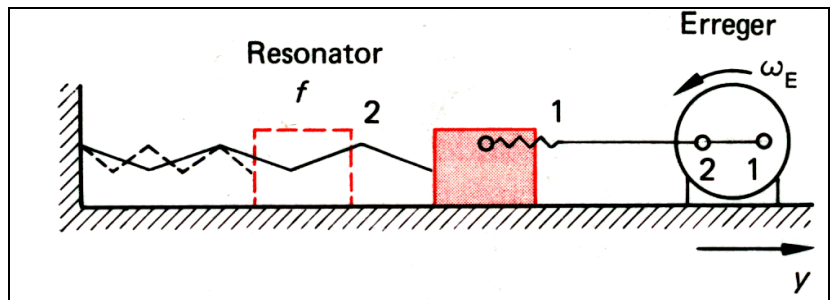


## 4.5. Erzwungene Schwingung

### 4.5.1. Bewegungsgleichung

In vielen Fällen schwingt ein System nicht frei, sondern man führt ihm von außen Energie zu, indem man eine periodische Kraft am schwingenden System angreifen läßt.



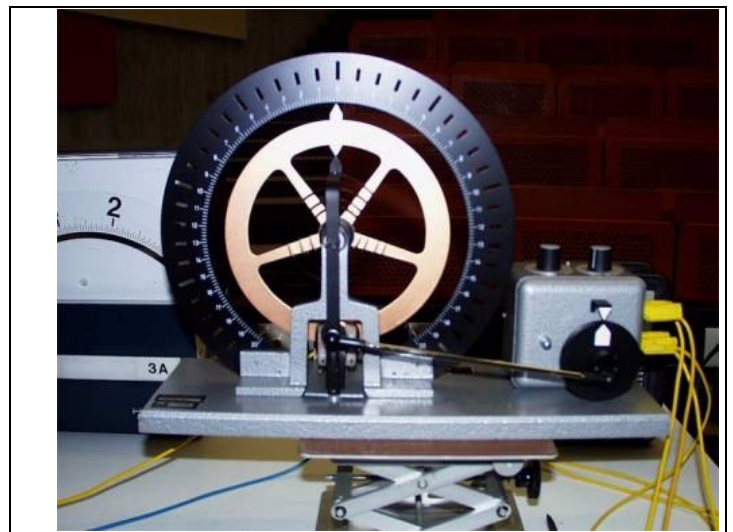
#### Exp. I 69: Pohl'sches Rad

In diesem Beispiel wird ein Drehpendel über einen Exzenter angeregt.

Ein getriebener Oszillator, resp. eine erzwungene Schwingung wird durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben:

$$\ddot{x} + 2 \beta \dot{x} + \omega_0^2 x = K(t)/m ,$$

wobei  $K(t)$  eine äußere Kraft beschreibt. In den meisten Fällen wird sie selber periodisch sein.



Die äußere Kraft leistet am System Arbeit, so dass die Energie des Systems zu-, aber auch abnehmen kann. Dies hängt davon ab ob die Kraft in Richtung der Geschwindigkeit oder in entgegengesetzter Richtung wirkt.

Wir berechnen die dem System zugeführte Leistung  $P = F v$  durch Multiplikation der obigen Gleichung mit  $\dot{x}$ :

$$P = K(t) \dot{x} = m \ddot{x} \dot{x} + 2 \beta m \dot{x}^2 + \omega_0^2 m x \dot{x} = d/dt (m/2 \dot{x}^2 + 1/2 c x^2) + 2 \beta m \dot{x}^2 .$$

Die extern geleistete Arbeit fließt somit zum einen in die Änderung der mechanischen (kinetischen plus potenziellen) Energie, und kompensiert die Reibungsverluste, die dem System Energie entziehen. Die zugeführte Leistung ist positiv wenn  $K(t)$  und  $\dot{x}$  das gleiche Vorzeichen haben, d.h. wenn Kraft und Geschwindigkeit in Phase sind. Ist die Kraft hingegen mit dem Ort in Phase, also gegenüber der Geschwindigkeit 90 Grad außer Phase, so wird dem System über eine Schwingung gemittelt keine Energie zugeführt.

Wir haben hier also eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die allgemeine Lösung eines solchen Systems wird durch zwei linear unabhängige Funktionen aufgespannt, welche zusammen zwei freie Parameter enthalten, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden. Der einfachste Weg zur allgemeinen Lösung folgt dem Rezept

$$\text{allg. Lsg. der inh. DGl.} = \text{allg. Lsg. der homog. Dgl} + \text{beliebige Lsg der inh. Dgl.}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung haben wir oben bestimmt:

$$x(t) = e^{-\beta t} (A_1 e^{i\omega_s t} + A_2 e^{-i\omega_s t}) = e^{-\beta t} A \cos(\omega_s t + \phi) . \quad \omega_s = (\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}$$

jetzt benötigen wir zusätzlich eine (beliebige) Lösung der inhomogenen Gleichung.

#### **4.5.2. Stationäre Lösung**

Eine relativ einfache Lösung, die auch häufig benötigt wird, ist die stationäre Lösung, d.h. der Zustand, der sich einstellt wenn die Anfangsbedingungen nicht mehr relevant sind. Wir betrachten dafür nur eine spezielle Form der äußeren Kraft, nämlich eine harmonische Anregung. Wir verwenden hier die komplexe Schreibweise

$$K(t) = K_0 e^{i\omega t} ,$$

wobei die physikalische Kraft dem Realteil entspricht,

$$K_p(t) = K_0 \cos(\omega t) .$$

Für die Lösung machen wir den Ansatz daß das System der äußeren Kraft mit dessen Frequenz folgt, d.h. wir setzen

$$x(t) = a(\omega) e^{i\omega t} = A(\omega) e^{i(\omega t + \phi)} ,$$

mit  $a(\omega) = A(\omega) e^{i\phi}$  als Amplitude in komplexer Schreibweise, und  $A(\omega)$ ,  $\phi(\omega)$  reelle Amplitude und Phase. Offenbar sind

$$\dot{x}(t) = i \omega a(\omega) e^{i\omega t} = i \omega x(t) , \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) .$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt

$$(-\omega^2 + 2 i \beta \omega + \omega_0^2) a(\omega) = K_0/m .$$

Auflösen nach  $a$  ergibt

$$a(\omega) = A(\omega) e^{i\phi} = \frac{K_0}{m} \frac{1}{-\omega^2 + 2i\omega\beta + \omega_0^2} .$$

Dies ist bereits die Lösung in komplexer Schreibweise. Offenbar ist die Antwort des Systems proportional zur äußeren Anregung. Diese Proportionalität wird geschrieben als

$$a(\omega) = \frac{K_0}{m} Y(i\omega) ,$$

wobei

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2\beta s + \omega_0^2}$$

die komplexe **Transferfunktion** des Systems darstellt. Sie stellt das Verhältnis zwischen einer harmonischen äußeren Kraft und der Antwort des Systems dar. Diese einfache Beziehung gilt natürlich nur weil das System linear ist.

### 4.5.3. Real- und Imaginärteil

Die physikalische Auslenkung entspricht dem Realteil der komplexen Funktion

$$x_p(t) = \text{Re}\{a(\omega) e^{i\omega t}\} = \text{Re}\{a(\omega)\} \cos(\omega t) - \text{Im}\{a(\omega)\} \sin(\omega t) .$$

Somit beschreibt der Realteil von  $a(\omega)$  die In-Phase Komponente der Auslenkung, der Imaginärteil den Außer-Phase Teil.

Wir können Real- und Imaginärteil erhalten indem wir mit dem konjugiert-komplexen des Nenners erweitern:

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{K_0}{m} (-\omega^2 - 2i\omega\beta + \omega_0^2) / [(-\omega^2 + 2i\omega\beta + \omega_0^2)(-\omega^2 - 2i\omega\beta + \omega_0^2)] \\ &= \frac{K_0}{m} (\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\beta) / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2] . \end{aligned}$$

Somit sind

$$\begin{aligned} \text{Re}[a(\omega)] &= \frac{K_0}{m} (\omega_0^2 - \omega^2) / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2] . \\ \text{Im}[a(\omega)] &= - \frac{K_0}{m} 2\omega\beta / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2] . \end{aligned}$$

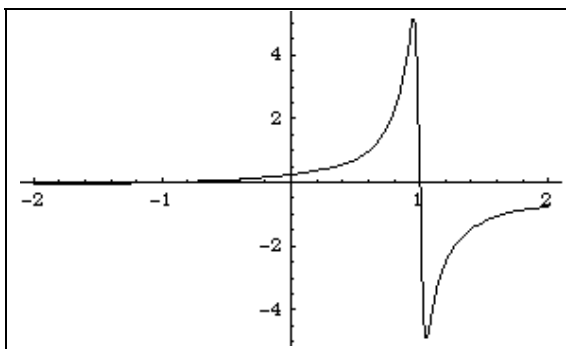
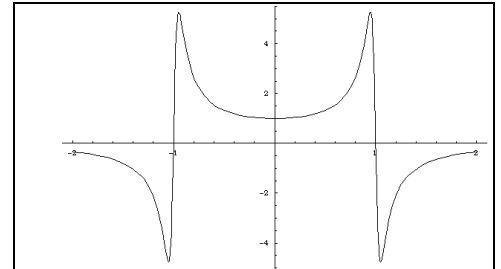
Offenbar ist dies im Wesentlichen eine Funktion der Frequenz  $\omega$ , d.h. der Frequenz der äußeren Kraft.

Mit

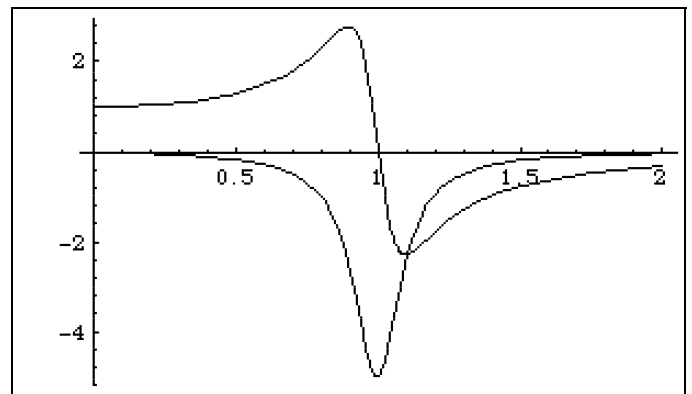
$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega) (\omega_0 - \omega)$$

findet man zwei Maxima bei  $\omega = \pm \omega_0$ . Sofern die Dämpfung nicht zu groß ist, kann der Nenner vereinfacht werden:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = (\omega_0 + \omega)^2 (\omega_0 - \omega)^2 \sim 4\omega_0^2 (\omega_0 - \omega)^2 .$$



Wie die linke Figur zeigt betrachtet man dann nur noch den Beitrag der Resonanz bei positiven Frequenzen.



