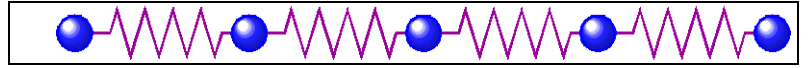


5.2. Mechanische Wellen

5.2.1. Lineare Kette

Bereits im Kapitel Schwingungen hatten wir ein Modell diskutiert, in dem Massen durch Federn verbunden sind. Für eine Auslenkung der i -ten Masse entlang der Kette hatten wir die Bewegungsgleichung



$$m \ddot{y}_s = -c (2 y_s - y_{s-1} - y_{s+1}) .$$

Die rechte Seite ist eine diskrete Variante der zweiten Ableitung nach der Raumkoordinate; dies ist somit eine Verallgemeinerung der Wellengleichung und wir erwarten, dass sich in diesem System eine harmonische Welle ausbreiten kann.

Diese müsste in komplexer Schreibweise die Form

$$y(x,t) = y_0 \exp(i(\omega t - kx))$$

aufweisen. Da es sich um ein diskretes System handelt ersetzen wir die Ortskoordinate x durch

$$x = s a ,$$

wobei a den Abstand zwischen benachbarten Massen im Gleichgewicht bezeichnet. Dann wird

$$y_s(t) = y_0 \exp(i(\omega t - ksa)) .$$

Die zweite Ableitung ist

$$\ddot{y}_s = -\omega^2 y_s .$$

Zur Auswertung der rechten Seite verwenden wir

$$\exp(i(\omega t - k(s+1)a)) = \exp(i(\omega t - ksa)) \exp(-ika) .$$

Damit lässt sich die Differenz zur Summe der Auslenkungen der Nachbarn schreiben als

$$2 y_s - y_{s-1} - y_{s+1} = y_0 \exp(i(\omega t - ksa)) (2 - \exp(ika) - \exp(-ika)) = 2 y_s (1 - \cos(ka)) .$$

Die Bewegungsgleichung ergibt somit

$$\ddot{y}_s = -\omega^2 y_s = y_s \frac{2c}{m} (1 - \cos(ka)).$$

Somit ist (wie bereits bei den Schwingungen diskutiert) der gemachte Wellenansatz eine Lösung der Bewegungsgleichung wenn

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{c}{m}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|.$$

Für kleine Wellenzahlen, d.h. große Wellenlängen wird die Frequenz proportional zur Wellenzahl

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} k a.$$

Die Phasengeschwindigkeit ist somit

$$v_p = \omega/k = \sqrt{\frac{c}{m}} a.$$

Offenbar wächst die Phasengeschwindigkeit mit der Steifigkeit der Federn und sinkt mit der Größe der Massen.

Video: Einfluss Masse / Federkonstante

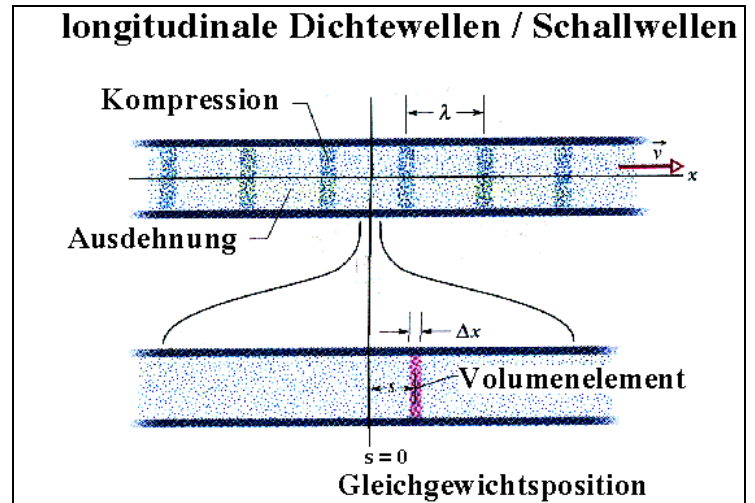
5.2.2. Druckwellen

Eine wichtige Klasse von Wellen sind Druckwellen. Die Auslenkung ist in diesem Fall eine lokale Druckänderung. Für die Herleitung der Wellengleichung betrachten wir die Kraft auf ein Volumenelement $dV = A dx$, wobei A die Querschnittsfläche des Rohrs darstellt. Das Wegelement dx soll klein im Vergleich zur Wellenlänge sein. Die Kraft kann als Differenz der Normalkräfte auf beiden Seiten berechnet werden:

