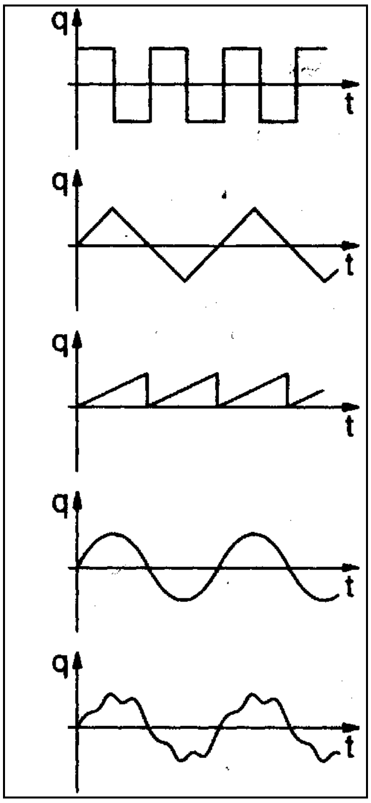
4. Schwingungen

4.1. Allgemeines

4.1.1. Beispiele und Definition

Exp1: Ebenes Pendel

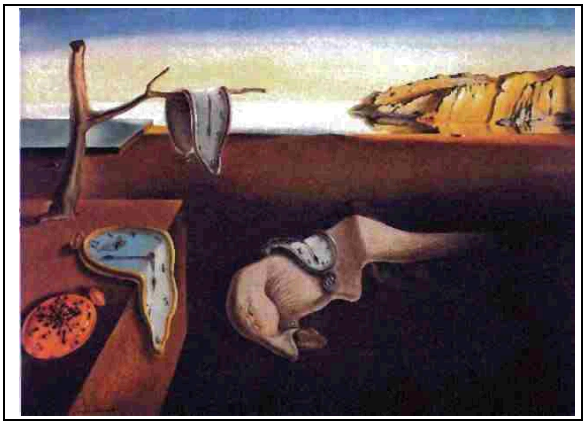
Das klassische Beispiel eines schwingenden Systems ist das Pendel.



Allgemein ist eine Schwingung definiert als eine periodische Zustandsänderung, d.h. als eine Zeitabhängigkeit, welche nach einer Periode T in den ursprünglichen Zustand zurückkehrt:

$$f(t+T) = f(t) .$$

Einige Beispiele für periodische Bewegungen sind in der Figur dargestellt. Die Größe f, welche diese Zeitabhängigkeit zeigt, kann eine mechanische Größe sein, aber auch eine elektrische, chemische, thermische … . Meist zeigen verschiedene Größen (z.B. Ort, Geschwindigkeit) die gleiche Zeitabhängigkeit. Schwingungen entstehen immer dann wenn einzelne Komponenten (mechanische, elektrische etc.) nicht starr aneinander gekoppelt sind. Wie sich das System während der Periode verhält spielt hierbei zunächst keine Rolle.



Schwingungen spielen in vielen Systemen eine wichtige Rolle; insbesondere stellen sie die Basis von Zeitmessungen. Sogar das einfache mathematische Pendel hat seine Anwendung in der Wanduhr gefunden. Jede Armbanduhr besitzt ein schwingendes Element; in mechanischen Uhren ähnelt es diesem Schwingpendel, in elektronischen Uhren wurde dieses durch einen Quarzstab ersetzt. In den Atomuhren, welche den internationalen Zeitstandard definieren sind es Schwingungen der Elektronenhülle von Atomen.

Elektronische Oszillatoren sind die Basis aller modernen Elektronik, insbesondere aber der digitalen.

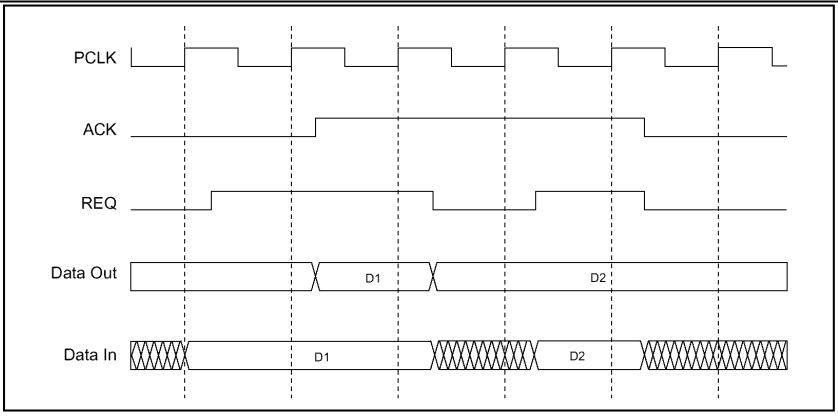
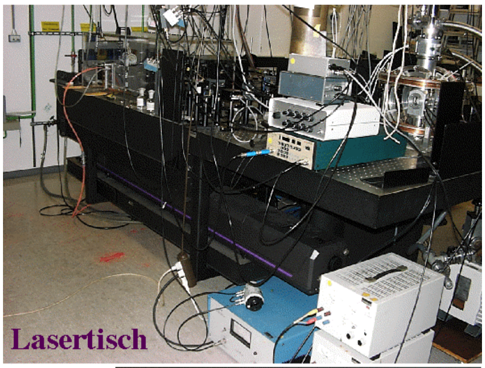
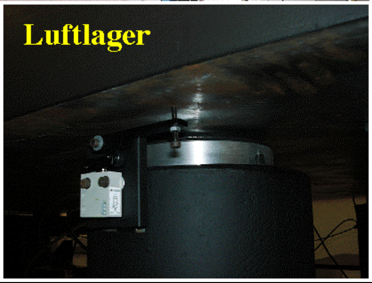


Figure 5-25. Burst Mode Transfer Example

Störende Schwingungen





Praktisch alle Systeme zeigen Schwingungen in der einen oder anderen Art. Machmal, wie z.B. in einem Laserlabor, können sie stören und man muss man mit großem Aufwand versuchen, sie zu reduzieren.

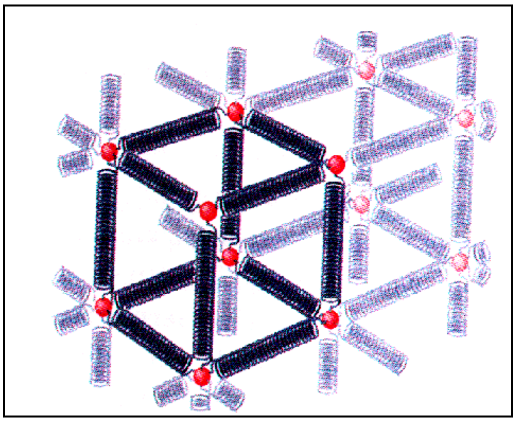
Z: Molekül

In allen mikroskopischen Systemen spielen Schwingungen eine große Rolle. So sind die Atome in Molekülen durch Kräfte zusammengehalten, die qualitativ wie eine Feder wirken. Unter dem Einfluss dieser Bindungskräfte führen sie Schwingungen um ihre Gleichgewichtslage durch.

Z: IR Spektrum

Die Schwingungen der Atome können im Experiment gemessen werden.

Auch in einem Festkörper sind die Atome nicht starr miteinander verbunden, sondern durch Bindungskräfte, welche Schwingungen erlauben, welche mit der Temperatur zunehmen.

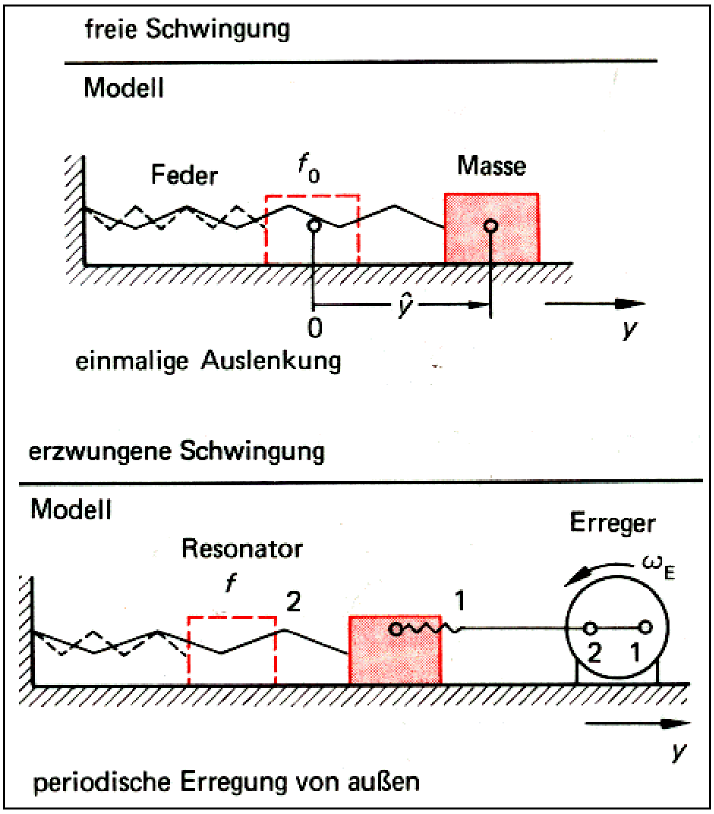


Eine Reihe von elektrischen, resp. elektromagnetischen Systemen zeigen Schwingungsphänomene. Elektromagnetische Wellen, also auch Licht, stellen schwingende Systeme dar.

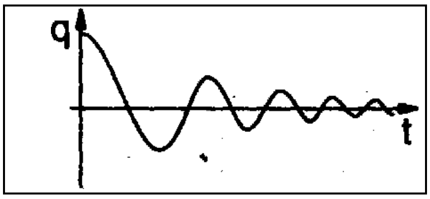
Z: Erzeugung und Übertragung von Licht

Bei der Erzeugung von Licht gehen die Schwingungen von atomaren Dipolen auf das elektromagnetische Feld über und beim Nachweis, also auch im Auge, überträgt das elektromagnetische Feld diese Schwingungen wieder auf ein materielles System, in diesem Fall die Sinneszellen der Netzhaut.