In der Figur sind Realteil und Imaginärteil der komplexen Amplitude als Funktion der Frequenz  $\omega$  dargestellt für  $K_0/m = 1$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $\beta = 0.1$ . Wesentlich ist, daß es sich um ein resonantes Verhalten handelt: Der Realteil, also der in-Phase Teil wächst zunächst mit zunehmender Frequenz, bis er bei  $\omega_0 - \beta$  ein Maximum erreicht. Mit weiter zunehmender Frequenz nimmt er wieder ab und geht auf der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  durch 0. Hier erreicht jedoch der Imaginärteil sein Maximum. Die Breite der Resonanzlinie ist gegeben durch die Dämpfungskonstante  $\beta$ .

Ein interessanter Grenzfall ist derjenige für kleine Frequenzen: Wenn die Frequenz der äußeren Anregung gegen Null geht,  $\omega \rightarrow 0$ , verschwindet offenbar der Imaginärteil, während

$$\text{Re}[a(0)] = \frac{K_0}{m} \omega_0^2 / ((\omega_0^2)^2) = K_0 / (m \omega_0^2) = K_0 / c .$$

Die Auslenkung ist somit gerade durch die Federkonstante  $c$  gegeben, wie wir es erwarten bei einer zeitunabhängigen äußeren Kraft.

#### 4.5.4. Resonante Anregung

Ein weiterer wichtiger Spezialfall ist derjenige für  $\omega = \omega_0$ :

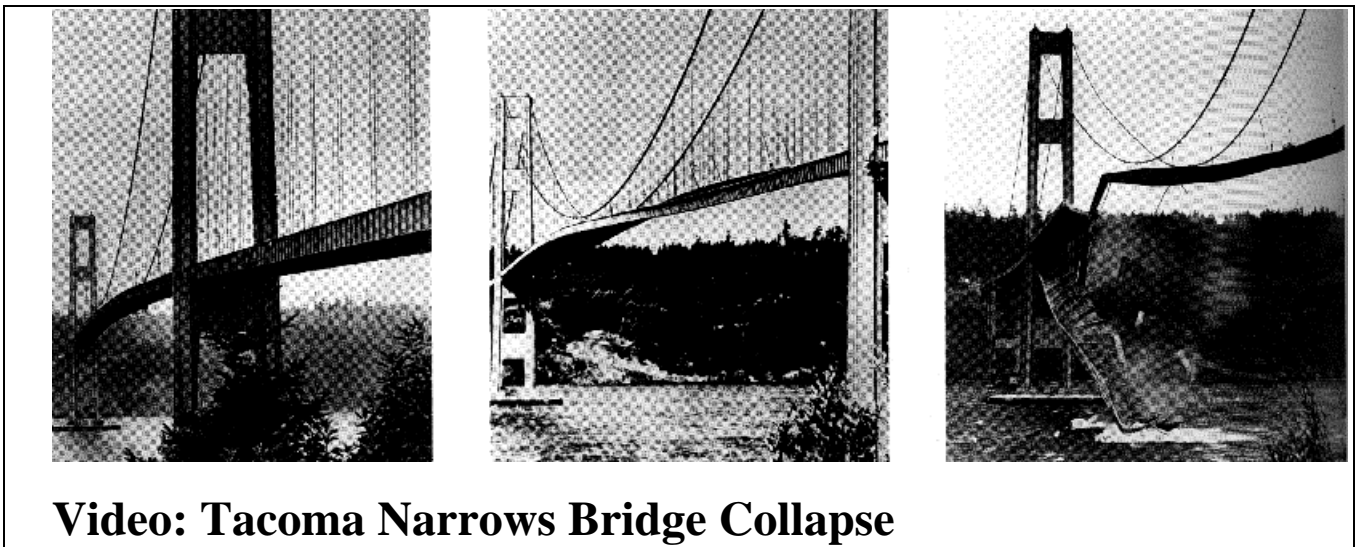
$$\operatorname{Re}[a(\omega_0)] = 0 .$$

$$\operatorname{Im}[a(\omega_0)] = - \frac{K_0}{m} \frac{2 \omega_0 \beta}{4 \omega_0^2 \beta^2} = - \frac{K_0}{m} \frac{1}{2 \omega_0 \beta} = - \frac{K_0/c}{\omega_0} \frac{1}{2 \beta} .$$

Der Realteil verschwindet also bei der Resonanzfrequenz, während der Imaginärteil sein Maximum erreicht. Das Maximum ist proportional zum Verhältnis der äußeren Kraft zur Kraftkonstante des Systems, und zum Verhältnis der Resonanzfrequenz zur Dämpfung. Dieses Verhältnis wird auch als Gütefaktor des Systems bezeichnet. Bei mechanischen Systemen ist es typischerweise in der Größenordnung von einigen 10 bis einigen 100. In atomaren Systemen kann diese Kreisgüte jedoch bis auf mehr als  $10^{15}$  anwachsen. Entsprechend ist die Resonanzüberhöhung dort extrem groß.

Das Verhalten kann mit diesem Experiment schön gezeigt werden. Das Pendel wird mit einem Motor mit variabler Frequenz angetrieben. Bei kleinen Geschwindigkeiten schwingt das Pendel in Phase mit der äußeren Kraft; die Amplitude bleibt klein. Wenn wir die Geschwindigkeit des Motors, d.h. die Drehzahl, resp. Frequenz, erhöhen, gelangen wir in die Nähe der Resonanzfrequenz, wo die Auslenkung des Pendels sehr groß wird.

**Exp 95, 95a, 96: Getriebene Schwingung**



Die Amplitude einer Schwingung kann sehr groß werden und zur Zerstörung des Objektes führen.

#### 4.5.5. Absolutbetrag und Phase

Wir können daraus auch Absolutbetrag und Phase erhalten, z.B. als

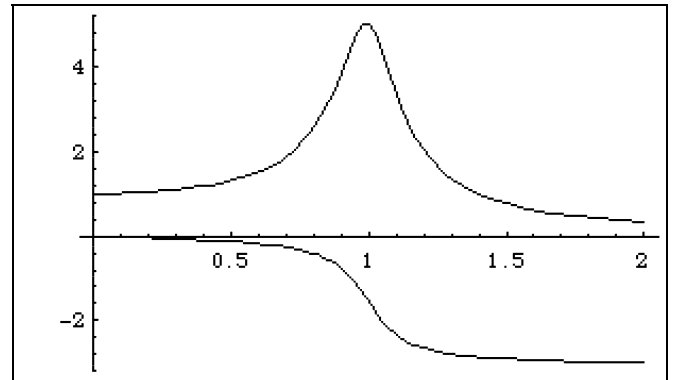
$$A(\omega) = (\text{Re}[a(\omega)]^2 + \text{Im}[a(\omega)]^2)^{1/2} = \frac{K_0}{m} 1/((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \omega^2 \beta^2)^{1/2} .$$

und

$$\tan(\phi) = \text{Im}[a(\omega)] / \text{Re}[a(\omega)] = 2 \beta \omega / (\omega^2 - \omega_0^2) .$$

Offenbar erreicht der Absolutbetrag sein Maximum für  $\omega = (\omega_0^2 - 2 \beta^2)^{1/2}$ .

Die Figur zeigt Amplitude und Phase für die gleichen Parameter wie oben. Die Amplitude erhält offenbar eine starke Überhöhung in der Nähe der Resonanzfrequenz  $\omega = \omega_0$ . Für kleinere Frequenzen ist die Phase 0, d.h. das System schwingt in Phase mit der äußeren Anregung. Auf der Resonanz beträgt die Phase  $-\pi/2$ , und für größere Frequenzen hinkt das System um 180 Grad hinter der Anregung her.



Wir können dieses Verhalten im Experiment anhand eines gedämpften elektronischen Schwingkreises beobachten.

**Exp.: RLC Kreis stationär**

Bei geringer Dämpfung ist die Resonanzlinie sehr schmal. Die Amplitude ist hoch, die Phase wechselt rasch. Mit zunehmender Dämpfung wird das Maximum niedriger und breiter, ebenso der Phasenwechsel. Die Resonanzfrequenz, also die Frequenz bei der die Amplitude maximal wird, sinkt mit zunehmender Dämpfung.

Bei geringer Dämpfung fällt das Maximum der Amplitude mit der Phasenverschiebung um  $\pi/2$  zusammen. Dies ist leicht einsichtig wenn wir die am System geleistete Arbeit betrachten: Diese ist allgemein gegeben als  $K(t) \dot{x}(t)$ . Wenn die Phase bei  $\pi/2$  liegt, so ist die Auslenkung

$$x(t) = A(\omega) e^{i(\omega t + \phi)} = -A(\omega) i e^{i\omega t}$$

gegenüber der Kraft

$$K(t) = K_0 e^{i\omega t}$$

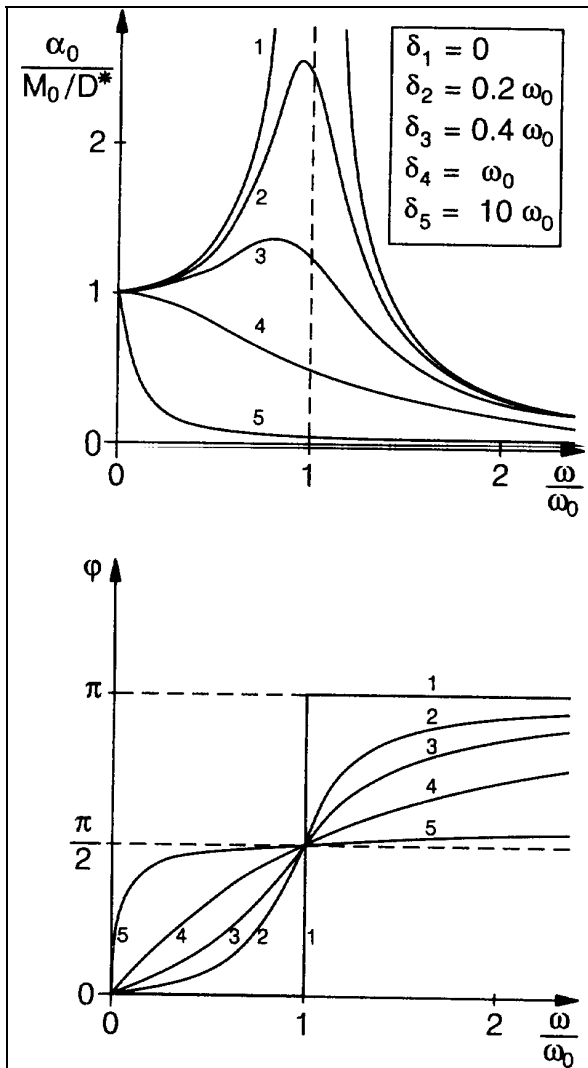
gerade um -90 Grad außer Phase. Die Geschwindigkeit