$$F = A [p(x) - p(x+dx)] = -A \frac{dp}{dx} dx.$$

Die Druckänderung ist über das Kompressionsmodul K an eine Volumenänderung gekoppelt:

$$dp = -K dV/V.$$



Wir stellen die Auslenkung als eine Verschiebung ds einer (imaginären) Trennwand zwischen benachbarten Volumenelementen dar. Damit kann die Volumenänderung dargestellt werden als Unterschied in der Verschiebung

$$dV = A (s(x+dx) - s(x)) = A \frac{ds}{dx} dx .$$

Die Druckänderung ist damit

$$dp = - K \frac{ds}{dx} .$$

Damit erhalten wir eine Bewegungsgleichung für die Auslenkung s des Massenelementes ρdV :

$$\rho A dx \frac{d^2s}{dt^2} = - A \frac{dp}{dx} dx = A K \frac{d^2s}{dx^2} dx .$$

Division mit $\rho A dx$ ergibt die Wellengleichung

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{K}{\rho} \frac{d^2s}{dx^2} .$$

Die Schallgeschwindigkeit, d.h. die Geschwindigkeit einer Schallwelle beträgt somit

$$v_S = \sqrt{\frac{K}{\rho}} .$$

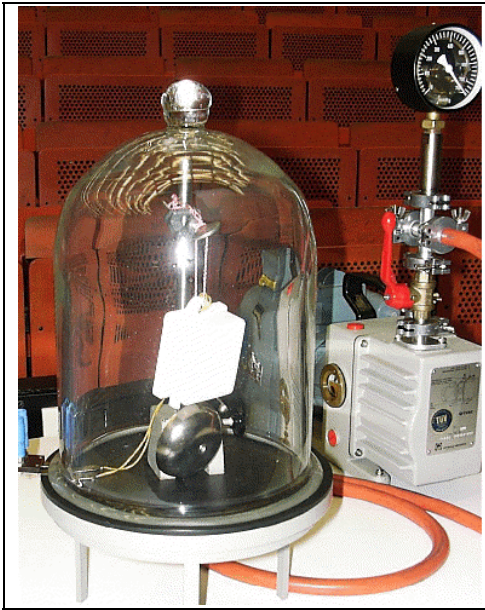
Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen hängt stark vom Material ab. Ein hohes Kompressionsmodul (d.h. niedrige Kompressibilität) erhöht die Schallgeschwindigkeit, da eine Störung sich stark auf ein benachbartes Volumenelement auswirkt. Eine geringe Dichte erhöht ebenfalls die Schallgeschwindigkeit, das die Volumenelemente rascher beschleunigt werden.

Dies kann man z.B. beim Vergleich unterschiedlicher Gase sehen: Je leichter das Molekulargewicht, desto größer die Schallgeschwindigkeit. Multipliziert man die Schallgeschwindigkeit mit der Wurzel aus der Molekülmasse für das entsprechende Gas so erhält man eine Zahl, die für alle drei Gase in der Größenordnung von 1800 liegt.