4.1.2. Klassifikation und Übersicht



Man unterscheidet zwischen freien und erzwungenen Schwingungen. Im ersten Fall wird dem System Energie zugeführt, um es in Bewegung zu setzen, dann entwickelt es sich ohne äußeren Einfluss. Eine erzwungene Schwingung wird durch eine periodische äußere Kraft angeregt.

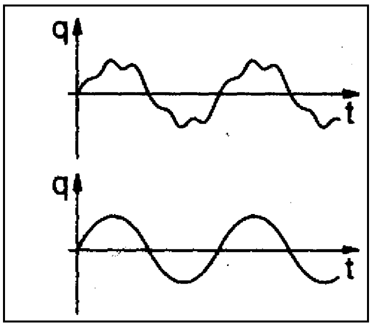


In vielen Fällen sind Schwingungen nicht vollständig periodisch, sondern gedämpft, weil sie Energie an ihre Umgebung abgeben. Man spricht in diesem Fall von einer gedämpften Schwingung, im Gegensatz zu den ungedämpften Systemen, welche nur als Idealfälle existieren.

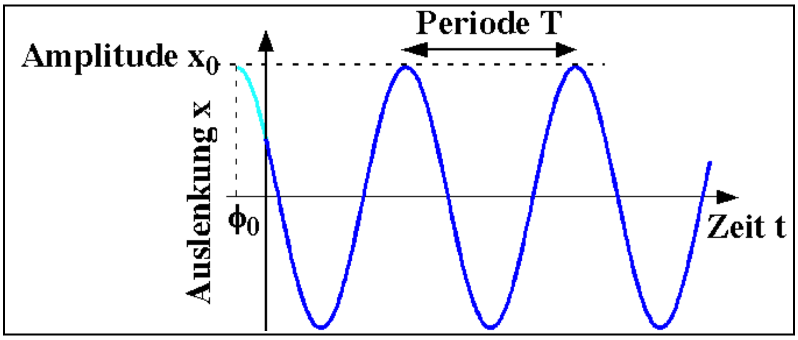
Die mathematische Behandlung dieser großen Zahl unterschiedlicher Phänomene ist identisch; sie werden deshalb hier gemeinsam diskutiert. Wie in anderen Gebieten der Physik können wir hier sehr viele Gemeinsamkeiten feststellen. So können wir die Resultate, die uns die Diskussion des schwingenden Pendels liefert, direkt auf viele andere Systeme übertragen. Es ist deshalb nützlich, zunächst einige Eigenschaften zu diskutieren, die allen schwingenden Systemen gemeinsam sind.

4.2. Der Harmonische Oszillator

4.2.1. Harmonische Schwingungen



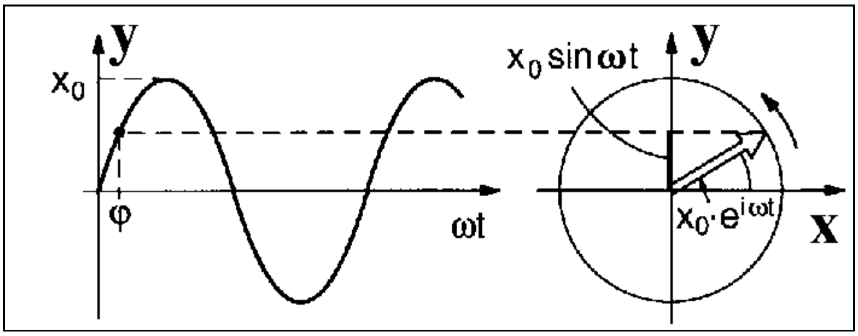
Die Zeitabhängigkeit einer allgemeinen Schwingung ist beliebig, abgesehen von der Periodizität. Die mathematische Behandlung solcher Systeme kann etwas schwierig werden. Wir beschränken deshalb hier die detaillierte Diskussion auf Systeme, bei denen die Zeitabhängigkeit durch eine Winkelfunktion (sin, resp. cos) beschrieben werden kann. Eine solche Zeitabhängigkeit wird als harmonisch bezeichnet.



Die Zeitabhängigkeit einer harmonischen Schwingung kann somit allgemein als

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t+\phi_0)$$

geschrieben werden. Hier sind $\omega = 2\pi\nu$ die Kreisfrequenz, $\nu = 1/T$ die Frequenz, und T die Periode der Schwingung, ϕ_0 die Anfangsphase.



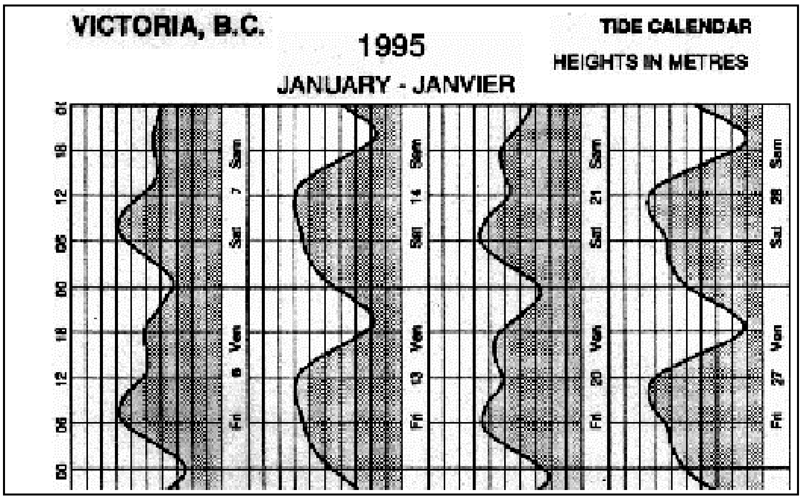
Eine harmonische Oszillation erhält man z.B. wenn man eine Komponente einer Kreisbewegung betrachtet. Die horizontale Position eines rotierenden Zeigers kann z.B. als

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

geschrieben werden, die vertikale Position

$$y(t) = x_0 \sin(\omega t) = x_0 \cos(\omega t - \pi/2).$$

Ein Beispiel für eine Kreisbewegung, die wir als Schwingung beobachten, sind Ebbe und Flut.



Allgemein ist ein harmonischer Oszillator ein eindimensionales System, das einen stabilen Gleichgewichtspunkt besitzt, in dessen Nähe das Potential quadratisch verläuft.

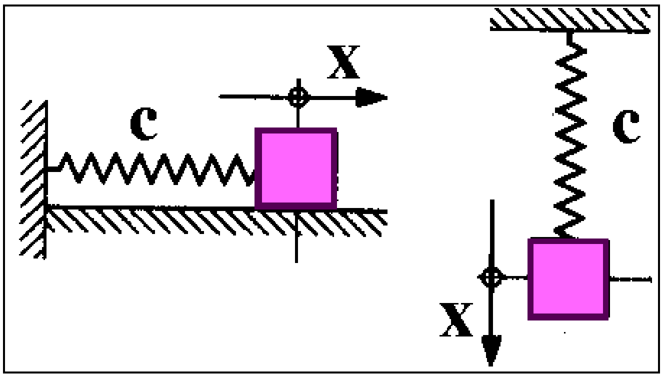
Z: Potenzial, Kraft

Die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators ist dadurch charakterisiert daß auf den Körper eine Kraft wirkt, deren Richtung auf den Gleichgewichtspunkt gerichtet ist, und deren Betrag proportional zur Auslenkung aus dem Gleichgewicht ist,

$$F = - k x ,$$

wobei die Federkonstante k die Stärke der Feder parametrisiert.

4.2.2. Das Federpendel



Exp.: Federpendel

Um zu verstehen wie eine Schwingung zustande kommt betrachten wir zunächst ein einfaches Pendel, bestehend aus einer Masse und einer Feder, welche als masselos angenommen wird und für die das Hooke'sche Gesetz gelten soll:

$$F = - c x ,$$

wobei c die Federkonstante darstellt.

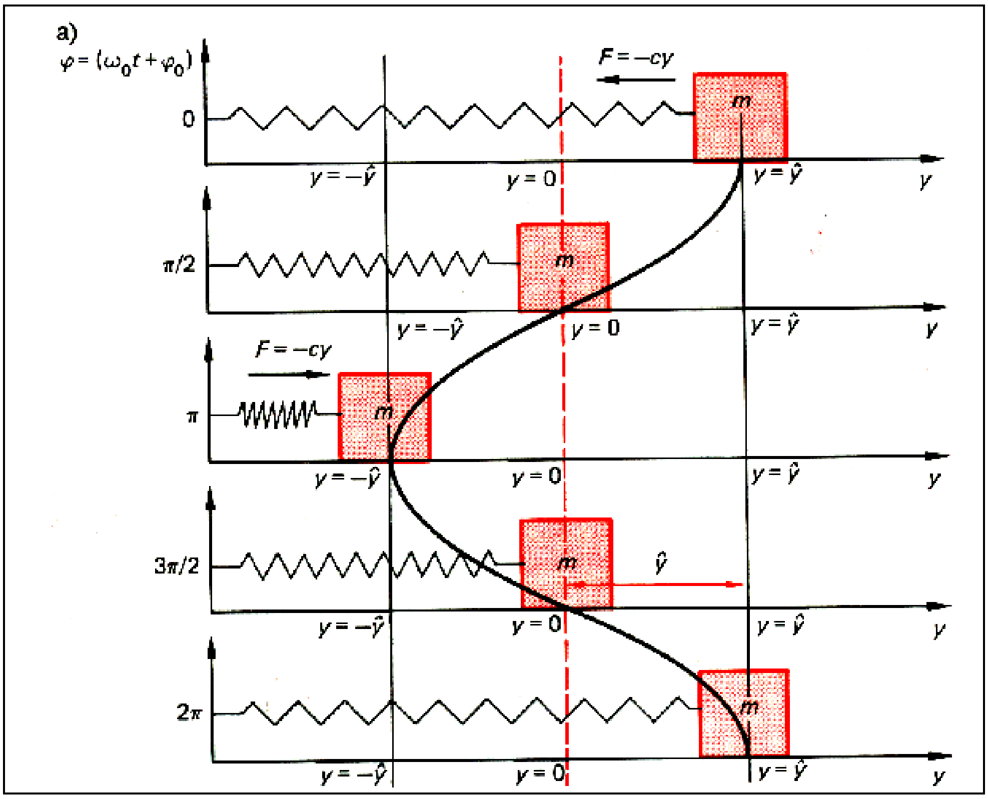
Damit erhalten wir für die Masse eine Bewegungsgleichung

$$m a = F = - c x = m \frac{d^2x}{dt^2} .$$

Dies ist eine eindimensionale (eine Variable), lineare (d.h. die Variablen und deren Ableitung kommen nur in der ersten Potenz vor) Differentialgleichung zweiter Ordnung (d.h. max.

zweite Ableitung) mit konstanten Koeffizienten (d.h. kein Koeffizient ist explizit zeitabhängig).