$$\dot{x}(t) = -i i A(\omega) \omega e^{i\omega t} = A(\omega) \omega e^{i\omega t}$$

ist gerade in Phase mit der äußeren Kraft, so daß die am System geleistete Arbeit maximal wird. Das System erreicht dann einen stationären Zustand, wenn die hineinfließende Arbeit gerade gleich der herausfließenden ist. Diese ist durch die Dämpfung gegeben, so daß die Amplitude auf der Resonanz

$$A(\omega_0) = \frac{K_0}{m} \frac{1}{2 \omega_0 \beta}$$

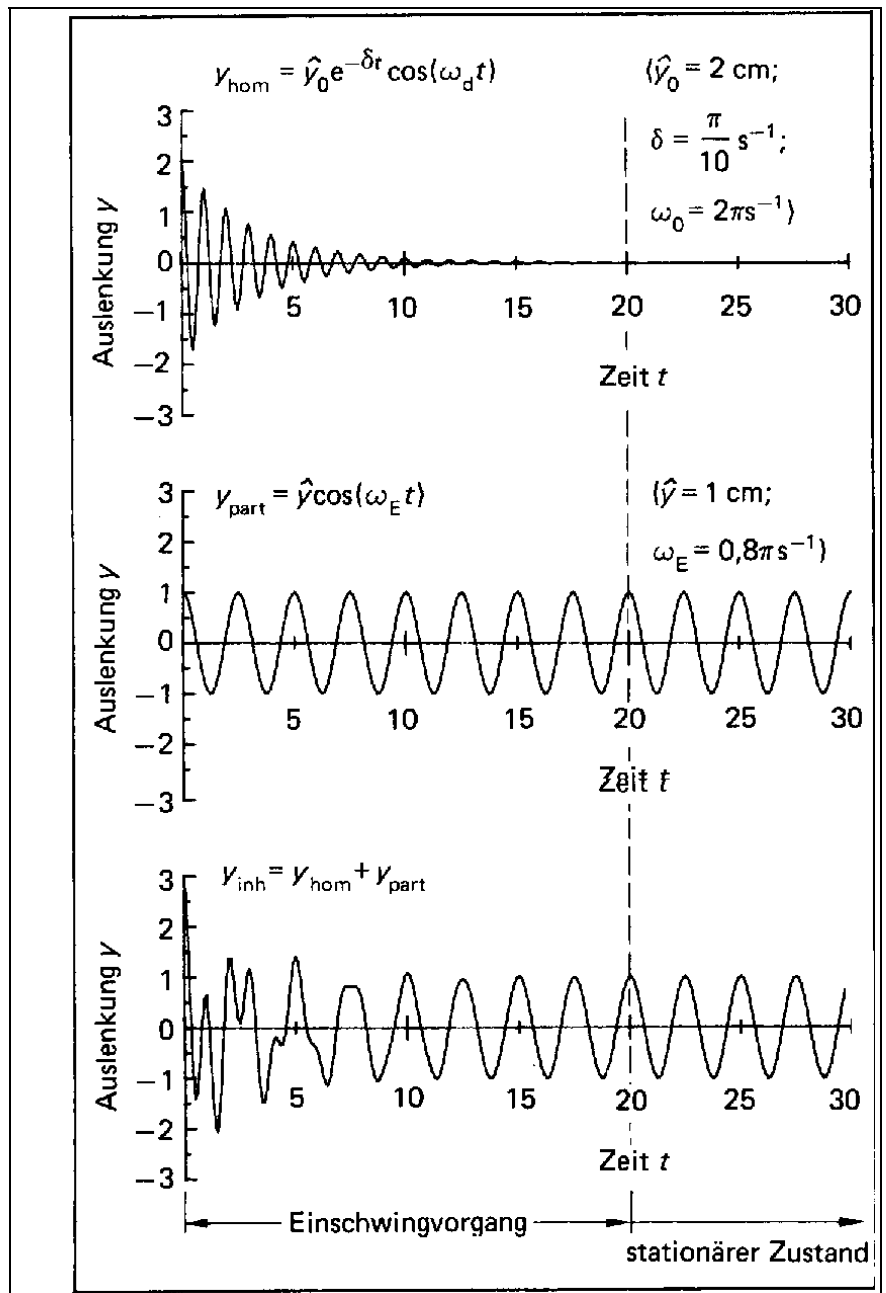
indirekt proportional zur Dämpfungskonstante  $\beta$  wird.



### 4.5.6. Einschwingvorgang

Nachdem wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (der freie gedämpfte harmonische Oszillator) und eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (die stationäre Lösung) diskutiert haben, können wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung als Summe der beiden diskutieren. Der freie gedämpfte Oszillator führt eine Schwingung mit der Resonanzfrequenz durch, welche exponentiell gedämpft ist. Die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist die stationäre Lösung, d.h. eine Schwingung mit konstanter Amplitude und der Frequenz der äußeren Störung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung entspricht somit einer Superposition dieser beiden Lösungen. Für lange Zeiten sollte das System sich dem stationären Zustand nähern. Für kurze Zeiten wird sich das System ähnlich wie der freie Oszillator bewegen. In diesem Bereich erwartet man eine Überlagerung der freien Schwingung mit der getriebenen, und damit eine Schwebung.



### Exp: Getriebene Schwingung mit schwacher Dämpfung

Dieses Verhalten

kann gut be-

obachtet werden, wenn wir bei der getriebenen Schwingung die Dämpfung gering halten. Der Einschwingvorgang, der bei der Frequenz des freien Oszillators liegt, überlagert sich der Schwingung, mit der das System der externen Anregung folgt.



### 4.5.7. Zusammenfassung

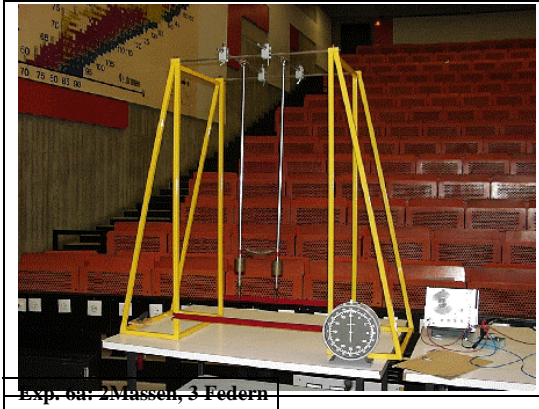
	freie Schwingung	erzwungene Schwingung
	<p>Modell</p> <p>einmalige Auslenkung</p>	<p>Modell</p> <p>periodische Erregung von außen</p>
ungeädmpft	<p>zeitlich konstante Amplitude: <math>\hat{y}_1 = \hat{y}_2 = \hat{y}_3 = \hat{y}_4</math></p>	
gedädmpft	<p>zeitlich abnehmende Amplitude: <math>\hat{y}_1 &gt; \hat{y}_2 &gt; \hat{y}_3 &gt; \hat{y}_4</math></p>	

Wir fassen nochmals des Verhalten von freien und erzwungenen Schwingungen in gedädmpften und ungedädmpften Systemen zusammen.

## 4.6. Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden

### 4.6.1. Das Doppelpendel

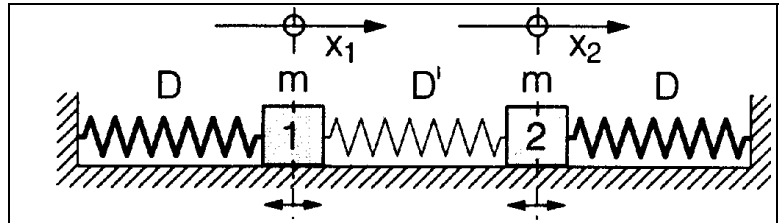
Wir betrachten nun nicht mehr einzelne, unabhängige harmonische Oszillatoren, sondern mehrere, die aneinander gekoppelt sind.



#### **Exp. III/6: Doppelpendel**

Wenn wir eines der gekoppelten Pendel anstoßen, so wird seine Energie auf das andere übertragen. Die Schwingung des ersten Pendels wird dabei gedämpft bis es ganz still steht, diejenige des zweiten Pendels baut sich auf, bis der Vorgang sich umkehrt. Offenbar wird hier Energie von einem Pendel auf das andere übertragen.

Ein ähnliches System besteht aus zwei über Federn gekoppelten Massen.



Wir können die Bewegungsgleichung des Systems schreiben als

$$\ddot{\phi}_1 = -\omega_0^2 \phi_1 + \kappa (\phi_2 - \phi_1) \qquad \ddot{\phi}_2 = -\omega_0^2 \phi_2 + \kappa (\phi_1 - \phi_2) ,$$

d.h. wir haben jetzt ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen.

Im Allgemeinen kann man Systeme von gekoppelten linearen Differentialgleichungen lösen indem man die Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt. In diesem Fall handelt es sich um ein speziell einfaches System, bei dem dies nicht notwendig ist. Wir können die Lösung finden indem wir Summe und Differenz dieser beiden Gleichungen bilden:

$$\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2 = \ddot{\xi}_1 = -\omega_0^2 (\phi_1 + \phi_2) = -\omega_0 \xi_1 .$$

$$\ddot{\phi}_1 - \ddot{\phi}_2 = \ddot{\xi}_2 = -\omega_0^2 (\phi_1 - \phi_2) + 2 \kappa (\phi_2 - \phi_1) = -(\omega_0^2 + 2 \kappa) \xi_2 .$$

Somit haben wir zwei voneinander unabhängige Differentialgleichungen für die Variablen  $(\phi_1 + \phi_2)$  und  $(\phi_1 - \phi_2)$  gefunden, welche jeweils einem harmonischen Oszillator entsprechen. Somit sind die Lösungen für diese beiden Variablen

$$\phi_1 + \phi_2 = \xi_1 = A e^{i(\omega_0 t + \phi)} ,$$

wobei Amplitude  $A$  und Phase  $\phi$  durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Entsprechend findet man für

$$\phi_1 - \phi_2 = \xi_2 = B e^{i(\omega_2 t + \delta)} \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\kappa} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2\kappa}{\omega_0^2}} \sim \omega_0 \left(1 + \frac{\kappa}{\omega_0^2}\right).$$

Die zweite Frequenz liegt somit immer höher als die Frequenz für die symmetrische Mode. Die Erhöhung wird durch das Verhältnis aus Kopplungsstärke und Modenfrequenz bestimmt.