Medium	v_S / m/s	$v_S \sqrt{m}$
Luft	331	1782
Helium	972	1944
H ₂	1286	1813

Exp. 15: Klingel im Vakuum

Dass Schall wirklich als Druckwelle in Luft übertragen wird sieht



5.2.3. Druckwellen in Festkörpern

Die Behandlung von Druckwellen in Flüssigkeiten und Festkörpern läuft analog. Der wesentliche Unterschied ist, dass hier die Beziehung zwischen Volumenänderung und Normalspannung über der Elastizitätsmodul E definiert ist:

$$\sigma = - E \, ds/dx .$$

Damit wird die Wellengleichung

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{E}{\rho} \frac{d^2 s}{dx^2}$$

und die Schallgeschwindigkeit

$$v_s = \sqrt{\frac{E}{\rho}} .$$

Ein wesentlicher Unterschied ist hingegen, dass in Festkörpern im Gegensatz zu Flüssigkeiten und Gasen auch eine Scherspannung existieren kann. Damit wirkt auch bei einer lateralen Auslenkung eines Volumenelements eine rücktreibende Kraft und eine Kopplung an das benachbarte Volumenelement. Die Phasengeschwindigkeit ist in diesem Fall gegeben durch das Verhältnis von Schubmodul G zu Dichte,

Z: Scherspannung

$$v_p = \sqrt{\frac{G}{\rho}} .$$

Die Phasengeschwindigkeit in einem Material ist um so höher je starrer das Material und je geringer die Dichte sind.

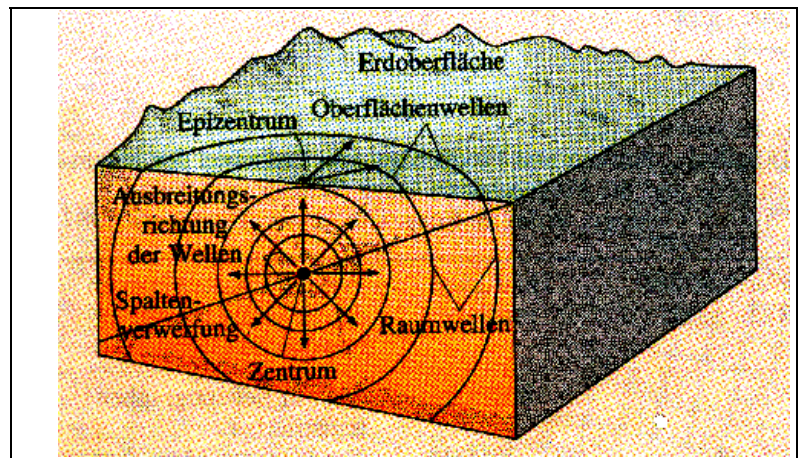
Experimentelle Daten sind mit dieser allgemeinen Vorstellung in guter Übereinstimmung.

	Dichte ρ in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Schallgeschwindigkeit c in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
Luft – 20 °C trocken	1,396	319
Luft 0 °C trocken	1,293	331
Luft 20 °C trocken	1,21	344
Luft 100 °C trocken	0,947	387
Wasserstoff 0 °C	0,090	1260
Wasserdampf 130 °C	0,54	450
Wasser 0 °C	1000	1400
20 °C	998	1480
Glyzerin	1260	1950
Eis	920	3200
Holz	600	4500
Glas	2500	5300
Beton	2100	4000
Stahl	7700	5050