Die Kraft ist immer der Auslenkung entgegengerichtet und proportional zu ihr. Bei maximaler Auslenkung ist auch die Kraft maximal, bei verschwindender Auslenkung verschwindet die Kraft.



4.2.3. Freie Schwingung

Wir betrachten zunächst den Fall einer freien Schwingung: das System wird zunächst ausgelenkt und dann sich selber überlassen wird. Solche Gleichungen können allgemein durch den Ansatz

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

gelöst werden. Hier stellt ω_0 die Frequenz, x_0 die Amplitude, und ϕ die Phase der Schwingung dar. Um den Ansatz zu verifizieren und diese Parameter zu bestimmen setzen wir den Ansatz in die Differentialgleichung ein. Wir erhalten

$$- c\, x = - c\, x_0 \cos(\omega_0 t + \phi) = m \frac{d}{dt}(- x_0\, \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)) = - m\, x_0\, \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi)\ .$$

Daraus erhält man

$$- c = - m\, \omega_0^2$$

oder für die Kreisfrequenz ω_0, resp. Periode T

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad\qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}\ .$$

Die Amplitude x_0 und die Phase ϕ sind durch die Anfangsbedingungen (Ort, Geschwindigkeit) bestimmt:

$$x(0) = x_0 \cos(\phi) \qquad \dot{x}(0) = - x_0\, \omega_0 \sin(\phi) .$$

Dieses Gleichungssystem kann aufgelöst werden nach den Parametern x_0, ϕ :

$$x_0 = x(0) / \cos(\phi) \qquad \phi = \tan^{-1}(- \dot{x}(0)/(x(0)\omega_0)) .$$

Z: Phasen

Eine Schwingung, die bei t=0 die maximale Auslenkung besitzt, hat Phase $\phi = 0$. Ist die Auslenkung minimal (x(0) = 0), und bewegt sich das System in Richtung positive Auslenkung, d.h. ist es nach einer viertel Periode bei der maximalen Auslenkung, so ist die Phase $\phi = - 90^o = -\pi/2$. Bewegt sich das System in Richtung negative Auslenkung, so ist die Phase positiv.

4.2.4. Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung

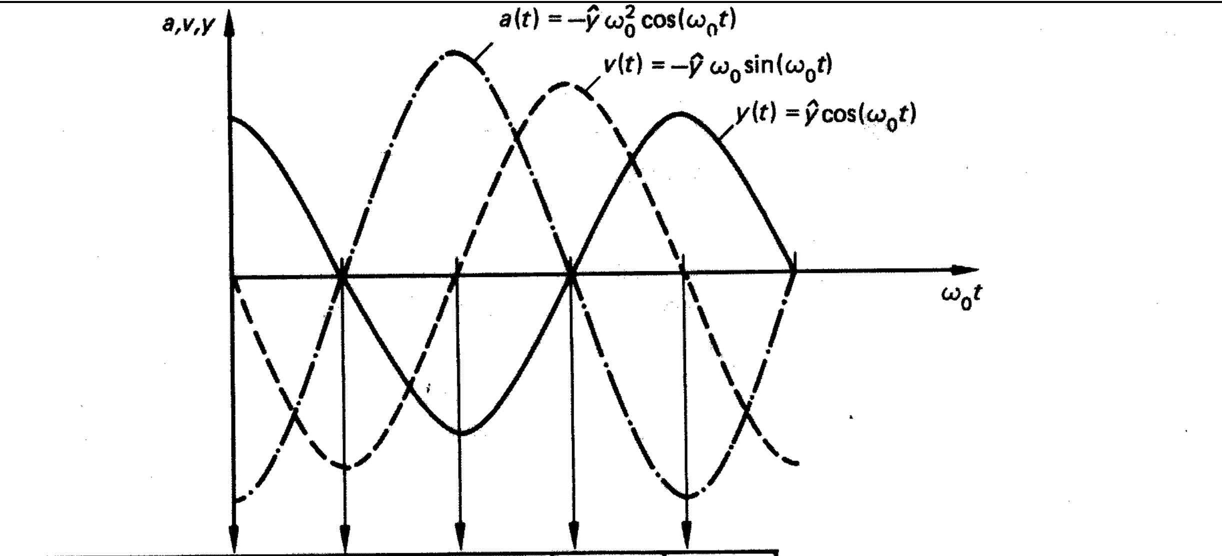
Es ist auch interessant, die Phase von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung zu vergleichen: Bewegt sich die Masse mit

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0\, t + \phi) ,$$

so ist die Geschwindigkeit

$$v(t) = \dot{x}(t) = - \omega_0\, x_0 \sin(\omega_0\, t + \phi) ,$$

also mit der gleichen Frequenz (wenn das System periodisch ist muss für alle Größen die gleiche Periode gelten), aber 90 Grad außer Phase.



Winkel / Größe	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π		
$y(t)$	$\hat{y}$	0	$-\hat{y}$	0	$\hat{y}$	$y(t) = \hat{y}\cos(\omega_0 t)$	$y_{max} = \hat{y}$
$v(t)$	0	$-v_{max}$	0	v_{max}	0	$v(t) = -\hat{y}\omega_0 \sin(\omega_0 t)$	$v_{max} = \hat{y}\,\omega_0$
$a(t)$	$-a_{max}$	0	a_{max}	0	$-a_{max}$	$a(t) = -\hat{y}\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$	$a_{max} = \hat{y}\omega_0^2$

Die Beschleunigung

$$a(t) = \ddot{x}(t) = - \omega_0^2\, x_0 \cos(\omega_0\, t + \phi)$$

besitzt ebenfalls die gleiche Periode, ist aber weitere 90 Grad, also gegenüber dem Ort 180 Grad außer Phase.

Charakteristische Größen ungedämpfter harmonischer Schwingungen.

Kenngröße	**Bedeutung**
	Periodizität
Periodendauer T	kleinste Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden, gleichen Schwingungszuständen (z. B. zeitlicher Abstand zwischen zwei Maxima oder Minima)
Frequenz f	Anzahl der Schwingungen je Zeit $f = \frac{1}{T}$ $\quad 1\ \mathrm{Hz} = 1\ \mathrm{s}^{-1} = [f]$
Kreisfrequenz ω	$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ $\quad 1\ \mathrm{s}^{-1} = [\omega]$
	Auslenkungen
Augenblickswert $y(t)$	momentane Auslenkung zur Zeit t (errechenbar aus Gl. (5-3) bis (5-5))
Amplitude $\hat{y}$	maximaler Wert der Auslenkung (für $\sin(\omega t + \varphi_0)$ oder $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$)
	Phasenwinkel
Nullphasenwinkel φ_0 (Anfangsphase)	Anfangslage des schwingenden Systems zur Zeit $t = 0$. Es folgt aus Gl. (5-5) $\varphi_0 = \arccos \frac{y(0)}{\hat{y}}$ $\quad$ (5-6) $\varphi_0 > 0$: voreilend $\varphi_0 < 0$: nacheilend
allgemeiner Phasenwinkel φ	$\varphi = \omega t + \varphi_0$ Summe der Phasenlage eines Punktes zur Zeit t (ωt) und des Nullphasenwinkels φ_0
	Phase
Phase	augenblicklicher Zustand einer Schwingung (bestimmt durch zwei Schwingungsgrößen, z. B. Weg und Zeit)

Hier sind die wichtigsten Größen zusammengestellt, die in harmonischen Oszillatoren vorkommen.