#### 4.6.2. Eigenschwingungen

Wir betrachten zunächst einige spezielle Situationen. Zunächst betrachten wir den Fall dass

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) = \phi_0 ; \quad \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0 ,$$

d.h. den Fall dass beide Pendel zur gleichen Seite ausgelenkt werden und aus der Ruhe losgelassen werden. Eingesetzt in die obigen Lösungen für  $\xi_1$  und  $\xi_2$  finden wir

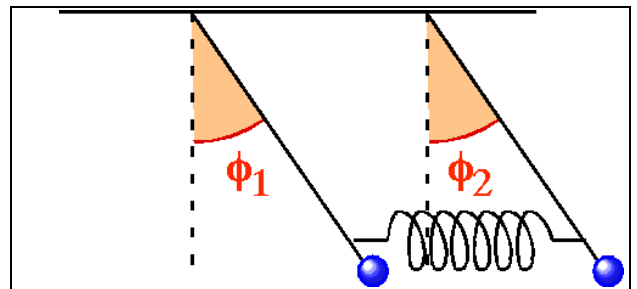
**Exp.**

$$\phi_1 + \phi_2 = \xi_1 = 2 \phi_0 e^{i\omega_0 t} , \quad \phi_1 - \phi_2 = \xi_2 = 0 ,$$

oder

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_0 e^{i\omega_0 t} ,$$

d.h. beide Pendel schwingen mit der gleichen Frequenz  $\omega_0$ , gleicher Amplitude und gleicher Phase. Die Kopplungsfeder ist in diesem Fall entspannt und hat deshalb keinen Einfluss auf das System. Man bezeichnet diesen Schwingungszustand als die erste Normalmode des Systems.



Als nächstes betrachten wir den Fall dass die beiden Pendel in entgegengesetzte Richtung ausgelenkt und aus der Ruhe losgelassen werden,

$$\phi_1(0) = -\phi_2(0) = \phi_0 ; \quad \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0 .$$

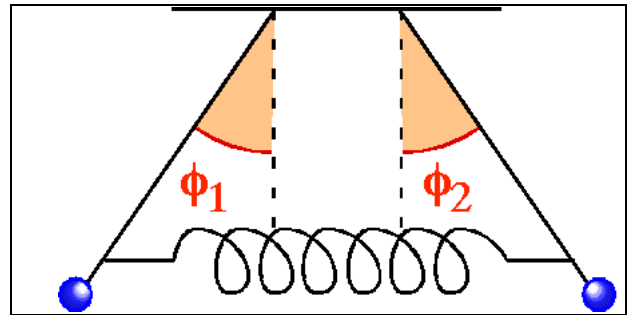
Aus dieser Anfangsbedingung erhalten wir

$$\phi_1 - \phi_2 = \xi_2 = 2 \phi_0 e^{i\omega_2 t} , \quad \phi_1 + \phi_2 = 0$$

oder

$$\phi_1 = -\phi_2 = \phi_0 e^{i\omega_2 t} .$$

Somit bewegen sich in diesem Fall beide Pendel mit gleicher Frequenz und Amplitude, diesmal aber in Gegenphase. Dadurch ist die Feder in diesem Fall immer maximal gespannt, so dass die rücktreibende Kraft auf beide Pendel um den entsprechenden Wert größer wird. Die Resonanzfrequenz



$$\omega_2 = \omega_0 + 2\kappa$$

für diese zweite Normalmode ist deshalb um  $2\kappa$  größer als die Grundfrequenz. Wir bestätigen diese Voraussage im Experiment indem wir die Periode der beiden Schwingungen messen. Sie betragen

$$T_1 = 1.9 \text{ s} \quad T_2 = 1.65 \text{ s} .$$

Wird die Feder in die Mitte der Pendel verschoben wird die Kopplungsstärke reduziert. Wir messen in diesem Fall eine Periode von  $T_3 = 1.8 \text{ s}$ .

### 4.6.3. Schwebungen

Als dritten Fall betrachten wir die Situation dass einer der beiden Pendel ausgelenkt wird, während der andere in Ruhelage ist, und beide zunächst in Ruhe, d.h.

$$\phi_1(0) = \phi_0, \quad \phi_2(0) = 0, \quad \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0 .$$

In den Variablen  $\xi_1$  und  $\xi_2$  muss die zeitliche Entwicklung somit

$$\phi_1 + \phi_2 = \xi_1 = \phi_0 e^{i\omega_0 t}, \quad \phi_1 - \phi_2 = \xi_2 = \phi_0 e^{i\omega_1 t}$$

sein. Die Auslenkung der beiden Pendel wird damit

$$\phi_1 = (\xi_1 + \xi_2)/2 = \phi_0/2 (e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_1 t}) \quad \phi_2 = (\xi_1 - \xi_2)/2 = \phi_0/2 (e^{i\omega_0 t} - e^{i\omega_1 t}) .$$

In reeller Schreibweise entspricht dies für

$$\phi_1 = \phi_0/2 [\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t)] .$$

Mit Hilfe des Additionstheorems

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

können wir dies umformen zu

$$\phi_1 = \phi_0 \cos\left(\frac{\omega_0 + \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{2} t\right) = \phi_0 \cos((\omega_0 + \kappa)t) \cos(\kappa t) .$$

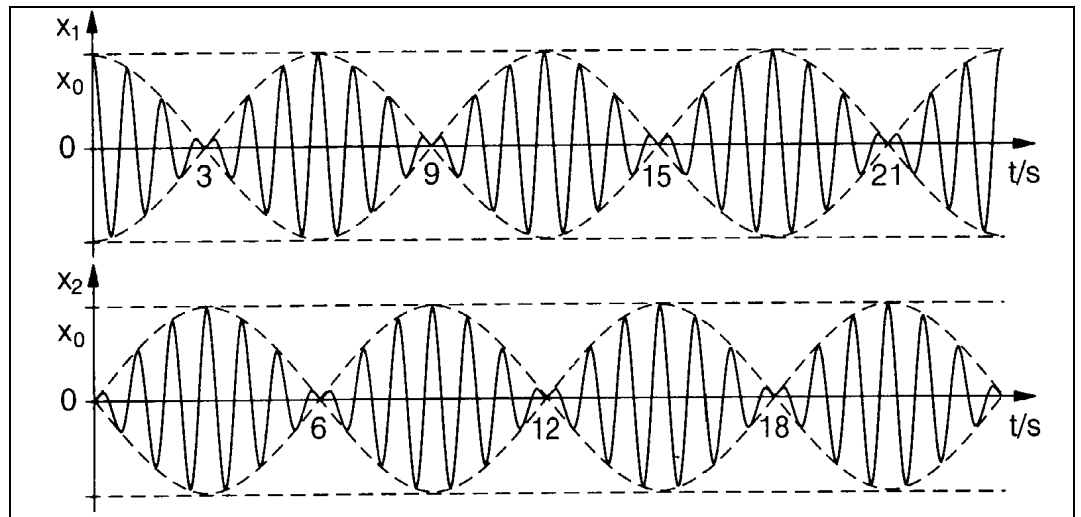
Für das zweite Pendel erhalten wir entsprechen

$$\phi_1 = (\xi_1 + \xi_2)/2 = \phi_0/2 (e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_1 t}) \quad \phi_2 = (\xi_1 - \xi_2)/2 = \phi_0/2 (e^{i\omega_0 t} - e^{i\omega_1 t}) .$$

In reeller Schreibweise entspricht dies für

$$\phi_2 = \phi_0/2 [\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_1 t)] = \phi_0 \sin((\omega_0 + \kappa)t) \sin(\kappa t) .$$

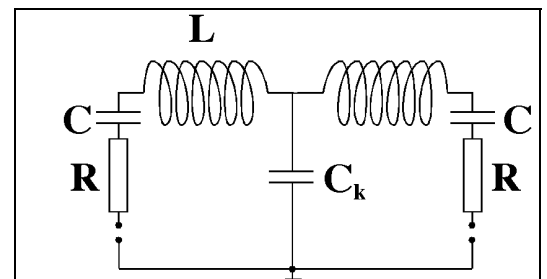
Offenbar schwingen beide Pendel jetzt mit der mittleren Frequenz  $\frac{\omega_0 + \omega_1}{2}$ , wobei die Amplitude noch mit der halben Differenzfrequenz  $\kappa$  moduliert ist. Man bezeichnet diese Erscheinung als Schwebung.



#### 4.6.4. Gekoppelte elektronische Schwingkreise

Wie mechanische Schwingkreise können auch elektronische Schwingkreise gekoppelt werden. Wir betrachten hier als Beispiel ein System von zwei kapazitiv (d.h. über einen Kondensator) gekoppelten Schwingkreisen.

Die beiden Schwingkreise sind unabhängig voneinander sofern der Kopplungskondensator  $C_k$  sehr groß wird: in diesem Fall wirkt er als Kurzschluss und der Punkt zwischen den beiden Spulen ist auf dem Potenzial der Masse. Jeder der beiden Schwingkreise entspricht dann einem unabhängigen harmonischen Oszillator. Ist der Widerstand klein, so beträgt die Eigenfrequenz



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} .$$

Unter Berücksichtigung des Kopplungskondensators können wir die eine Eigenmode des Systems finden wenn wir den Fall betrachten wo das System symmetrisch schwingt, d.h. über den entsprechenden Komponenten auf beiden Seiten liegt jeweils die gleiche Spannung an. Aus Symmetriegründen hat der Kopplungskondensator dann keine Wirkung. Das gesamte System besitzt dann die Eigenfrequenz

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}L \cdot 2C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 .$$

Sind die beiden Kreise im Gegentakt, fließt der Strom also durch den Kondensator  $C_k$ , so wird die gesamte Kapazität des Schwingkreises

$$C_{\text{tot}} = \frac{1}{\frac{1}{2C} + \frac{1}{C_k}} = \frac{2C C_k}{2C + C_k} .$$

Damit wird die Resonanzfrequenz

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}L C_{\text{tot}}}} = \frac{1}{\sqrt{L \frac{CC_k}{2C + C_k}}} .$$

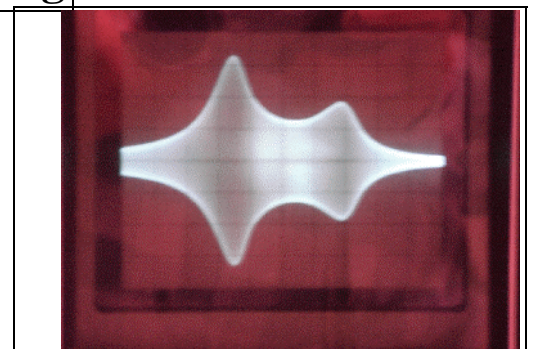
Wird der Kopplungskondensator sehr groß erhalten wir daraus wieder die Frequenz  $\omega_0$ . Für sehr kleine Kopplungskondensatoren dominiert er und die zweite Resonanzfrequenz wächst auf

$$\omega_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC_k/2}} .$$

Offenbar kann diese Frequenz sehr hoch werden.