Video: Schallgeschwindigkeit in Festkörpern

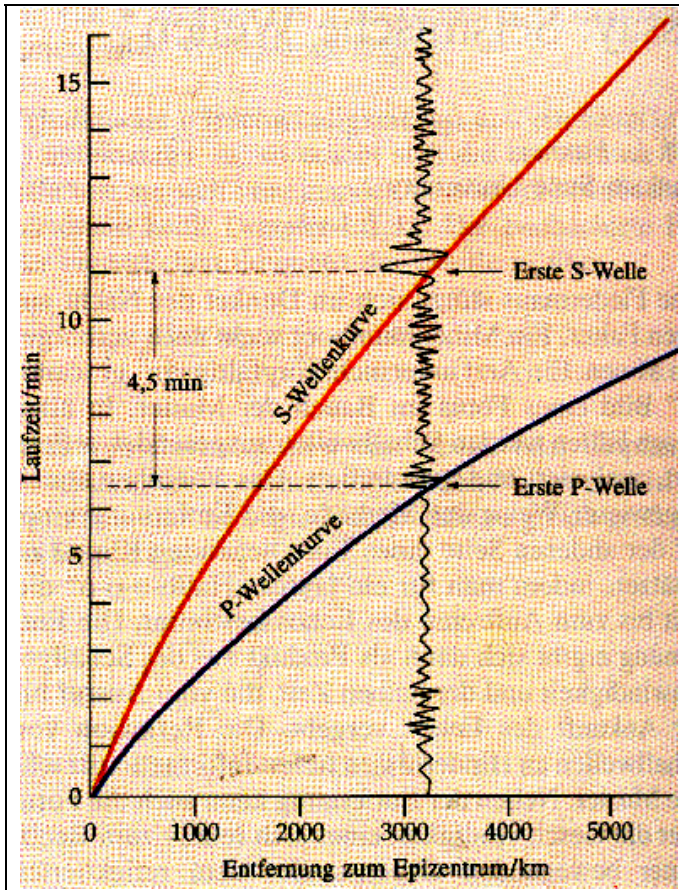
5.2.4. Seismische Wellen

Sowohl longitudinale Druck- als auch transversale Scherwellen spielen bei Erdbeben eine Rolle. Die sogenannten P- (Primär-) und S- (Sekundär-) Wellen breiten sich im Volumen aus. P-Wellen sind Longitudinalwellen (wie Schallwellen), S-Wellen sind Scherwellen. Love-Wellen sind Torsionswellen, welche sich an der Oberfläche ausbreiten. Rayleigh-Wellen sind ebenfalls Oberflächenwellen, sie gleichen aber Meereswellen.



Da der Elastizitätsmodul immer größer ist als das Schermodul erwarten wir für longitudinale Druckwellen eine höhere Ausbreitungsgeschwindigkeit als für transversale Scherwellen.

Elastische Konstanten		
Werkstoff	Elastizitäts-Modul E in GN/m^2	Schub-Modul G in GN/m^2
Eis	9,9	3,7
Blei	17	5,5 bis 7,5
Al (rein)	72	27
Glas	76	33
Gold	81	28
Messing (kaltverf.)	100	36
Kupfer (kaltverf.)	126	47
V2A-Stahl	195	80



Dies stimmt mit Messungen überein: Die Primärwellen, welche als erste bei einer Messstation eintreffen, sind Druckwellen, während die später eintreffenden Sekundärwellen Scherwellen sind.

Die Zerstörungskraft von S-Wellen

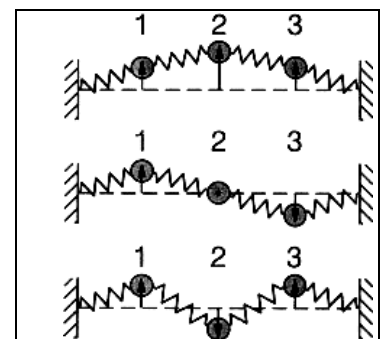
Video: Kobe '95

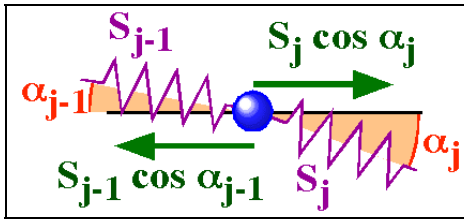
ist größer als die von P-Wellen. Sie können deshalb als (kurzzeitige) Vorwarnung verstanden werden. In diesem Video "spüren" offenbar die beiden Männer das Eintreffen des Erd-

bebens voraus.

5.2.5. Transversalwellen in einer Massenkette

Wir betrachten nochmals die transversale Auslenkung von Massenpunkte, welche durch Federn verbunden sind. Wir nehmen an, dass die beiden transversalen Koordinaten voneinander und von der longitudinalen Koordinate unabhängig sind, d.h. wir nehmen an dass die Abstände in x-Richtung konstant sind, so dass die potenzielle und kinetische Energie nur durch die y-Verschiebung zustande kommen.