4.2.5. Energie

Das Federpendel enthält Energie in zwei unterschiedlichen Formen: kinetische und potenzielle Energie. Die potenzielle Energie ist in der Feder gespeichert:

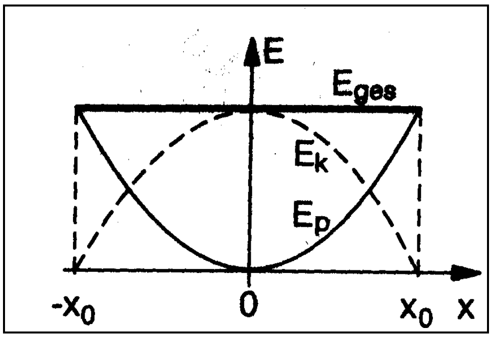
$$E_{pot} = c/2\ x^2 = c/2\ x_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)\ .$$

Die kinetische Energie ist

$$E_{kin} = m/2\, \dot{x}^2 = m\, \omega_0^2\, x_0^2/2\, \sin^2(\omega_0\, t + \phi) = c\, x_0^2/2\, \sin^2(\omega_0\, t + \phi)\, .$$

Damit ist die Gesamtenergie

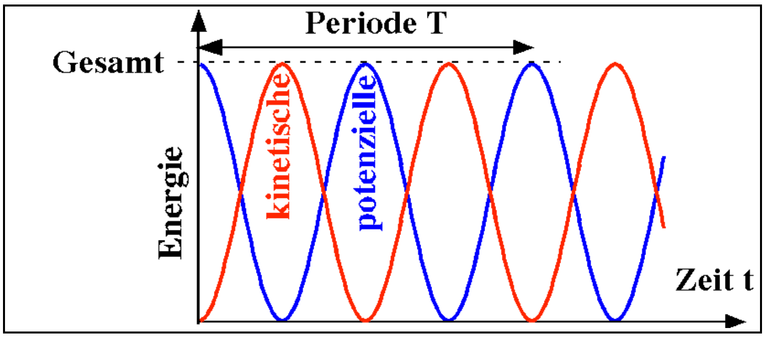
$$E_{tot} = E_{pot} + E_{kin} = c/2\, x_0^2$$



unabhängig von der Zeit, d.h. konstant. Dies ist eine Manifestation der Energieerhaltung.

In der Ruhelage ist die Feder entspannt, die potenzielle Energie verschwindet somit, während die Geschwindigkeit und damit die potenzielle Energie maximal ist. Bei der maximalen Auslenkung ist hingegen die Geschwindigkeit Null, die kinetische Energie verschwindet, während die potenzielle Energie maximal wird.

Die einzelnen Beiträge zur Energie sind zeitabhängig, während die Gesamtenergie konstant bleibt: die Energie wird somit zwischen einzelnen Reservoirs periodisch ausgetauscht, wobei die Periode des Energieaustausches halb so groß ist wie die Periode der Auslenkung. Dieser Energieaustausch tritt bei allen schwingenden Systemen auf.



4.2.6. Der h.O. als Modellsystem

Das mathematische Pendel, auch als harmonischer Oszillator bekannt, ist einerseits ein attraktives Modellsystem, weil er analytisch leicht lösbar ist. Er spielt aber auch in der Natur eine sehr wichtige Rolle. Der Grund dafür liegt darin, daß sich die potentielle Energie sehr vieler Systeme in der Nähe ihres Gleichgewichts in guter Näherung durch eine Parabel annähern lässt.

Z: Energie U(x)

Das sieht man rasch, wenn man die Energie in der Nähe eines lokalen Minimums als Taylor-Reihe entwickelt:

$$U(x) = U(x_0) + dU/dx|_{x0}(x\text{-}x_0) + 1/2\, d^2U/dx^2|_{x0}(x\text{-}x_0)^2 + 1/3!\, d^3U/dx^3|_{x0}(x\text{-}x_0)^3 + ..$$

Am Gleichgewichtspunkt ist der erste Term der einzige, der nicht verschwindet; mit zunehmender Entfernung spielen Terme höherer Ordnung eine zunehmende Rolle, während in der Nähe nur die Terme niedriger Ordnung berücksichtigt werden müssen.

Der erste Term hat keinen Einfluß auf die Dynamik des Systems. Der lineare Term der Entwicklung verschwindet im Gleichgewichtspunkt per Definitionem. Wenn der quadratische

Term nicht verschwindet, so ist in der Nähe des Minimums immer ein Bereich vorhanden, indem er den größten Beitrag zur Dynamik des Systems liefert. Die Forderung, daß das System sich in einem stabilen Gleichgewicht befindet bedeutet dann, daß die Energie ein Minimum besitzt, daß also die zweite Ableitung positiv ist. Wenn wir die erste Ableitung bilden

$$- dU(x)/dx = F(x) = - (d^2U/dx^2|_{x0})(x-x_0) + O((x-x_0)^2),$$

so finden wir durch Vergleich mit der Bewegungsgleichung

$$F(x) = -c\ (x-x_0) = - (d^2U/dx^2|_{x0})(x-x_0)$$

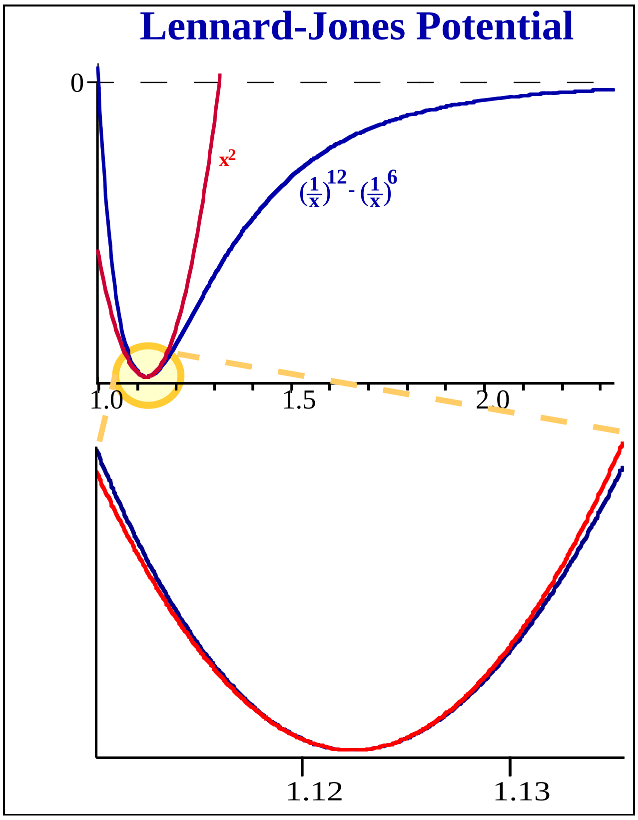
identifizieren wir

$$c\ = m\ \omega_0^2 = (d^2U/dx^2|_{x0})\ .$$

Die Resonanzfrequenz ist damit durch die Masse des Oszillators und die zweite Ableitung des Potentials am Gleichgewichtspunkt bestimmt.

Ein Beispiel eines solchen Potentials ist das Lennard-Jones Potential, welches als

$$U_{LJ}(x) = 4\ \varepsilon\ [(\sigma/x)^{12} - (\sigma/x)^6]$$



definiert ist. Die Konstanten ε und σ bestimmen Position und Tiefe des Minimums. Dieses Potential beschreibt die Wechselwirkung zwischen Atomen oder Molekülen, die durch die Van der Waals Wechselwirkung aneinander gebunden sind. Für kurze Abstände überwiegt die Abstoßung, während für große Abstände die Wechselwirkung sehr mit $1/x^6$ abfällt. Dazwischen gibt es ein Minimum der potentiellen Energie; die Position dieses Minimums bestimmt z.B. den Abstand zwischen Molekülen in einem Kristall und damit dessen Dichte.

Obwohl das Potential sicher nicht die Form einer Parabel besitzt, kann man es doch in der Nähe des Minimums durch eine Parabel annähern. Je näher man sich dem Minimum nähert, desto besser ist die Näherung.

4.2.7. Anharmonizität

Z: anharmonisches Potential

Dies zeigt, daß die meisten Systeme in der Nähe des Gleichgewichts wie ein harmonischer Oszillator verhalten. Für größere Auslenkungen werden natürlich die Terme höherer Ordnung wichtiger und die Kräfte werden nichtlinear, resp. der Oszillator anharmonisch. Zu den wichtigsten damit im Zusammenhang stehenden Abweichungen gehört, daß für große Auslenkungen die Frequenz von der Auslenkung abhängt.

Exp: Anharmonisches Kreispendel

Diese Abweichung kann man z.B. an diesem Kreispendel zeigen. Für kleine Auslenkungen ist die (halbe) Schwingungsperiode konstant, für größere Auslenkungen wird sie größer. Theoretisch sollte die Schwingungsperiode mit der Anfangsauslenkung β_0 wie folgt zunehmen:

$$T(\alpha_0) = T(0)\, 2K(\sin\alpha_0)/\pi\ ,$$

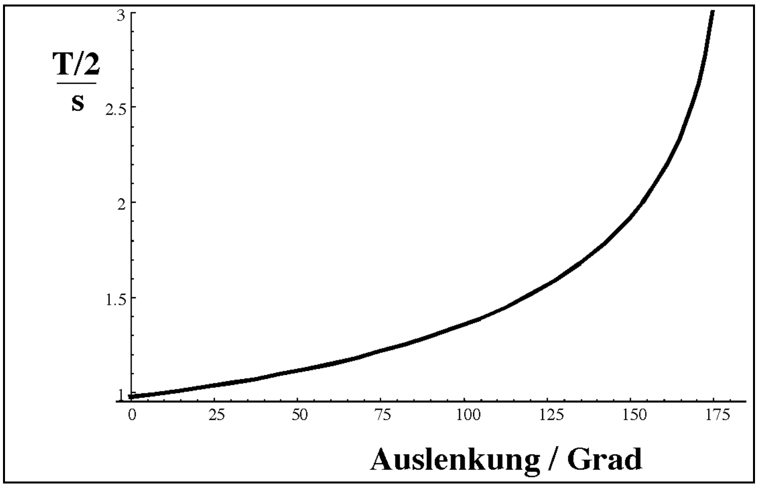
wobei

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

ein vollständiges elliptisches Integral darstellt.

Messresultate:

β_0/Grad	T/2 / sec
10	0.972
30	0.985
60	1.040
90	1.15
100	1.23
120	1.34
130	1.52



Als Extremfall kann man sich vorstellen, daß das Pendel senkrecht nach oben gerichtet ist, so daß es in dieser Position bleibt - seine Schwingungsperiode wird dann unendlich.

