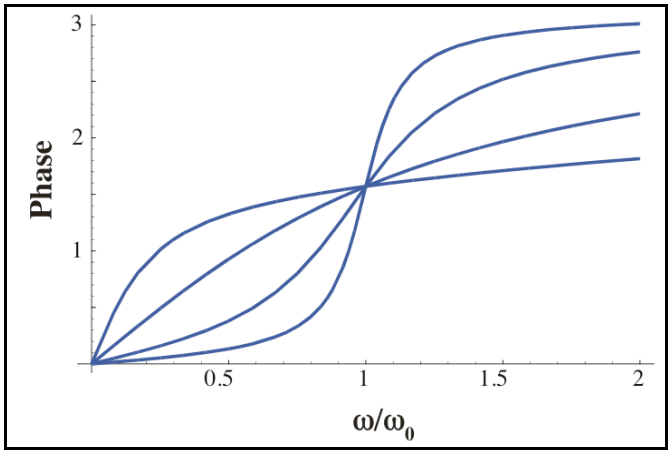
Die Figur zeigt Amplitude und Phase für die gleichen Parameter wie oben. Die Amplitude erhält offenbar eine starke Überhöhung in der Nähe der Resonanzfrequenz $\omega = \omega_0$. Für kleinere Frequenzen ist die Phase 0, d.h. das System schwingt in Phase mit der äußeren Anregung. Auf der Resonanz beträgt die Phase π/2, und für größere Frequenzen hinkt das System um 180 Grad hinter der Anregung her.



Exp.: RLC Kreis stationär

Wir können dieses Verhalten im Experiment anhand eines gedämpften elektronischen Schwingkreises beobachten.





Bei geringer Dämpfung ist die Resonanzlinie sehr schmal. Die Amplitude ist hoch, die Phase wechselt rasch. Mit zunehmender Dämpfung wird das Maximum niedriger und breiter, ebenso der Phasenwechsel. Die Resonanzfrequenz, also die Frequenz, bei der die Amplitude maximal wird, sinkt mit zunehmender Dämpfung.

Bei geringer Dämpfung fällt das Maximum der Amplitude mit der Phasenverschiebung um π/2 zusammen. Dies ist leicht einsichtig wenn wir die am System geleistete Arbeit betrachten: Diese ist allgemein gegeben als $K(t)\,\dot{x}(t)$. Wenn die Phase bei π/2 liegt, so ist die Auslenkung

$$x(t) = A(\omega)\, e^{i(\omega t + \varphi)} = -\, A(\omega)\, i\, e^{i\omega t}$$

gegenüber der Kraft

$$K(t) = K_0\, e^{i\omega t}$$

gerade um 90 Grad außer Phase. Die Geschwindigkeit

$$\dot{x}(t) = -\, i\, i\, A(\omega)\, \omega\, e^{i\omega t} = A(\omega)\, \omega\, e^{i\omega t}$$

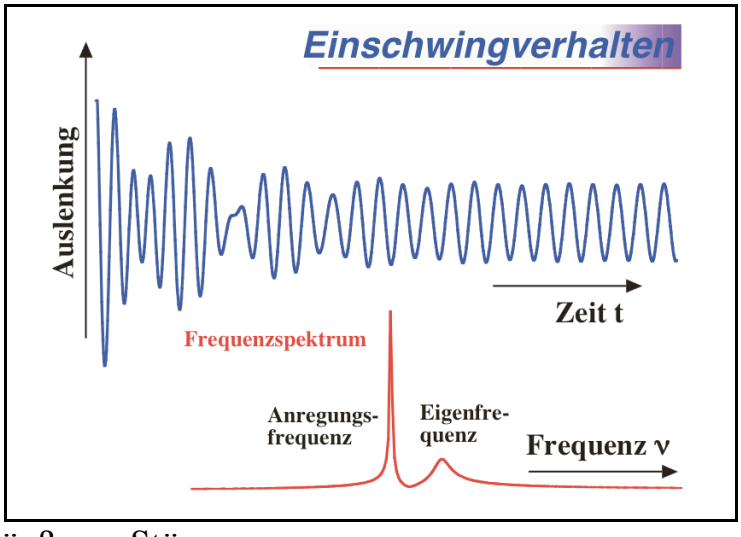
ist gerade in Phase mit der äußeren Kraft, so dass die am System geleistete Arbeit maximal wird. Das System erreicht dann einen stationären Zustand, wenn die hinein fließende Arbeit gerade gleich der heraus fließenden ist. Diese ist durch die Dämpfung gegeben, so dass die Amplitude auf der Resonanz

$$A(\omega_0) = \frac{K_0}{m} \frac{1}{2\omega_0\gamma}$$

und damit indirekt proportional zur Dämpfungskonstante γ wird. Dies entspricht dem Resultat das wir für den außer Phase Teil erhalten hatten.

4.5.8 Einschwingvorgang

Nachdem wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (der freie gedämpfte harmonische Oszillator) und eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (die stationäre Lösung) diskutiert haben, können wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung als Summe der beiden diskutieren. Der freie gedämpfte Oszillator führt eine Schwingung mit der Resonanzfrequenz durch, welche exponentiell gedämpft ist. Die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist die stationäre Lösung, d.h. eine Schwingung mit konstanter Amplitude und der Frequenz der äußeren Störung.



Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung entspricht somit einer Superposition dieser beiden Lösungen. Für lange Zeiten sollte das System sich dem stationären Zustand nähern. Für kurze Zeiten wird sich das System ähnlich wie der freie Oszillator bewegen. In diesem Bereich erwartet man eine Überlagerung der freien Schwingung mit der getriebenen, und damit eine Schwebung.

Exp: Getriebene Schwingung mit schwacher Dämpfung

Dieses Verhalten kann gut beobachtet werden, wenn wir bei der getriebenen Schwingung die Dämpfung gering halten. Der Einschwingvorgang, der bei der Frequenz des freien Oszillators liegt, überlagert sich der Schwingung, mit der das System der externen Anregung folgt.