Unter dieser Voraussetzung muss die x-Komponente der Kraft im Gleichgewicht sein, d.h. die Kräfte auf benachbarte Segmente stehen im Verhältnis

$$S_{j-1} \cos \alpha_{j-1} = S_j \cos \alpha_j ,$$

wobei S_j die Federkraft in der Feder j darstellt. Wir beschränken uns hier auf kleine Auslenkungen, d.h. $\alpha \ll 1$, so dass

$$\cos \alpha_{j-1} \approx \cos \alpha_j \approx 1 ,$$

und damit

$$S_{j-1} = S_j = S ,$$

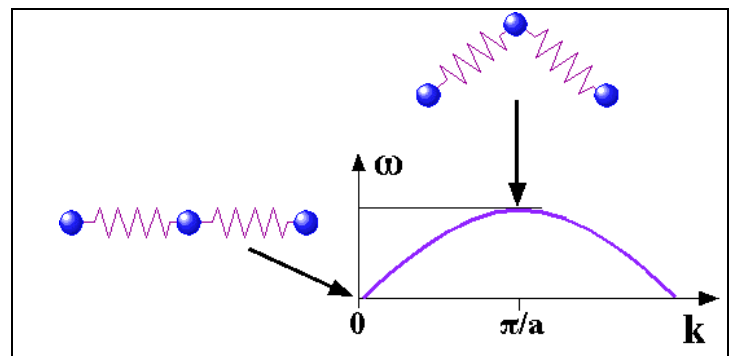
d.h. alle Kräfte sind nach Betrag gleich.

Die transversale Kraft ist

$$F_j = - S \sin \alpha_{j-1} + S \sin \alpha_j \approx - S(y_j - y_{j-1})/a + S(y_{j+1} - y_j)/a = S/a (y_{j+1} - 2 y_j + y_{j-1}) ,$$

wobei y_j die Auslenkung der j 'ten Masse beschreibt. Diese Bewegungsgleichung hat die gleiche Form wie bei den longitudinalen Wellen; lediglich die Kraftkonstante ist nicht mehr die Federkonstante selber. Somit sollte eine Transversalwelle die gleiche Form haben wie eine Longitudinalwelle.

Dies beinhaltet auch die gleiche Dispersionsrelation, d.h. die maximale Frequenz wird erreicht wenn die Wellenlänge dem doppelten Abstand entspricht. Die Proportionalitätskonstante zwischen der zweiten Ableitung der Auslenkung und der Kraft ist jedoch nicht die Federkonstante selber, sondern der Quotient aus Federkraft und Abstand. Damit wird die Phasengeschwindigkeit einer Transversalwelle abhängig von der Spannung der Kette. Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass für entspannte Federn die longitudinal- und die transversale Auslenkung unabhängig sind.



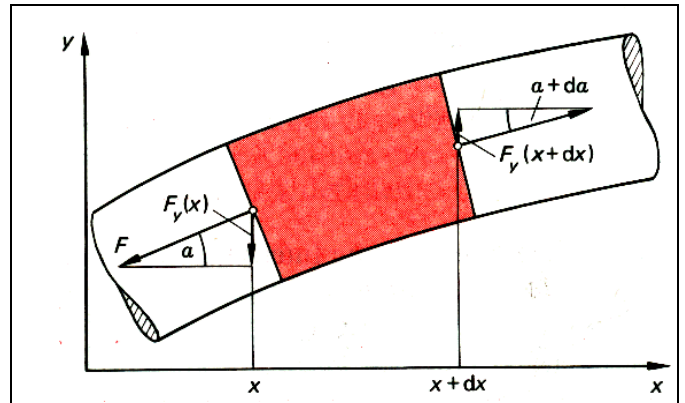
5.2.6. Seilwellen

Wenn wir den kontinuierlichen Grenzfall $a \rightarrow 0$ betrachten, erhalten wir eine Saite oder ein Seil.