Exp. 62a: chaotisches Doppelpendel

Nicht immer sind Schwingungen periodisch. Sind dir Kräfte z.B. eine nichtlineare Funktion der Auslenkung, so kann die Bewegung nichtperiodisch werden. Man spricht in solchen Fällen von nichtlinearer Dynamik, resp. Chaos. Man kann zeigen, dass es für solche Systeme nicht möglich ist, präzise Angaben über die zeitliche Entwicklung zu machen. Sie wird deshalb im Rahmen dieser Einführungsvorlesung nicht weiter diskutiert. Sie spielt jedoch in vielen Systemen eine wichtige Rolle. So kann man zeigen dass das Wetter sich chaotisch verhält. Es ist deshalb prinzipiell nicht möglich, exakte langfristige Wettervorhersagen zu erstellen. Das Problem liegt darin dass die Anforderungen an die Präzision der Berechnungen exponentiell mit der Prognosendauer wächst.

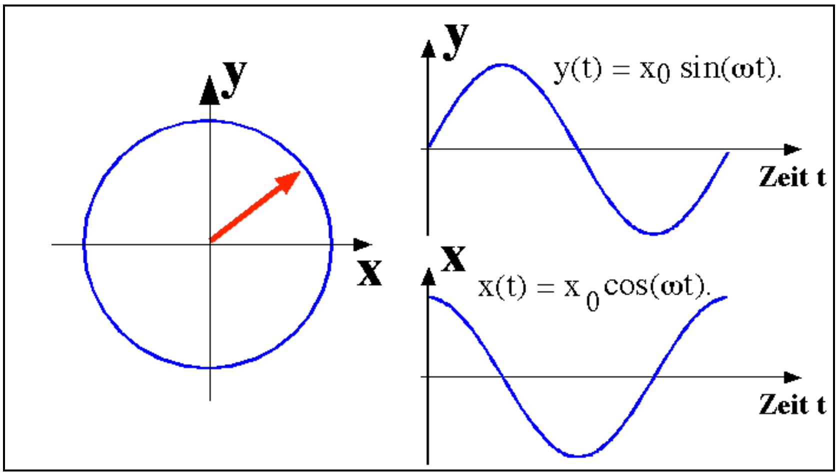
4.2.8. Komplexe Amplitude

Auf den engen Zusammenhang zwischen harmonischen Oszillatoren und Kreisbewegung wurde bereits in der Einleitung hingewiesen.

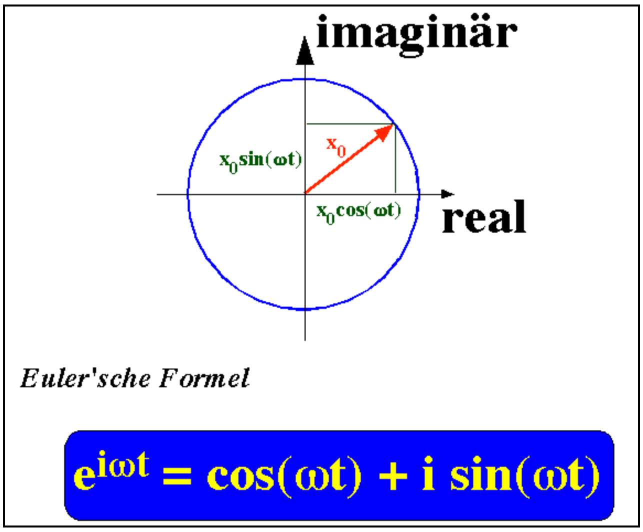
Die beiden Koordinaten werden geschrieben als

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

$$y(t) = x_0 \sin(\omega t).$$



Dabei ist es nicht notwendig, die beiden Koordinaten getrennt zu behandeln; man kann sie über die Euler'sche Beziehung zu einer komplexen Variablen kombinieren.



Dazu wird die Variable x mit dem Realteil der komplexen Variablen identifiziert, y mit dem Imaginärteil. Gemäß der Euler'schen Formel

$$x_0\, e^{i(\omega t+\phi_0)} = x_0 \{\cos(\omega t+\phi_0) + i \sin(\omega t+\phi_0)\}$$

Damit lässt sich mathematisch einfacher umgehen. So ist die Ableitung

$$\frac{d}{dt}\, e^{i(\omega t+\phi_0)} = i\omega\, e^{i(\omega t+\phi_0)}$$

wieder die Funktion selber.

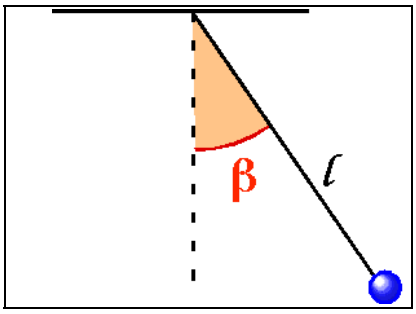
4.3. Weitere schwingende Systeme

4.3.1. Allgemeines

Z: Auslenkung, Kraft

Schwingungen erhält man immer dann wenn die Kraft der Auslenkung entgegengerichtet ist. Ist sie außerdem proportional zur Kraft, so erhält man eine harmonische Schwingung.

4.3.2. Das mathematische Pendel



Das System besteht aus einer punktförmigen Masse, die an einer masselosen, unelastischen Schnur der Länge ℓ aufgehängt ist. Die Masse sei um einen Winkel β aus der Vertikalen ausgelenkt. Wir können eine Bewegungsgleichung für β schreiben indem wir das Newton'sche Gesetz mit der Schwerkraft kombinieren:

$$F = m\,a = m\,\ell\,\ddot{\beta} = -\,m\,g\,\sin\beta \ .$$

Für kleine Auslenkungen kann man den Sinus durch den Winkel annähern und erhält eine Bewegungsgleichung für einen harmonischen Oszillator

$$\ddot{\beta} = -\,\beta\,g\,/\,\ell \ .$$

Dies entspricht offenbar einem harmonischen Oszillator mit Frequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \ ,$$

also unabhängig von der Masse des Pendels.

Exp. 4: Ebenes Pendel, Schwingungsdauer

Dieses einfache Fadenpendel hat eine Länge von 1 m und müsste demnach eine Schwingungsdauer von

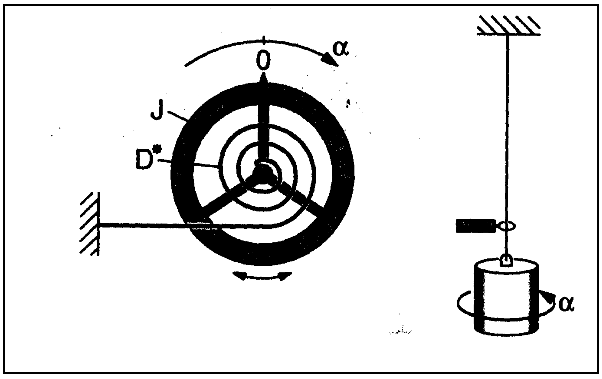
$$T = 2\pi(1/9.81)^{1/2}\ \text{sec} = 2.0\ \text{sec}$$

haben – in guter Übereinstimmung mit dem Experiment. Wird die Länge des Fadens auf 0.25 m verkürzt, so halbiert sich die Periode auf 1 sec.

Dieser einfache Zusammenhang, und die Tatsache, daß nur die Länge des Pendels für seine Schwingungsdauer verantwortlich ist, waren einer der größten Erfolge der frühen physikalischen Forschung.

Die Schwingungsdauer ist in dieser Näherung unabhängig von der Auslenkung. Verwendet man die Näherung $\sin\beta \sim \beta$ nicht, findet man eine Periode, die man als Reihenentwicklung in β schreiben kann. Bei einer Auslenkung von 30^o ist der Fehler etwa 2%; bei 10^o beträgt der Fehler etwa 1%.

4.3.3. Torsionsschwinger



Ein Torsionsschwinger oder Drehpendel kann sich um eine Achse drehen, wobei eine Rückstellkraft wirkt, die proportional zur Auslenkung β ist. Für die Drehbewegung gilt:

$$M = I\,\ddot{\beta} = -\,c\,\beta\,.$$

I ist das Trägheitsmoment für diese Achse und c die Winkelrichtgröße. Somit erhält man eine Schwingung mit der Kreisfrequenz

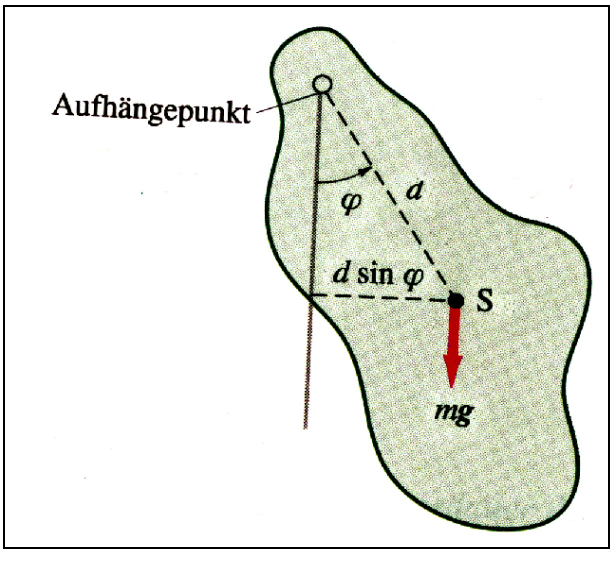
$$\omega = \sqrt{\frac{c}{I}}\,.$$

Diese Beziehung kann man u.a. verwenden, um Trägheitsmomente zu messen:

$$I = c/\omega\,.$$

Die Winkelrichtgröße c wird zunächst mit Hilfe eines Körpers mit bekanntem Massenträgheitsmoment bestimmt, danach wird der unbekannte Körper eingesetzt.