### Exp. II/97: gekoppelte LC Kreise; Schwebung

Wir können die beiden Resonanzfrequenzen im Experiment beobachten indem wir eine variable Wechselspannung anlegen und die Spannung über einer der beiden Spulen abgreifen. Für große Werte des Kopplungskondensators werden die beiden Resonanzfrequenzen praktisch identisch. Für kleine Werte nimmt die zweite Reso-



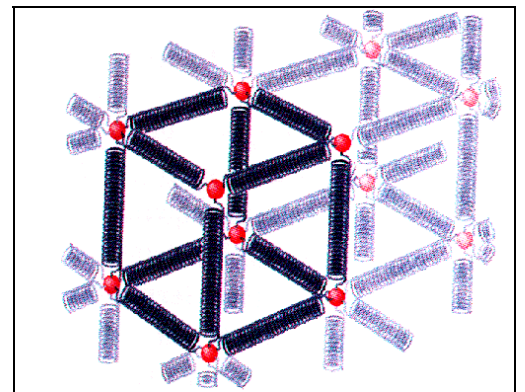
nanzfrequenz stark zu.

Man kann am gleichen System auch das freie Schwingungsverhalten beobachten indem man als äußere Spannung eine Stufenfunktion anlegt. Man beobachtet wie beim einzelnen RLC Kreis eine gedämpfte Schwingung, wobei in diesem Fall auch eine Schwebung sichtbar ist. Mit zunehmender Kopplungsstärke (kleinerem Kondensator) nimmt die Periode der Schwebung ab, d.h. die Schwebungsfrequenz zu.

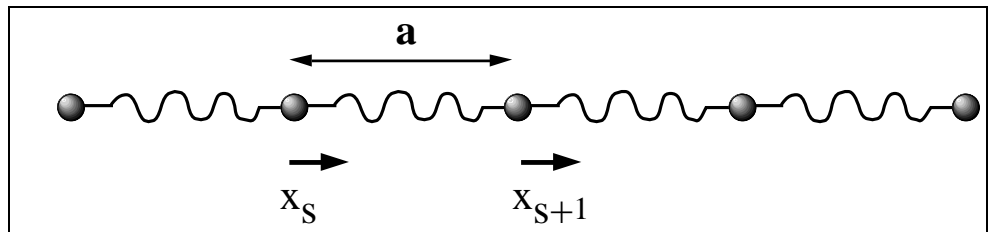
#### 4.6.5. Die lineare Kette

Von der Diskussion von zwei gekoppelten Massen gehen wir über zu einer Kette von Massen, welche über Federn aneinander gekoppelt sind.

Die ist z.B. ein wichtiges Modell für die Diskussion von Schwingungen in kristallinen Festkörpern. Das Gitter eines Festkörpers ist dadurch definiert dass die Atome sich an der Stelle befinden, welche die Gesamtenergie der Anordnung minimiert. Dies ist deshalb die Position, die sie - abgesehen von der Nullpunktsbewegung - am absoluten Nullpunkt einnehmen. Bei endlichen Temperaturen hingegen können sie aus dieser Position ausgelenkt sein und damit eine höhere Energie besitzen. Die rücktreibende Kraft des Potentials führt dann zu einer Oszillationsbewegung.



Als einfachstes Modell für die Bewegung von Atomen in einem Festkörper betrachten wir zunächst die eindimensionale Kette. Die darin enthaltenen Atome seien über Federn aneinander gekoppelt.



Wichtig ist nun aber, dass in der Kette die Kraft, die auf ein Atom wirkt, nicht nur von seiner eigenen Position, sondern auch von der seiner Nachbaratome abhängt. Für eine einatomige Basis gilt

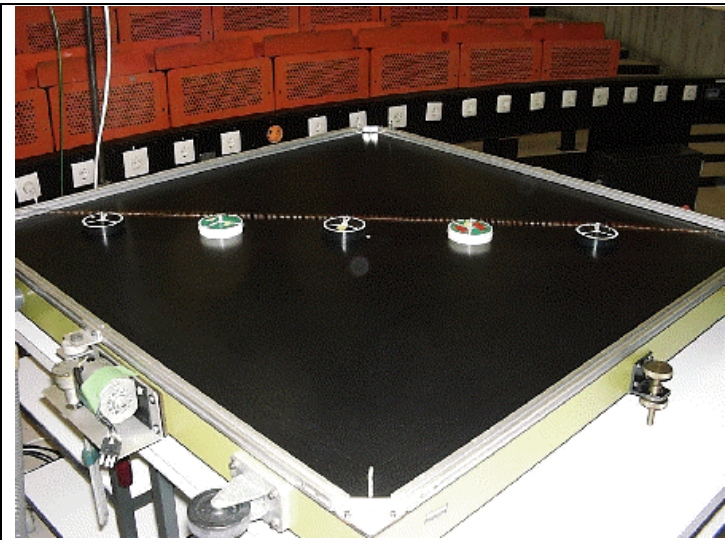
$$m \ddot{x}_S = c(x_{S+1} + x_{S-1} - 2 x_S) ,$$

wobei  $c$  die Kraftkonstante und  $m$  die atomare Masse beschreibt. Jedes Atom ist in diesem Modell an seine Nachbaratome gekoppelt. Dies führt dazu dass die Auslenkung nicht auf einem Atom lokalisiert bleiben kann.



### 4.6.6. 5 Massen

Wir betrachten als Beispiel ein System aus 5 durch Federn verbundenen Massen. Dies kann als erste Annäherung an schwingende Atome in einem Festkörper betrachtet werden.



### Exp. 20: lineare Kette

Für ein einfaches System von 5 Massen, die durch Federn verbunden sind, lauten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \frac{c}{m} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren dieses Systems sind

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1^2 = \sqrt{3} - 2; \quad \omega_1 \approx 0.52 \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_2^2 = -1; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

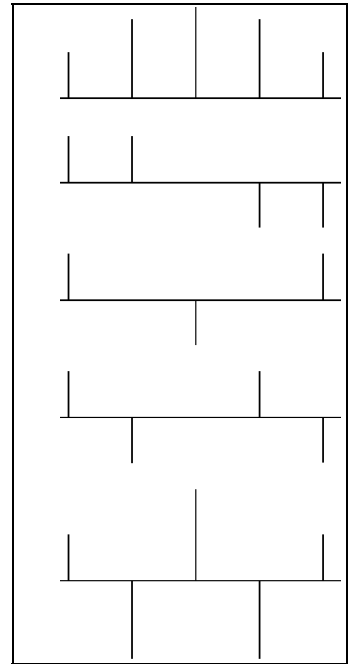
$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_3^2 = -2; \quad \omega_3 \approx 1.41 \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$\xi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_4^2 = -3; \quad \omega_4 \approx 1.73 \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$\xi_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 2 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_5^2 = -2 - \sqrt{3}; \quad \omega_5 \approx 1.93 \sqrt{\frac{c}{m}}$$



Man sieht an diesen Eigenvektoren bereits ein interessantes Merkmal wenn man die einzelnen Elemente grafisch aufträgt. Offenbar haben beim Eigenvektor mit der niedrigsten Eigenwert alle Elemente das gleiche Vorzeichen. Bei den anderen Eigenwert wechselt das Vorzeichen jeweils 1, 2, 3, 4 mal. Man erhält den 5ten Eigenvektor aus dem ersten und den 4. aus dem 2. indem jedes zweite Element invertiert wird. Dieses Verhalten ist sehr universell, man findet es sowohl bei Schwingungen und Wellen in klassischen Systemen wie auch in der Quantenmechanik. So sind z.B. Molekülorbitale nach diesem Schema aus Atomorbitalen zusammengesetzt.



Im Experiment kann man die einzelnen Schwingungen anregen indem man die Frequenz der äußeren Störung verändert. Mit zunehmender Frequenz werden höhere Moden, also Schwingungen mit einer größeren Anzahl Knoten angeregt.

Für jede einzelne Mode erhält man eine harmonische Zeitabhängigkeit, d.h. alle Massen führen eine harmonische Schwingung mit der gleichen Frequenz aus. Für die k-te Mode z.B. lautet die Zeitabhängigkeit der Massen  $m_i$

$$x_i(t) = A_k (\xi_k)_i e^{i\omega_k t}.$$

Das charakteristische Merkmal einer einmodigen Schwingung ist, dass alle Massen gleichzeitig in Ruhelage und gleichzeitig bei der maximalen Auslenkung sind. Im allgemeinen können auch mehrere Moden gleichzeitig angeregt sein. Die Zeitabhängigkeit lautet dann

$$x_i(t) = \sum_k A_k (\xi_k)_i e^{i\omega_k t}.$$

In diesem Fall

#### 4.6.7. Unendliche Kette

Einfacher als die Kette mit fünf Gliedern ist die unendliche Kette. Dieses System wird einfacher weil jetzt die Bewegungsgleichung für alle Massen die gleiche ist. Es bleibt die Frage, was aus den Randbedingungen wird. Da wir von einer unendlich langen Kette ausgehen erwarten wir, daß das Resultat unabhängig ist von den Randbedingungen; es ist aber nützlich, zunächst in einem endlichen System geeignete Randbedingungen einzuführen und dann die Größe des Systems gegen unendlich laufen zu lassen.

**Z: Unendliche Kette**

Es zeigt sich, daß es bequem ist, periodische Randbedingungen einzuführen: Man betrachtet N Massen, wobei N eine große aber endliche Zahl ist, und ordnet diese Massen ringförmig an. Die N-te Masse ist somit an die erste gekoppelt. Für die 5 Massen würde die Bewegungsgleichung damit zu

**Z: Periodizität**

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \frac{c}{m} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Wir suchen jetzt die Eigenfunktionen dieser Bewegungsgleichungen, also diejenigen Lösungen dieser Bewegungsgleichung, die eine harmonische Zeitabhängigkeit aufweisen. Ein möglicher Ansatz, der die periodischen Randbedingungen erfüllt, ist

$$x_s = X_0 e^{iksa} e^{i\omega_n t},$$

**Z: Auslenkungen**

wobei  $k$  die Dimension einer inversen Distanz hat und  $a$  den Abstand zwischen nächsten Nachbarn darstellt. Aufgrund der periodischen Randbedingungen muß das Element  $N+1$  mit dem ersten identisch sein, d.h.

$$x_{N+1} = x_1$$

**Z: Periodizität**

und damit

$$e^{ikNa} = 1.$$

Dies ist möglich wenn

$$k = 2\pi n / (N a), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

also wenn  $k$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  durch die Länge des Rings ist. Offenbar ist der Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Werten von  $k$  relativ groß wenn  $N$  klein ist, aber für  $N$  gegen unendlich verschwinden die Abstände, d.h.  $k$  wird kontinuierlich.  $k$  wird als Wellenvektor bezeichnet; der Name deutet darauf hin, dass man solche Schwingungen auch als stehende Wellen verstehen kann. Zwischen benachbarten Atomen ändert sich die Phase der Schwingung um  $ka$ ; die räumliche Periode ist somit  $\lambda = 2\pi/k$ . Eine vollständig kontinuierliche Schreibweise der Auslenkung erhält man mit der Substitution

$$s a \rightarrow r, \quad k \rightarrow 2\pi/\lambda : \quad x_s = X_0 e^{i2\pi r/\lambda} e^{i\omega_n t}.$$

Durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{x}_s = c(x_{s+1} + x_{s-1} - 2 x_s),$$

erhalten wir

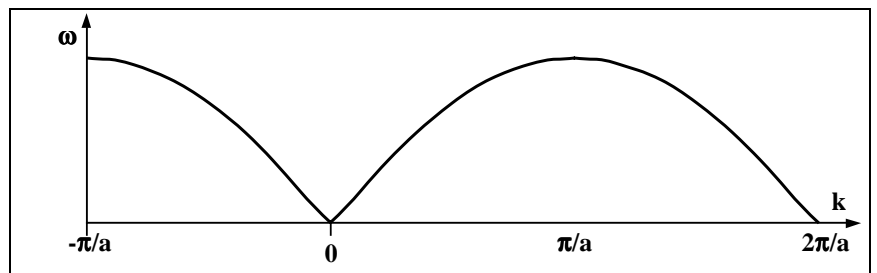
$$-\omega^2 = c/m(\exp(i k a) + \exp(-i k a) - 2) = -2(c/m)(1 - \cos(ka)) = -4(c/m) \sin^2(ka/2) .$$

Daraus erhalten wir

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{c}{m}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right| .$$

Jedes Wertepaar  $(k, \omega)$  charakterisiert eine Eigenschwingung der Kette. Innerhalb der harmonischen Näherung sind diese Schwingungen unabhängig voneinander. In einer Kette mit  $N$  Gliedern gibt es  $N$  diskrete Moden, wobei  $N$  die Anzahl der Einheitszellen des Kristalls darstellt. In einer unendlichen Kette wird daraus eine kontinuierliche Funktion des Wellenvektors  $k$ .

Die Beziehung zwischen  $k$  und  $\omega$ , welche als Dispersionsrelation bezeichnet wird, ist in der nebenstehenden Figur eingezeichnet. Für kleine Wellenvektoren, also große Wellenlängen geht die Frequenz gegen Null. Hier gilt:



$$\omega \approx \sqrt{\frac{c}{m}} |ka| ,$$

d.h. die Frequenz ist direkt proportional zum Betrag des Wellenvektors.

Ein kleiner Wellenvektor, resp. große Periodenlänge bedeutet, daß benachbarte Atome praktisch in Phase schwingen.

**Z: Auslenkungen**

Anders sieht es beim Wellenvektor  $k = \pi/a$  aus. Hier sind benachbarte Atome gerade in Gegenphase. Hier wird gleichzeitig die Frequenz unabhängig vom Wellenvektor  $k$ .

**Z: Benachbarte Atome in Gegenphase**

Wenn wir zu noch größeren Wellenvektoren, also kürzeren Wellenlängen gehen, so wird die Auslenkungsdifferenz zwischen benachbarten Atomen wieder kleiner. Dies äußert sich auch in der Frequenz, wie man in der Dispersionsrelation erkennen kann. Offenbar ist die Frequenzabhängigkeit periodisch in  $k$ , mit Periode  $2\pi/a$ . Dies ist eine direkte Konsequenz des diskreten Modells: Es ist physikalisch nicht möglich, Schwingungen zu unterscheiden, deren Wellenvektor sich um  $2\pi/a$  unterscheidet.

Anders ausgedrückt: die relative Auslenkung zweier Atome ist identisch wenn ihre Phasendifferenz  $\pi/2$  oder  $5\pi/2$  ist. Physikalisch von Bedeutung ist deshalb nur der Bereich

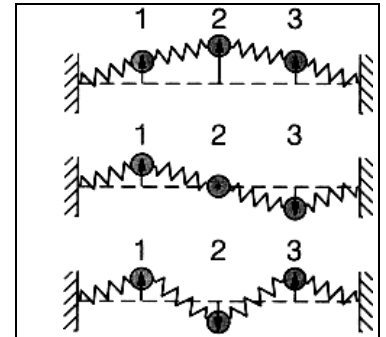
**Z: Wellen / Sampling Theorem**

zwischen  $-\pi/2a < k < \pi/2a$ . Diese Unterscheidung wird in der Festkörperphysik von großer Bedeutung, wo dieser Bereich als die erste Brillouin-Zone bezeichnet wird.

#### 4.6.8. Transversalschwingungen

Die Atome können nicht nur in Richtung der Achse ausgelenkt werden, sondern auch senkrecht dazu. Man spricht im bisher diskutierten Fall von Longitudinalschwingungen, im andern Fall von Transversalschwingungen. Wir werden solche Schwingungen im Kapitel 5 (Wellen) diskutieren. In den meisten Fällen existieren zwei voneinander unabhängige transversale Schwingungsmoden.

Eine zweidimensionale Schwingung kann man z.B. auf dem Luftkissentisch realisieren. In vielen Fällen ist es jedoch möglich, die beiden Dimensionen zu trennen und die Bewegungsgleichungen getrennt zu diskutieren.



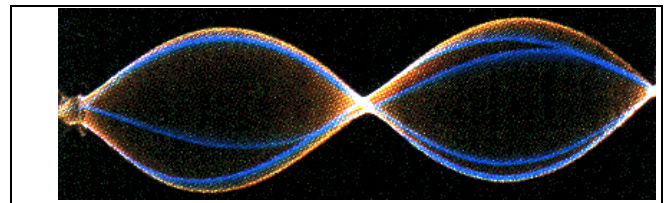
Exp. 7: zweidimensionaler Federschwinger

Wenn wir bei solchen Schwingungen zum kontinuierlichen Grenzfall übergeht erhält man die Schwingungen einer Saite. Diese sollen auch im Kapitel "Wellen" genauer diskutiert werden. Qualitativ soll jedoch das Ergebnis hier vorweggenommen werden:

- Es gibt unendliche viele Eigenschwingungen, welche die Form

$$y_n = \sin(n \times \pi/L) \cos(\omega_n t)$$

besitzen. Hier stellt  $n$  eine laufende Zahl dar, welche die Eigenschwingungen ordnet,  $x$  die Koordinate entlang der Saite,  $L$  ihre Länge, und  $\omega_n$  die Eigenfrequenz der Schwingung. Jede Eigenmode entspricht einer harmonischen Auslenkung der Saite, und die Auslenkung zeigt eine harmonische Zeitabhängigkeit. Da die Saite am Rand eingespannt ist verschwindet dort die Auslenkung immer, ebenso an den dazwischen liegenden Knoten, also den Nulldurchgängen der Auslenkung. Die  $n$ -te Eigenmode besitzt  $n-1$  Knoten.



Die Frequenzen sind Vielfache der Grundfrequenz, d.h.

$$\omega_n = n \omega_1 ,$$

und die Grundfrequenz ist indirekt proportional zur Länge der Saite. Je länger eine Saite desto niedriger somit die Frequenz. Dies ist ein Grund dafür dass tiefe Töne von großen Musikinstrumenten erzeugt werden.

#### **4.6.9. Schwingungen von mehrdimensionalen Systemen**

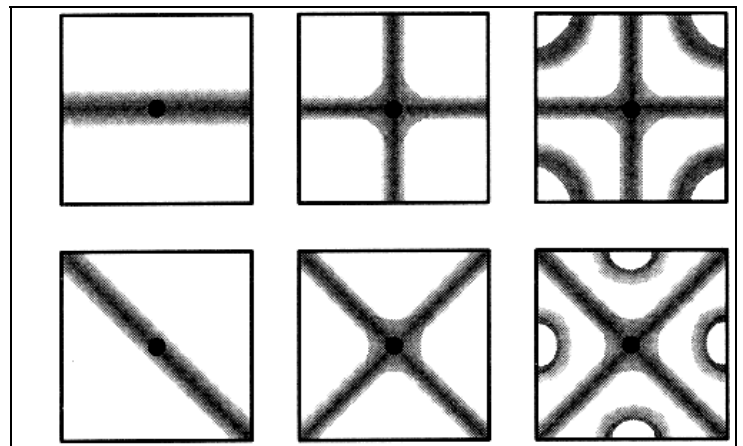
Ähnliche Schwingungen treten auch in mehrdimensionalen Systemen auf. Ein klassisches Beispiel sind die Schwingungen einer Membran. Unter einer Membran versteht man ein zweidimensionales schwingungsfähiges System. Dazu gehören z.B. Trommeln, wo eine elastische Membran am Rand eingespannt ist.

#### **Exp 29, 29a: Membranschwingungen, Chladny'sche Klangfiguren**

In diesem Experiment ist die "Membran" eine Platte aus Metall oder Glas, welche im Zentrum eingespannt ist. Mit Hilfe eines Bogens werden Schwingungen angeregt.

Diese können sichtbar gemacht werden indem Sand auf die Oberfläche gestreut wird.

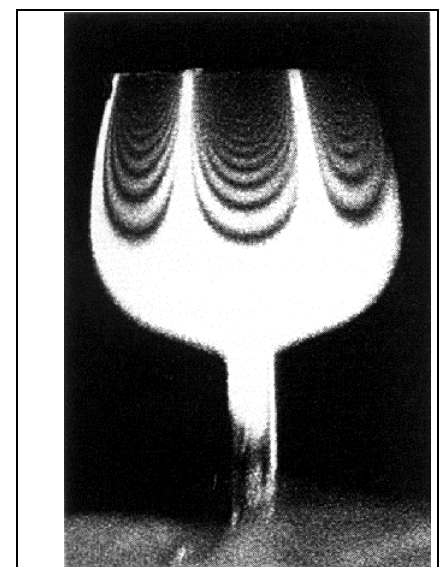
**Z: Moden** Die Schwingung entspricht einer periodischen Auslenkung, bei der Teile der Membran sich nach oben verbiegen, andere nach unten. Nach einer halben Periode ist die Auslenkung umgekehrt. Es existieren jedoch Linien auf der Membran, welche nie ausgelenkt werden. Diese werden als Knotenlinien bezeichnet. Entlang der Knotenlinien sammelt sich der Sand und macht diese so sichtbar. Je größer die Anzahl der Knotenlinien, desto höher die Frequenz der entsprechenden Moden.