Eine seitliche Auslenkung eines Seils oder einer Feder wird als Transversalwelle übertragen.

Exp. 9a Seilwellen

Für die Beschreibung von Seilwellen betrachten ein Volumenelement zwischen den Positionen x und $x + dx$, wobei x die Koordinate entlang der Saite beschreibt, $y(x)$ die Auslenkung. An beiden Endflächen greifen Kräfte an, welche senkrecht auf die Endflächen wirken und damit in Richtung



$$\alpha(x) = \tan^{-1}(dy/dx) \sim dy/dx .$$

Die Näherung ist gültig für kleine Auslenkungen, wo

$$\sin\alpha \sim \tan\alpha \sim \alpha$$

Der Betrag der beiden Kräfte ist gegeben durch die Saitenspannung und damit gleich,

$$|F(x)| = |F(x+dx)| = F .$$

Die y-Komponenten der beiden Kräfte addieren sich zu

$$dF_y = F_y(x) + F_y(x+dx) = F [\sin\alpha(x+dx) - \sin\alpha(x)] .$$

und damit

$$dF_y = F \frac{d \sin \alpha}{dx} dx \sim F \frac{d^2 y}{dx^2} dx .$$

Diese resultierende Kraft wirkt als Rückstellkraft auf das Massenelement $dm = \rho A dx$, wobei ρ die Dichte und A den Querschnitt der Saite darstellen. Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$dm a = \rho A dx \frac{d^2 y}{dt^2} = F \frac{d^2 y}{dx^2} dx$$

oder

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{F}{\rho A} \frac{d^2 y}{dx^2} .$$

Dies ist die Differentialgleichung, welche die Ausbreitung der Welle auf einer gespannten Saite beschreibt.

Die Phasengeschwindigkeit beträgt somit

$$v_P = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} ,$$

d.h. sie ist proportional zum Verhältnis von Spannung des Seils zur Massendichte ρA pro Längeneinheit. Dicke, schwach gespannte Seile oder Saiten ergeben somit niedrige Frequenzen, leichte, stark gespannte eine hohe Frequenz. Die Abhängigkeit von der Spannung der Saite kann wieder leicht verstanden werden da ohne Spannung keine rücktreibende Kraft existiert. Die Abhängigkeit von der Massendichte (pro Länge) ist die gleiche wie bei allen Arten von Materiewellen, die wir bisher diskutiert hatten.

5.2.7. Übersicht Phasengeschwindigkeiten

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer harmonischen Welle wird bestimmt durch die Wellengleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = v_P^2 \frac{d^2 y}{dx^2} .$$

Die Phasengeschwindigkeit beträgt für

Druckwellen in Gasen, Flüssigkeiten: $v_P = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$. K: Kompressionsmodul; ρ : Dichte

Longitudinalwellen in Festkörpern: $v_P = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. E: Elastizitätsmodul

Torsionswellen in dünnen Rundstäben: $v_P = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$. G: Schubmodul

Seilwellen: $v_P = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$.

Elektromagnetische Wellen im Vakuum: $v_P = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.

Elektromagnetische Wellen in Materie: $v_P = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r}}$.

5.2.8. Der Dopplereffekt

Bewegen sich Quelle oder Beobachter relativ zum Medium, so unterscheiden sich die ausgestrahlten und die gemessenen Frequenzen. Diesen Effekt bezeichnet man als Dopplerverschiebung.

Der Effekt kann bei einem vorbeifahrenden Zug (vor allem einem pfeifenden) beobachtet werden. Man kann ihn aber auch mit einem bewegten Lautsprecher hörbar machen. Mit Radarwellen wird er zur Geschwindigkeitsmessungen verwendet.