4.3.4. Das physikalische Pendel



Ein physikalisches Pendel ist ein starrer Körper, der um einen Punkt A drehbar gelagert ist. Wie beim Drehpendel ist das Produkt aus Winkelbeschleunigung $\ddot{\phi}$ und Trägheitsmoment I gegeben durch die Rückstellkraft. Diese ist hier gegeben durch das Drehmoment als Produkt aus Schwerkraft F_G = m g und Auslenkung des Schwerpunktes, d $\sin\phi$

$$M = I\,\ddot{\phi} = -\,m\,g\,d\,\sin\phi\,.$$

Wir können wiederum die Näherung $\sin\phi \sim \phi$ für kleine Auslenkungen machen. Damit wird die

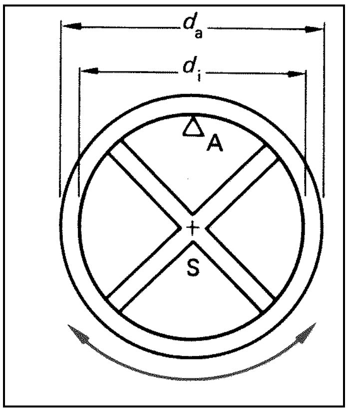
Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,d}{I}} \ .$$

Dies entspricht der Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels mit der Pendellänge

$$\ell_{red} = \frac{I}{m\,d} \ .$$

Exp. 49a: Reifenpendel



Wir betrachten als Beispiel ein Rad, welches sich um einen Aufhängepunkt am Rand dreht. Gemäß dem Steiner'schen Satz beträgt das Trägheitsmoment

$$I_A = I_0 + m\,d^2 = 2\,m\,d^2 \ .$$

Somit ist die Kreisfrequenz

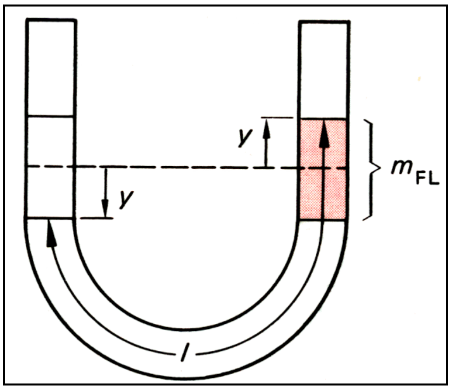
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2md}} \ .$$

Dies entspricht bei einem Radius d = xxx cm einer Periode

$$T = 2\pi/\omega_0 = ,$$

in guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert (T = 1.38 s).

4.3.5. Flüssigkeitspendel im U-Rohr



Wir betrachten eine Flüssigkeitssäule in einem U-Rohr. Sind beide Enden auf gleicher Höhe so ist das System im Gleichgewicht. Ist die Säule um y verschoben, so entsteht eine rücktreibende Gewichtskraft. Die Bewegungsgleichung enthält die Gesamtmasse m der Flüssigkeit

$$m = \ell\,A\,\rho \ ,$$

wobei ℓ die Länge der Flüssigkeitssäule darstellt, A die Querschnittsfläche und ρ die Dichte. Die resultierende Gewichtskraft ist proportional zur Massendifferenz zwischen den beiden Armen,

$$\Delta m = 2\,y\,A\,\rho \ .$$

Damit ist die Bewegungsgleichung

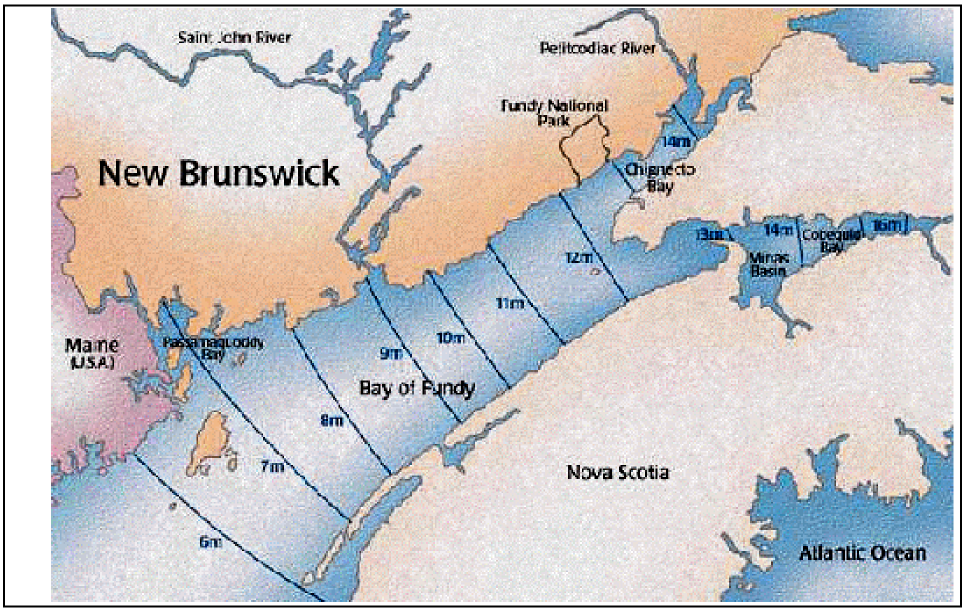
$$F = m\,a = \ell\,A\,\rho\,\ddot{y} = -\,2\,y\,A\,\rho\,g\ .$$

$$\ddot{y} = -\,2\,y\,g\,/\,\ell\ .$$

Somit beträgt hier die Kreisfrequenz

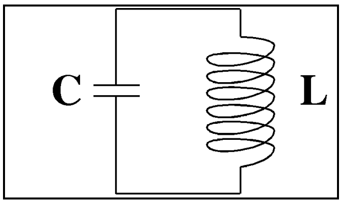
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}\ ,$$

unabhängig vom Querschnitt der Flüssigkeit oder ihrer Dichte. Sie entspricht einem mathematischen Pendel mit der Länge $\ell_{math} = \ell/2$.



Ein interessantes Beispiel eines solchen Flüssigkeitspendels befindet sich an der kanadischen Ostküste: der nördliche Teil der Bay of Fundy zwischen New Brunswick (Neu Braunschweig) und Nova Scotia (Neu Schottland) bildet ein Flüssigkeitspendel mit einer natürlichen Periode von 12 Stunden. Damit wird es von Mond resonant angeregt und man findet Gezeitenunterschiede bis zu 16 m.

4.3.6. Elektromagnetische Schwingkreise



Das einfachste elektronische System, das Schwingungen ausführen kann, besteht aus einem Kondensator C und einer Spule L. Eine Bewegungsgleichung für die Schwingung erhält man aus der Maschenregel: Die Spannung über der Spule muss entgegengesetzt gleich der Spannung über dem Kondensator sein:

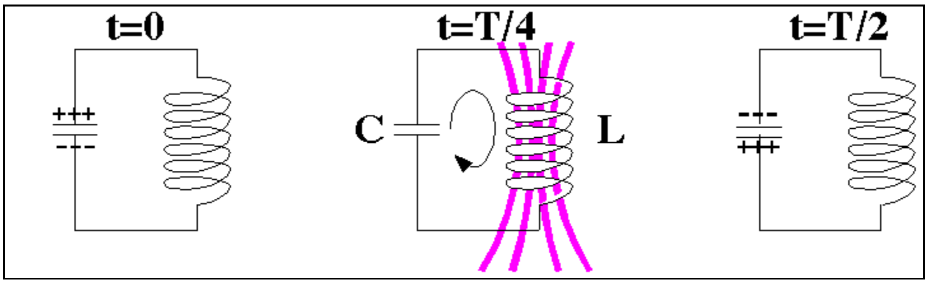
$$U_L + U_C = 0 = L\,dI/dt + Q/C\ .$$

Mit $I = dQ/dt$ erhält man

$$d^2Q/dt^2 = -\,Q/LC$$

Die Kreisfrequenz beträgt somit

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}} .$$



Wir können die Oszillation verfolgen indem wir z.B. bei einem geladenen Kondensator anfangen, wobei der Strom verschwinden soll. Das System entwickelt sich somit wie

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t).$$

Die Spannung über dem Kondensator führt zu einem Stromfluss durch die Spule, wobei deren Induktivität den Anstieg des Stromes beschränkt. Nach einer Viertelperiode ist der Kondensator entladen und der Strom durch die Spule auf ein Maximum angestiegen. Der Strom lädt jetzt den Kondensator umgekehrt auf. Dadurch entsteht eine Spannung, welche dem Stromfluss entgegenwirkt. Nach einer weiteren Viertelperiode ist der Stromfluss auf Null abgesunken, während der Kondensator umgekehrt geladen ist.

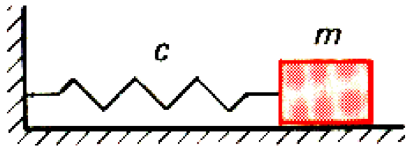
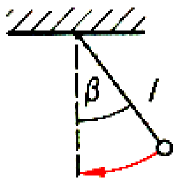
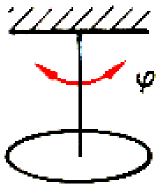
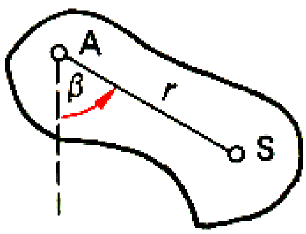
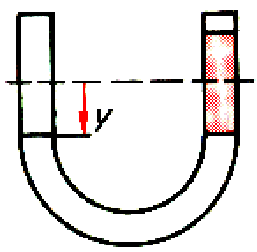
Z: Energie

In diesem System erhält man einen Austausch von Energie zwischen der elektrostatischen Energie im Kondensator und der magnetischen Energie in der Spule. Bei T=0, T/2, T, … ist die Energie im Kondensator gespeichert, bei t = T/4, 3T/4, … in der magnetischen Energie der Spule.