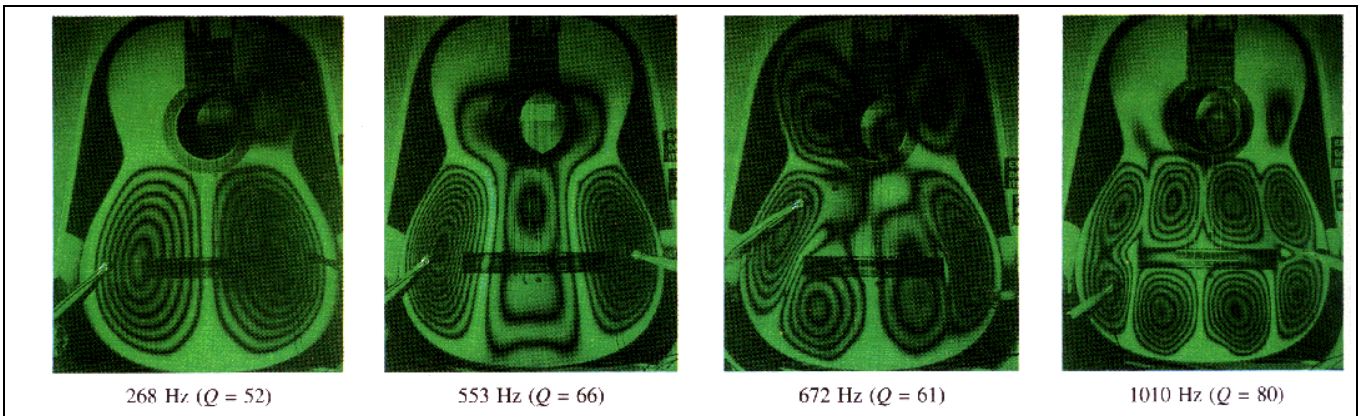
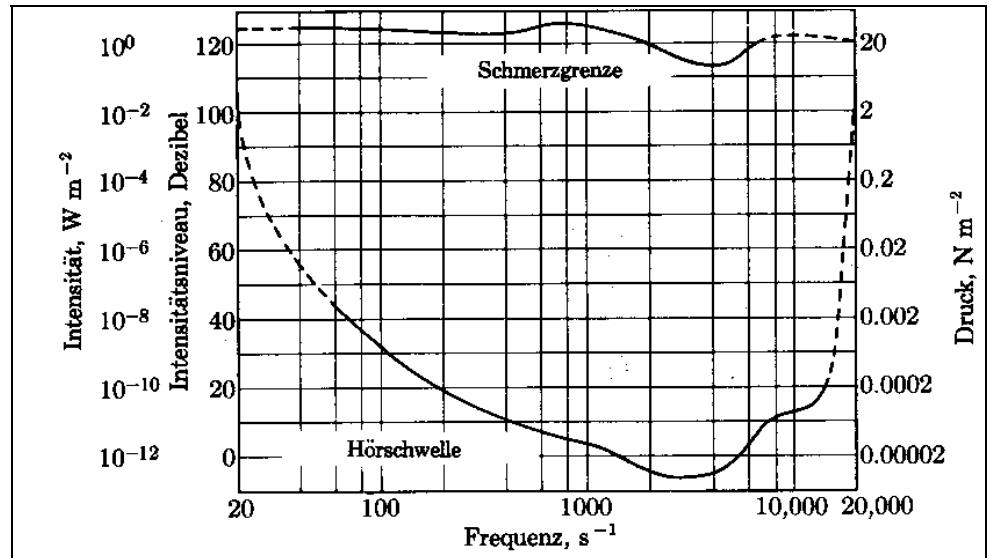
Moden existieren in jedem schwingungsfähigen System. Im Bild sind die Moden in einem Weinglas dargestellt, welche z.B. durch akustische Wellen angeregt werden können.

#### **4.6.10. Akustische Schwingungen, Musikinstrument**

Dreidimensionale Schwingungen in kontinuierlichen Medien sind z.B. akustische Schwingungen in Musikinstrumenten.

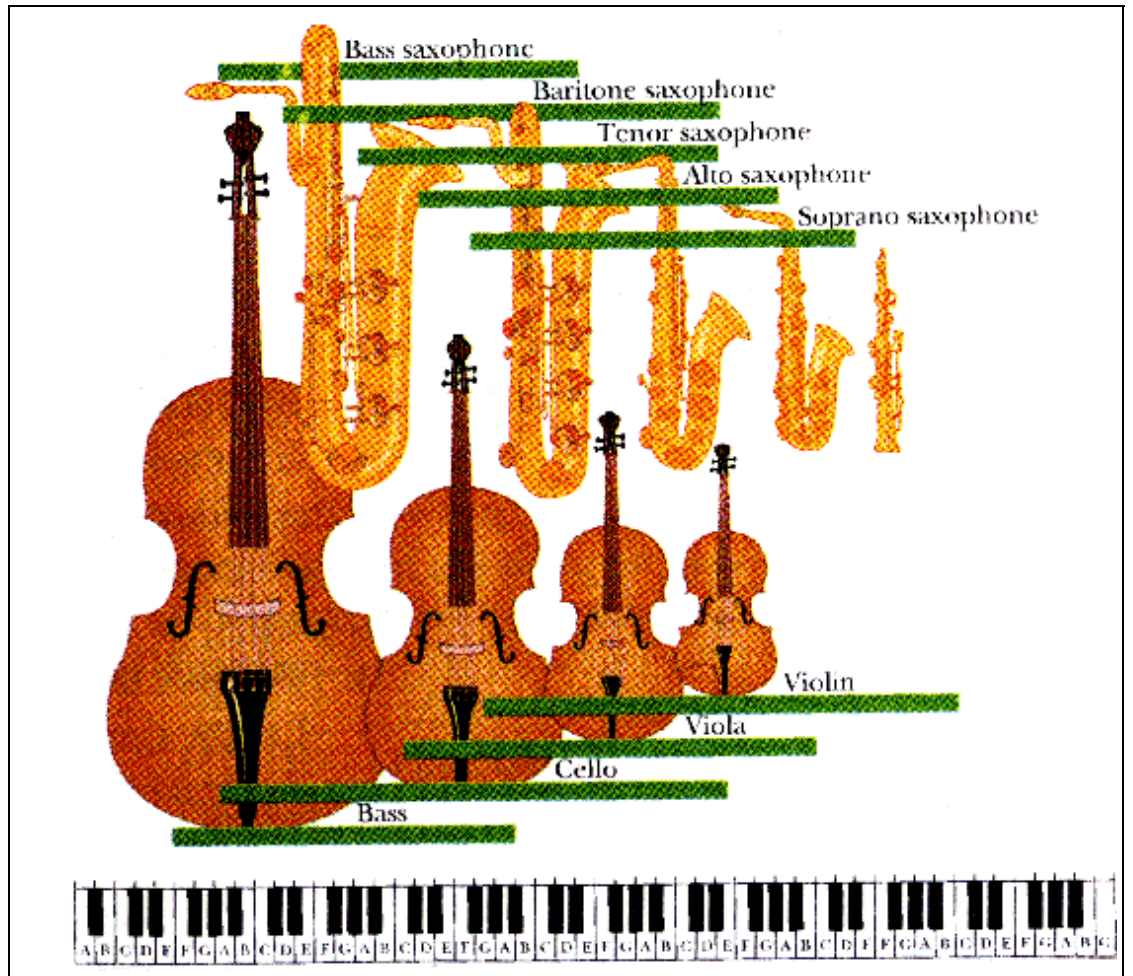


Akustische Schwingungen sind hörbar wenn sie sich in einem Frequenzbereich von ca. 20 Hz bis 15 kHz befinden.



Schwingungen können in Musikinstrumenten ähnlich wie in den gezeigten Membranen angeregt werden. Jedes Musikinstrument hat entsprechend eine Reihe von Eigenschwingungen. Zwar können z.B. bei einer Geige alle Töne erzeugt werden, doch werden nicht alle gleich gut wiedergegeben. Die Kombination der Eigenmoden ist für den Klang eines Instrumentes verantwortlich. Wie eine Geige oder Gitarre gebaut werden muss war deshalb lange Zeit ein kaum nachvollziehbares Geheimnis der Instrumentenbauer. Nicht nur die Form des Instrumentes ist wichtig, da sie die Lage der Moden bestimmt, auch das Material, welches z.B. die Dämpfung und damit die Breite der Resonanzen mitbestimmt.

Allgemein gilt dass größere Instrumente tiefere Töne ergeben. Dieser Zusammenhang wird ebenfalls im Kapitel 5 Wellen noch diskutiert.





## 4.7. Molekülschwingungen

Eine endliche Zahl von gekoppelten Oszillatoren tritt z.B. in Molekülen auf. Als Moleküle bezeichnet man eine kleine Zahl von Atomen, welche in einer bestimmten Anordnung aneinander gebunden sind. Die Kräfte zwischen den einzelnen Atomen werden durch die elektronische Struktur bestimmt und sind immer stark gerichtet, d.h. ein bestimmtes Atom ist nicht an alle weiteren Atome gebunden, sondern nur an eine kleine Zahl von Nachbaratomen. Diese Zahl liegt zwischen 1 und 6.

**Z: H<sub>2</sub>O**

### 4.7.1. Anzahl der Normalschwingungen

Ein Molekül mit N Atomen besitzt 3N Freiheitsgrade. Dementsprechend erwarten wir 3N Normalkoordinaten. Wenn wir die entsprechenden Schwingungsfrequenzen ausrechnen finden wir allerdings, daß sie für einige der Koordinaten null werden.

Dies sieht man einfach wenn man alle Atome um den gleichen Vektor verschiebt. Dies entspricht einer Verschiebung des Koordinatensystems und lässt die potenzielle und kinetische Energie des Moleküls konstant. Damit ist die Federkonstante  $c = 0$  und die Oszillatorfrequenz

**Z: Verschiebung**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = 0$$

ebenso.

Das gleiche gilt für eine Rotation. Diese Freiheitsgrade, welche deren Rückstellkraft und damit Frequenz verschwindet, werden als nicht-oszillatorische Freiheitsgrade bezeichnet. Jedes Molekül besitzt 3 translatorische Freiheitsgrade und i.a. auch 3 rotatorische Freiheitsgrade.

**Z: Rotation**

Ein lineares Molekül hat nur 2 rotatorische Freiheitsgrade, deren Rotationsachse senkrecht zur Symmetrieachse liegen. Die Rotation um die Symmetrieachse lässt das Molekül invariant. Die verbleibenden Freiheitsgrade entsprechen Oszillationen. Bei einem linearen Molekül mit N Atomen erwartet man somit  $3N - (3+2)$ , bei einem nichtlinearen  $3N - 6$  oszillatorische Freiheitsgrade.

**Z: Rotation lineares Molekül**

Wir betrachten als Beispiel für ein lineares Molekül das CO<sub>2</sub>-Molekül. Wir erwarten  $3N - 3 - 2 = 4$  oszillatorische Freiheitsgrade.

Wir betrachten zunächst die Koordinaten in Richtung der Symmetrieachse. Wenn alle Atome in die gleiche Richtung ausgelenkt werden, so ändert sich die

**Z: CO<sub>2</sub>**



Energie des Moleküls nicht - es handelt sich um eine Translationsbewegung des Gesamtmoleküls. Die andern beiden Linearkombinationen werden als symmetrische, resp. antisymmetrische Streckschwingung bezeichnet.

#### 4.7.2. Symmetrie

Es lohnt sich immer, die Symmetrie eines Moleküls in die Überlegungen mit einzu beziehen. Im Falle des CO<sub>2</sub>-Moleküls hatten wir gezeigt, daß das Molekül 4 oszillatorische Freiheitsgrade besitzt. Gemäß der allgemeinen Herleitung muß in diesem Fall die Säkulargleichung einer 4x4 Matrix gelöst werden - oft eine schwierige Aufgabe.