Exp.: I / 71: Dopplereffekt, akustisch

Für die Herleitung betrachten wir zunächst die Periode, die ein ruhender Beobachter misst, wenn eine Welle der Wellenlänge λ und Phasengeschwindigkeit v_P bei ihm eintrifft

$$T = \lambda / v_P .$$

Für einen Beobachter, der sich auf die Quelle zu bewegt, beträgt die Geschwindigkeit der Welle für ihn scheinbar $v_P + v_B$. Damit wird die Periode verkürzt auf

$$T_B = \lambda / (v_P + v_B)$$

oder

$$v_B = 1/T_B = (v_P + v_B) / \lambda .$$

v_B stellt hier die Geschwindigkeitskomponente des Beobachters in Richtung auf die Quelle dar; tangentielle Komponenten zählen nicht. Die Wellenlänge wird bestimmt durch die Frequenz, mit der die Wellen erzeugt werden, und die Phasengeschwindigkeit v_P :

$$\lambda = v_P T_Q = v_P / v_Q .$$

Damit ist

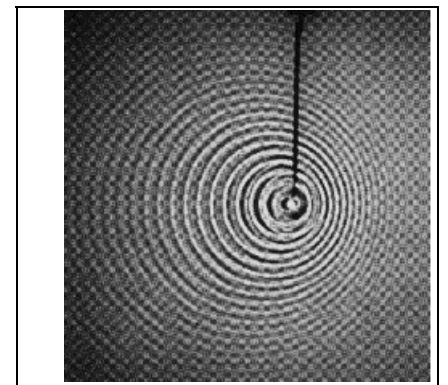
$$v_B = 1/T_B = v_Q (v_P + v_B) / v_P .$$

Offenbar ist die Frequenz, die der Beobachter misst, gegenüber der ausgestrahlten Frequenz höher um das Verhältnis der Geschwindigkeit des Beobachters gegenüber der Schallgeschwindigkeit:

$$v_B = v_Q \left(1 \pm \frac{v_B}{v_P} \right).$$

Das + Zeichen bezieht sich auf den Fall wo der Beobachter sich in Richtung auf die Quelle bewegt, das – Zeichen auf den entgegengesetzten Fall.

Bewegt sich statt dem Beobachter die Quelle, so wird in Bewegungsrichtung der Abstand zwischen den Wellenflächen kleiner, auf der anderen Seite größer. Die einzelnen Kreiswellen markieren wie weit sich die Welle in den letzten n Perioden T_Q ausgebreitet haben. Wir nehmen an, dass ein ruhender Beobachter sich in Bewegungsrichtung (rechts im Bild) befindet. Die Wellenlänge, die er sieht, verringert sich um $v_Q T_Q$:



$$\lambda = \lambda_0 - v_Q T_Q.$$

Mit $\lambda_0 = v_P / v_Q$ wird

$$v_B = v_P / \lambda = v_P / (\lambda_0 - v_Q T_Q) = v_P / (v_P / v_Q - v_Q / v_Q) = \frac{v_Q}{1 - \frac{v_Q}{v_P}}.$$

Für den Fall, dass die Quelle sich vom Beobachter entfernt muss das - Zeichen durch ein + ersetzt werden. Offenbar unterscheiden sich somit die beiden Fälle wo sich Beobachter, resp. Quelle bewegen. Der Unterschied ist allerdings gering so lange die Geschwindigkeit klein ist im Vergleich zur Phasengeschwindigkeit im betreffenden Medium. Bewegen sich beide, so kann man die beiden Ausdrücke kombinieren:

$$v_B = v_Q \frac{1 + \frac{v_B}{v_P}}{1 - \frac{v_Q}{v_P}} = v_Q \frac{v_P + v_B}{v_P + v_Q}.$$