Hier werden die behandelten schwingenden Systeme zusammengefasst. Die Bewegungsgleichung hat immer die Form

$$\ddot{x} = - \omega_0^2 \, x \, .$$

Die Unterscheidung ist jeweils die Variable x und die Form von ω_0^2.

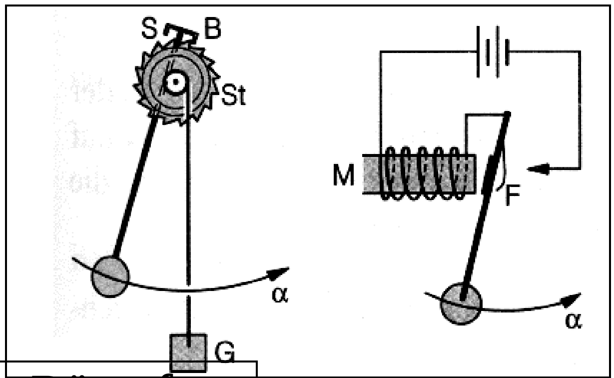
Schwingungssystem	Kraftansatz Differentialgleichung	ω_o
Federpendel 	$F = ma$ $-cy = m\ddot{y}$ $\ddot{y} + \frac{c}{m} y = 0$	$\sqrt{\frac{c}{m}}$
mathematisches Pendel 	$F = ma$ $-mg\beta = ml\ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{g}{l}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{g}{l}}$
Torsionspendel 	$M = J_A \, \alpha$ $-c^*\beta = J_A \beta$ $\ddot{\beta} + \frac{c^*}{J_A}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{c^*}{J_A}}$
physikalisches Pendel 	$M = J_A \, \alpha$ $-mgr\beta = J_A \ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{mgr}{J_A}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{mgr}{J_A}}$
Flüssigkeitspendel 	$F = ma$ $-2Agy = m_{ges}\ddot{y}$ $\ddot{y} + \frac{2A\rho g}{m_{ges}} y = 0$ $\ddot{y} + \frac{2g}{l} y = 0$	$\sqrt{\frac{2A\rho g}{m_{ges}}}$ $\sqrt{\frac{2g}{l}}$

4.4. Gedämpfte Schwingung

4.4.1. Dämpfung

Wie bei jeder Bewegung gibt es bei Schwingungen auch dissipative Effekte, d.h. es wird Schwingungsenergie in Wärmeenergie umgewandelt, so dass die Schwingungsamplitude abnimmt. Dies geschieht z.B. über Reibung oder Luftwiderstand.

Um eine Schwingung permanent in Gang zu halten muss von außen Energie zugeführt werden. Dies geschieht z.B. in einem Uhrwerk über ein Gewicht oder eine Feder. In einer Klingel wird eine elektromagnetische Kraft verwendet, welche durch die mechanische Bewegung ein- und ausgeschaltet wird.



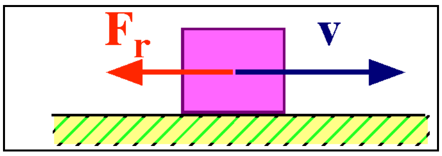
Exp. PI/63b: Federpendel mit und ohne Dämpfung

In diesem Beispiel kann eine Dämpfung eingestellt werden: die Pendelmasse besteht aus einem Kupferblech, welches sich zwischen zwei Elektromagneten bewegt. Wird ein Magnetfeld angelegt, so werden im Kupferblech Wirbelströme induziert, welche wie bei einer Wirbelstrombremse die Bewegung abbremsen. Die Auslenkung wird auf dem Oszilloskop sichtbar gemacht indem man das Licht misst, welche am Kupferblech vorbei auf eine Photozelle gelangt.

Die Reibungskraft (oder der Luftwiderstand) ist immer der Geschwindigkeit entgegengerichtet. Der Betrag kann unabhängig von der Geschwindigkeit sein (bei Roll- oder Gleitreibung), proportional zur Geschwindigkeit (viskose Reibung) oder proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit (Luftwiderstand).

4.4.2. Geschwindigkeitsunabhängige Reibung

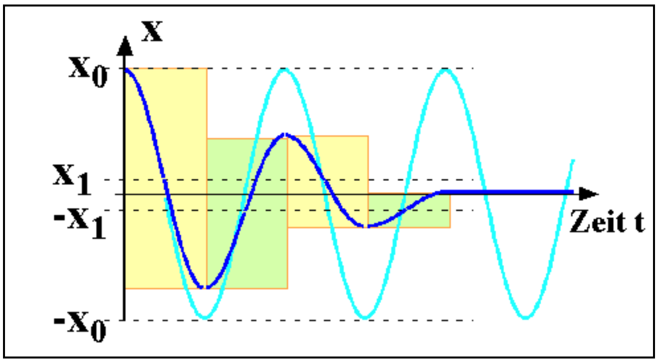
Beim geschwindigkeitsunabhängigen Reibungswiderstand kann die Reibung durch einen konstanten Term in den Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden:



$$m\,\ddot{x} = -c\,x - \pm\mu = -c\,(x \pm x_1)\,. \qquad x_1 = \mu/c$$

Hier stellt μ die Reibungskraft dar. Da sie immer der Geschwindigkeit entgegengerichtet ist hängt das Vorzeichen von der Bewegungsrichtung ab. Ist $v > 0$, so ist die Reibungskraft negativ. Es gilt somit immer das Vorzeichen der Geschwindigkeit. In der zweiten Form wurde die Reibungskraft so umgeschrieben dass sie einer Verschiebung des Koordinatensystems entspricht.

Offenbar findet hier eine normale, ungedämpfte Schwingung statt, wobei der Ursprung des Koordinatensystems um x_1 verschoben ist, einmal nach oben, einmal nach unten. Die Oszillationsamplitude ist deshalb geringer als die Auslenkung, und sie ändert bei jeder Umkehr. Deshalb findet bei jeder Periode eine Verringerung der Oszillationsamplitude um 2 x_1 statt: die Amplitude nimmt als arithmetische Reihe ab. Das System bleibt irgendwo zwischen $\pm x_1$ stehen.



4.4.3. Geschwindigkeitsproportionale Reibung

Der wichtigste Fall entspricht der geschwindigkeitsproportionalen Reibung:

$$m\,\ddot{x} = -\,c\,x - b\,\dot{x}\,.$$

Die standardisierte Form dieser Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + 2\,\beta\,\dot{x} + \omega_o{}^2\,x = 0\,, \qquad \beta = \frac{b}{2m}, \qquad \omega_0{}^2 = \frac{c}{m}\,.$$

Die Größe β wird als Abklingkoeffizient bezeichnet.

Eine solche lineare DGl mit konstanten Koeffizienten ist immer lösbar mit dem Ansatz

$$x = A\,e^{\lambda t}\,. \qquad \dot{x} = \lambda\,A\,e^{\lambda t} \qquad \ddot{x} = \lambda^2\,A\,e^{\lambda t}\,.$$

Einsetzen ergibt

$$\lambda^2 + 2\,\beta\,\lambda + \omega_o{}^2 = 0\,.$$

Damit reduziert sich das Problem auf das Auffinden von Nullstellen dieser Gleichung:

$$\lambda_{1,2} = -\,\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\,\beta \pm i\omega_s \qquad \text{mit} \qquad \omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Die allgemeine Lösung ist damit

$$x(t) = A_1\,e^{\lambda_1 t} + A_2\,e^{\lambda_2 t} = e^{-\beta t}\,(A_1\,e^{i\omega_s t} + A_2\,e^{-i\omega_s t})\,.$$

Physikalisch sinnvolle Lösungen müssen reell sein; dies ist offenbar der Fall wenn die beiden Konstanten konjugiert komplex sind, $A_1 = A_2^*$. In diesem Fall kann der Ausdruck in der Klammer auf die Form A $\cos(\omega_s t+\phi)$ gebracht werden, sofern ω_s reell ist.

Die Art der Lösung wird durch die Wurzel ω_s bestimmt; man kann die drei Bereiche unterscheiden dass die Wurzel reell, null oder imaginär ist, d.h.

$$\omega_0 > \beta , \qquad \omega_0 = \beta , \qquad \omega_0 < \beta .$$

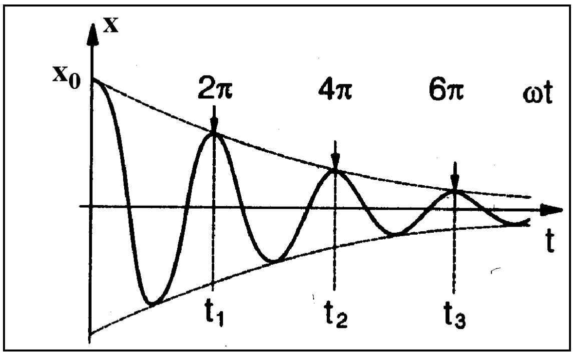
Wir behandeln die drei Fälle in dieser Reihenfolge.

4.4.4. Schwache Dämpfung, $\omega_0 > \beta$

Die Eigenfrequenz ist somit größer als die Dämpfungskonstante; das System verhält sich dann in erster Näherung wie ein ungedämpfter Oszillator mit abfallender Amplitude.