Das Problem wird aber sehr einfach wenn wir die Symmetrie des Systems berücksichtigen. Es lässt sich zeigen, daß jeder Eigenvektor gemäß einer irreduziblen Darstellung des Moleküls transformiert, d.h. daß die Schwingungen die Symmetrie des Moleküls widerspiegeln.

Im Falle des CO<sub>2</sub> besitzt das Molekül einerseits Rotationssymmetrie um die Achse, andererseits Inversionssymmetrie am C-Atom. Aufgrund der Rotationssymmetrie können wir die Auslenkungen entlang der Achse unabhängig von den Auslenkungen senkrecht dazu betrachten. Die drei z-Koordinaten der Atome ergeben somit drei unabhängige Normalschwingungen. Eine davon entspricht der Translationsbewegung. Die beiden andern können durch ihre Transformationseigenschaften bezüglich der Inversion unterschieden werden: Die symmetrische Streckschwingung entfernt beide O-Atome gleichzeitig vom C-Atom, während die antisymmetrische Streckschwingung das eine Atom entfernt und das andere Atom annähert. Die Auslenkungen haben somit umgekehrtes Vorzeichen, sind also antisymmetrisch.

**Z: CO<sub>2</sub>**

#### 4.7.3. Anwendungen: IR-Spektroskopie

Die Messung von Vibrationsfrequenzen in Molekülen ist eine der wichtigsten analytischen Methoden bei der Untersuchung von molekularen Substanzen.

Man regt dabei das Molekül mit elektromagnetischer Strahlung von geeigneter Wellenlänge an und misst die Absorption der Strahlung als Funktion der Wellenlänge. Aus der gemessenen Absorptionswellenlänge kann man die Kraftkonstanten des untersuchten Moleküls ausrechnen. Bei einem zweiatomigen Molekül geht dies relativ einfach, indem man die Formel

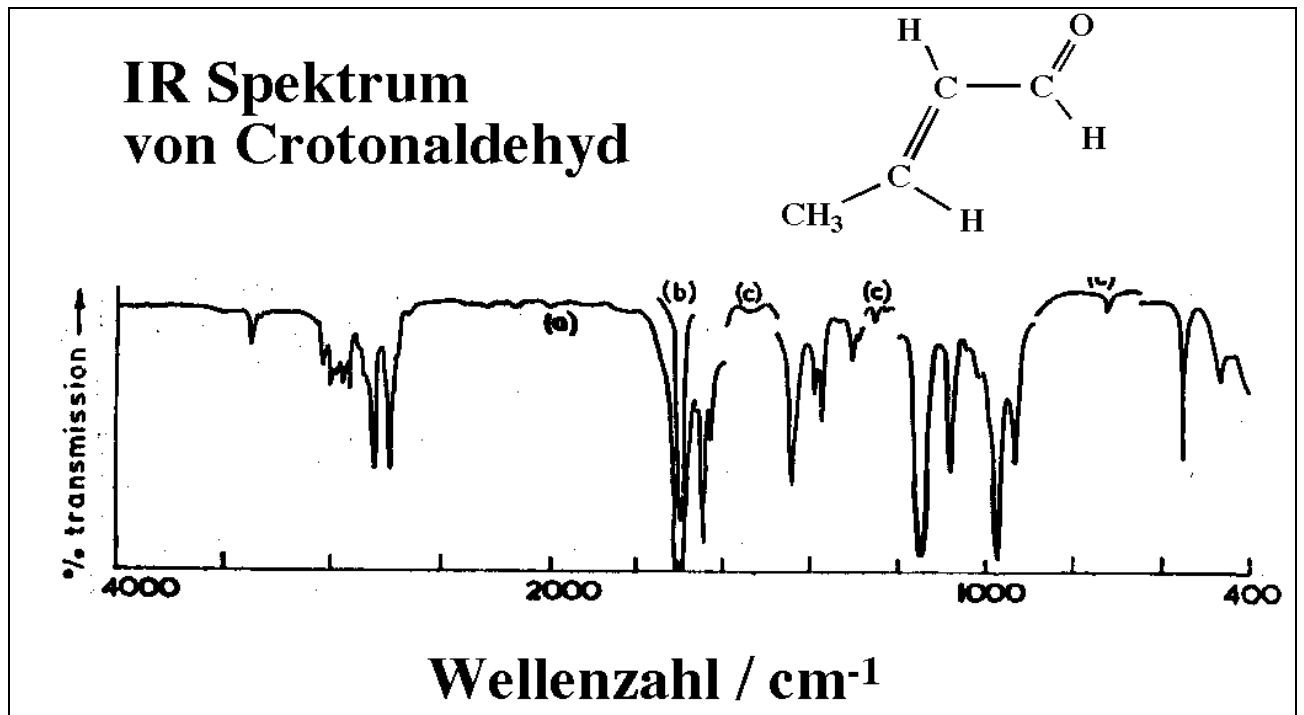
**Z: Prinzip IR-Spektroskopie**

$$\omega = (c/\mu)^{1/2} = (c/m_1 + c/m_2)^{1/2}$$

nach der Kraftkonstante c auflöst.

Bei polyatomaren Molekülen ist dies nicht mehr so direkt möglich, da im Prinzip sämtliche Atome an einer Normalschwingung beteiligt sind. Allerdings hatten wir gesehen, daß lokalisierte Schwingungen, deren Frequenz weit voneinander entfernt ist, nur schwach koppeln.

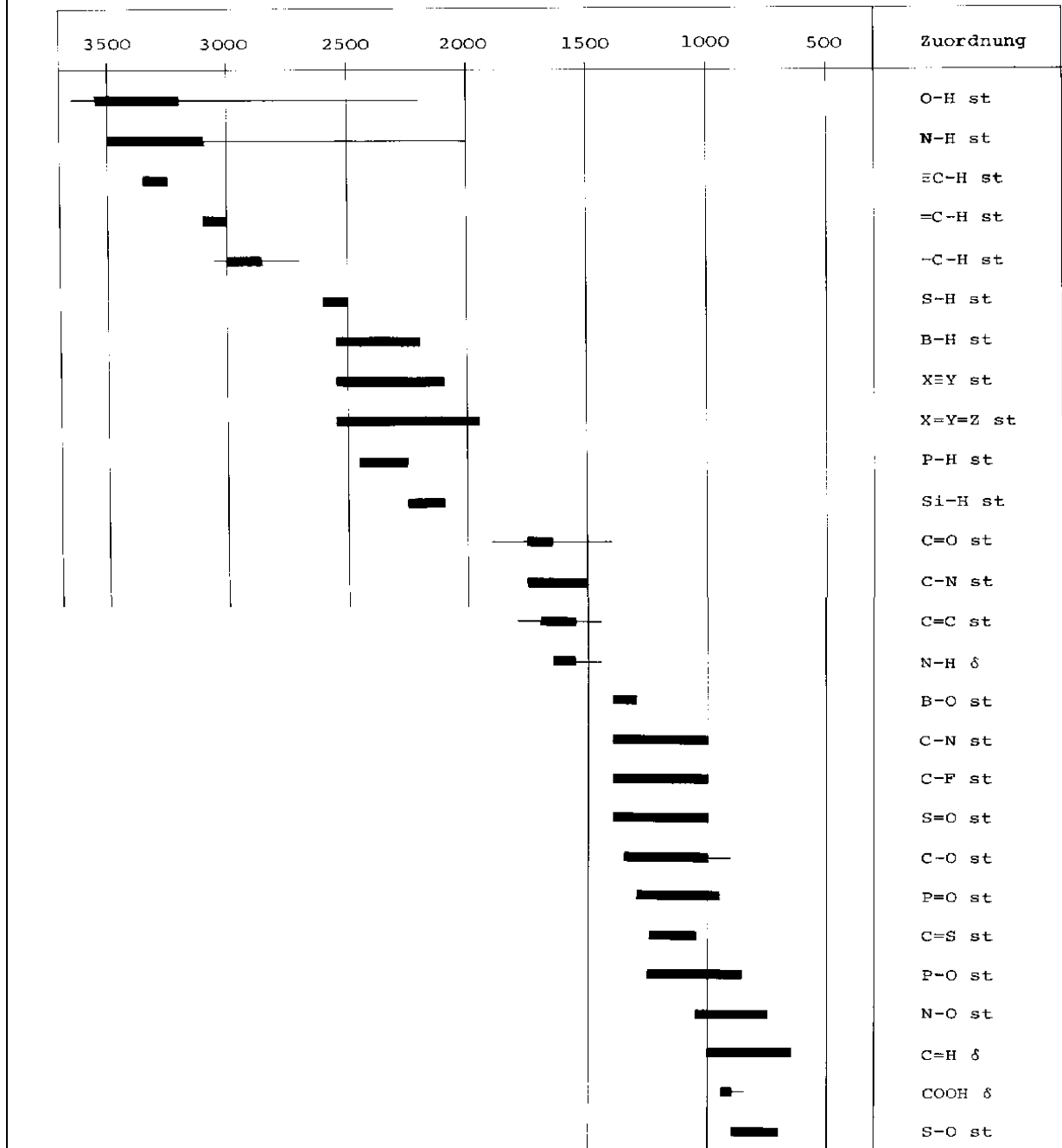
Deshalb kann man in den meisten Fällen die beobachteten Absorptionsbanden einer bestimmten lokalisierten Schwingung zuordnen.



Ein solches Beispiel eines Spektrums zeigt, wie auch in einem relativ einfachen Molekül eine große Zahl von Absorptionsbanden beobachtet werden kann. Während es in der Praxis schwierig ist, ohne aufwändige numerische Rechnungen die einzelnen Banden eindeutig einer bestimmten Normalkoordinate zuzuordnen, kann man direkt Aussagen machen, welche Bereiche welcher Art von Schwingungen zugeordnet werden kann. Die höchsten Frequenzen sind immer den Streckschwingungen des Wasserstoffatoms zuzuordnen, da hier die geringste Masse bewegt wird.

## Die wichtigsten IR-Banden

E. Pretsch, T. Clerc, J. Seibl, and W. Simon, 'Tabellen zur Strukturaufklärung organischer Verbindungen', Springer, Berlin (1976).



Physikalische Chemiker haben eine große Zahl von spektralen Bereichen charakterisiert. Diese Übersicht stellt eine grobe Klassifizierung dar. Sehr viel genauere Aussagen sind möglich wenn größere Teile von Molekülen verglichen werden, und aus Abweichungen von den errechneten Werten kann man Rückschlüsse auf strukturelle Besonderheiten ziehen. Die empirischen Erfahrungen, welche in solchen Tabellen liegen sind bis heute auch relativ aufwendigen quantenmechanischen Rechnungen noch überlegen.