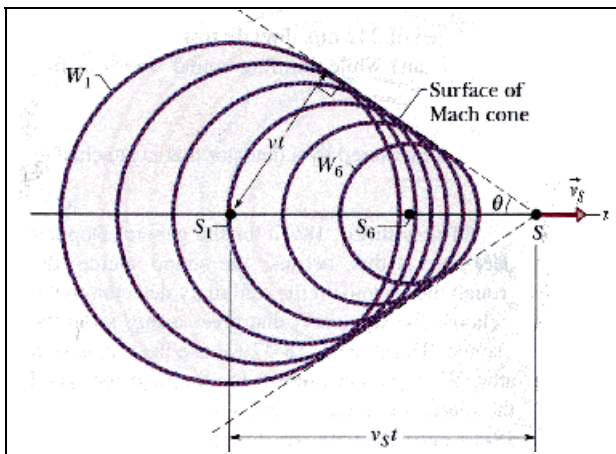
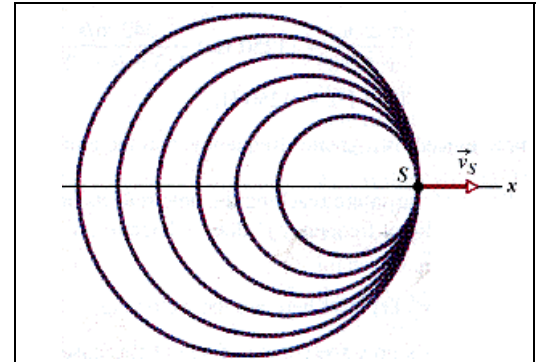
5.2.9. Überschallgeschwindigkeit

Die Wellenlänge der ausgestrahlten Welle

$$\lambda = \lambda_0 - v_Q T_Q = v_P T_Q - v_Q T_Q = (v_P - v_Q) T_Q$$

kann offenbar auch Null werden wenn die Geschwindigkeit der Quelle gleich der Phasengeschwindigkeit der Welle wird.

Dies entspricht dem Fall dass die Quelle sich mit der emittierten Welle mitbewegt. Für den Fall einer Schallwelle entspricht dies einer Bewegung der Quelle mit Schallgeschwindigkeit.



Bewegt sich die Quelle schneller als mit Schallgeschwindigkeit, so bilden die Wellen einen Kegel, der als Mach'scher Kegel bezeichnet wird. Wir können dessen Öffnungswinkel berechnen indem wir berücksichtigen, dass alle Kugelwellen den Kegel berühren. Befindet sich die Quelle zu $t=0$ bei A und zur Zeit t bei B, hat sie die Strecke $AQ = t v_Q$ zurückgelegt, während die Schallwelle die Strecke $AB = v_P t$ zurückgelegt hat. Somit ist der

halbe Öffnungswinkel α gegeben als

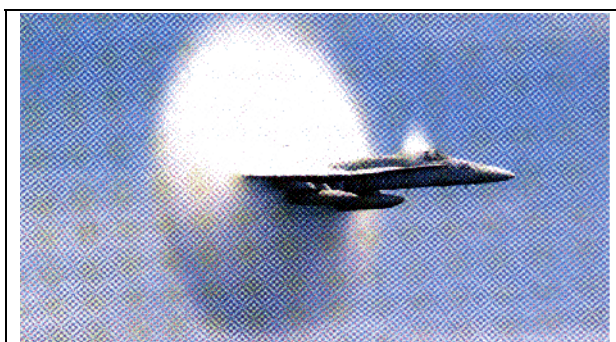
$$\sin^{-1} \alpha = v_P t / (v_Q t) = \frac{v_P}{v_Q} = \frac{1}{Ma} .$$

Die Zahl Ma, das Verhältnis der Geschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit, wird als Mach'sche Zahl bezeichnet.

Dies kann man z.B. in der Wellenwanne sichtbar machen.

Albert: Überschallflugzeug

Dies ist vor allem für Flugzeuge bekannt.



Hier werden sie vor allem hörbar, z.T. aber auch sichtbar. In diesem Beispiel kann man den Mach'schen Kegel sehen, da die Druckänderung zu einer Kondensation von Wasserdampf führt.