Die Lösung kann in diesem Bereich geschrieben werden als

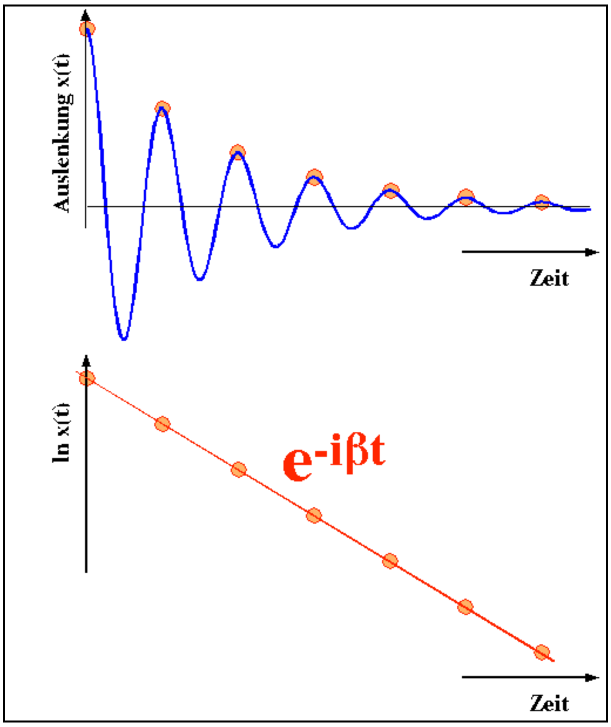
$$x(t) = x_0\, e^{-\beta t} \cos(\omega_s t + \phi) ,$$



wobei die Amplitude x_0 und die Phase ϕ wiederum aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Die Amplitude fällt somit exponentiell ab, und die Schwingungsfrequenz ist niedriger, $\omega_s < \omega_0$. Die Energie ist proportional zum Quadrat der Amplitude, sie fällt somit mit der doppelten Rate ab,

$$E_{tot}(t) = E_{tot}(0)\, e^{-2\beta t} .$$

Aus experimentell gemessenen Daten können die Parameter ω_s und β bestimmt werden. ω_s erhält man aus der Periode T.



Der Abklingkoeffizient β kann durch Vergleich der Amplitude zu verschiedenen Zeiten ermittelt werden:

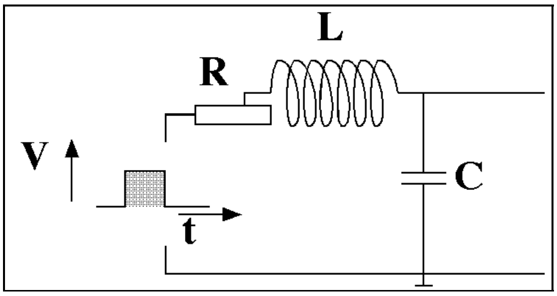
$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = e^{-\beta T} ,$$

d.h.

$$\beta = \ln\left[\frac{x(t+T)}{x(t)}\right] / T .$$

In der Praxis trägt man z.B. die Amplitude als Funktion der Zeit logarithmisch auf und bestimmt die Zerfallszeit aus einem linearen Fit.

4.4.5. Gedämpfte elektromagnetische Schwingungen



Als ein Beispiel für gedämpfte Schwingungen betrachten wir den LRC Schwingkreis. Er kann abgeleitet werden aus dem LC Kreis. Durch Zufügen eines Ohm'schen Widerstandes (der in jedem Schwingkreis existiert) erhält man eine modifizierte Maschenregel:

$$U_L + U_C + U_R = 0 = L\, dI/dt + Q/C + R\, I =$$

$$= L\, d^2Q/dt + R\, dQ/dt + Q/C .$$

Damit erhält man die Resonanzfrequenz des ungedämpften Systems wieder

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} .$$

Für den Abklingkoeffizienten erhält man

$$\beta = \frac{R}{2L} .$$

Exp 92a: gedämpfte LRC Schwingungen

Der LRC Schwingkreis verhält sich ähnlich wie der LC Schwingkreis, ist aber gedämpft.

Trägt man die Gesamtspannung U_L+U_C gegenüber der Spannung U_C auf so sieht man die Phasenverschiebung um 90^o.

4.4.6. Überkritische Dämpfung (Kriechfall)

Es ist nützlich, den Dämpfungsgrad

$$D = \beta / \omega_0 ,$$

resp. den Gütefaktor

$$Q = 1/2D = \omega_0/2\beta$$

einzuführen, das Verhältnis der Dämpfungskonstante zur Resonanzfrequenz. Im Bereich der schwachen Dämpfung kann der Dämpfungsgrad den Wertebereich von $0<D<1$ annehmen, der Gütefaktor ist > 0.5.

In natürlichen Systemen kommen sehr unterschiedliche Werte vor. Atomare Systeme z.B. können eine extrem geringe Dämpfung aufweisen. Übergänge, die für Atomuhren benutzt werden, haben Gütefaktoren von mehr als 10^{10}. Heute ist es auch möglich, makroskopische Systeme herzustellen, deren Gütefaktor von einer ähnlichen Größenordnung ist.

Wir betrachten jetzt den Fall dass die Dämpfung größer ist als die Resonanzfrequenz,

$$\beta > \omega_0, \qquad D > 1, \qquad Q < 0.5 .$$

Damit wird der Radikand $\omega_0^2-\beta^2 < 0$ und die Wurzel imaginär. Die allgemeine Lösung lautet in diesem Bereich

$$x(t) = e^{-\beta t} (c_1\, e^{\omega t} + c_2\, e^{-\omega t}) , \quad \omega = (\beta^2 - \omega_o^2)^{1/2} .$$

wobei $c_{1,2}$ Integrationskonstanten darstellen, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Das System nähert sich bi-exponentiell seinem Gleichgewicht. In diesem Fall tritt keine Schwingung mehr auf, sondern das System bewegt sich monoton in Richtung auf seinen Gleichgewichtswert (der nie ganz erreicht wird). Es kann maximal einen Nulldurchgang aufweisen wenn die beiden Exponentialfunktionen entgegengesetztes Vorzeichen aufweisen.

Exp. 93, 93a: Gedämpfte Schwingung

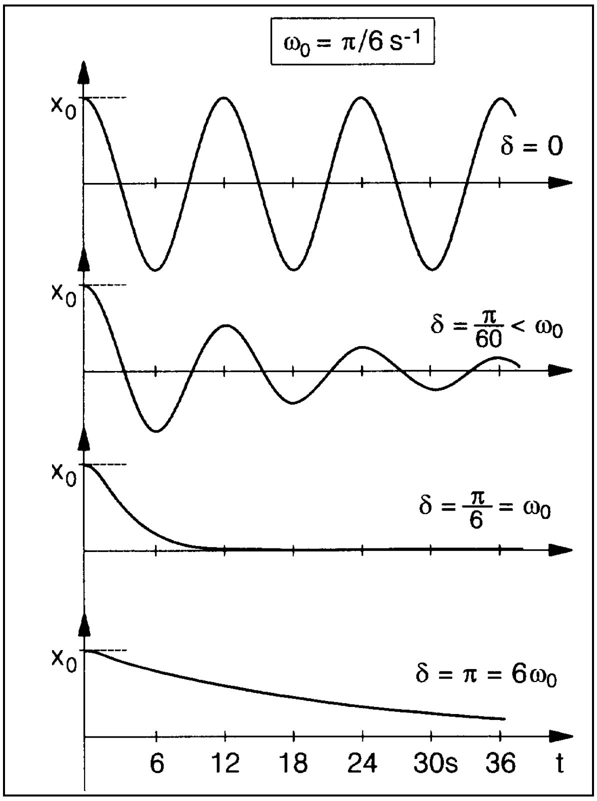
Mit einem ähnlichen Aufbau kann man auch den aperiodischen Grenzfall oder den Kriechfall beobachten.

4.4.7. Der aperiodische Grenzfall: $\omega_0 = \beta$, D = 1 .

Dies wird auch als der Fall der kritischen Dämpfung bezeichnet. In diesem Fall kann die Lösung der DGl als

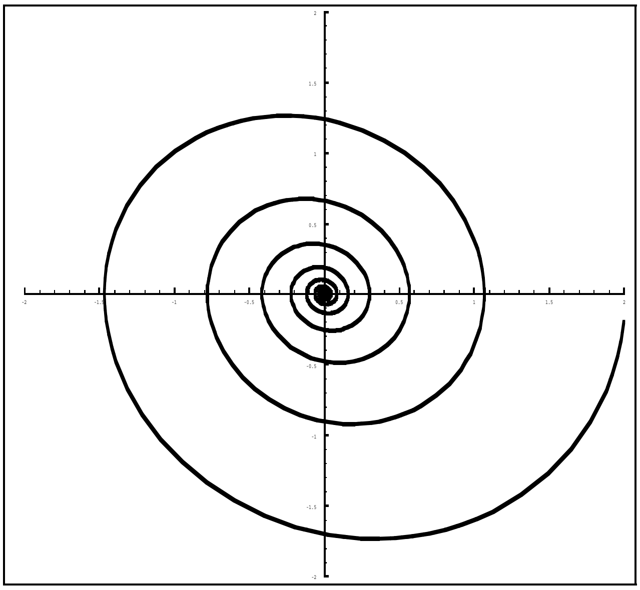
$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\beta t} .$$

geschrieben werden. Diese Situation führt dazu, dass der Gleichgewichtswert am schnellsten (näherungsweise) erreicht wird. Man verwendet dies somit z.B. in Messgeräten, wo man den (Gleichgewichts-) Messwert möglichst rasch erreichen möchte.



4.4.8. Phasenraum

Es kann auch nützlich sein, die Auslenkung x eines harmonischen Oszillators gegen die Geschwindigkeit aufzutragen. Dies kann man z.B. beim LRC Schwingkreis auch experimentell durchführen.



Da beide sich mit der gleichen Periode bewegen erhält man im Falle der verschwindenden Dämpfung einen Kreise. Ist die Reibung nicht mehr vernachläßigbar so erhält man statt dessen eine Spirale. Die Anfangsbedingungen bestimmen den Anfangspunkt dieses Pfades. Der Endpunkt liegt im Ursprung, d.h. am Gleichgewichtspunkt. Die x- und z-Koordinaten entsprechen dabei Ort und Impuls und sind somit proportional zur Quadratwurzel aus potentieller und kinetischer Energie. Dieser Pfad im Phasenraum zeigt somit direkt, daß die beiden Energieformen ineinander umgewandelt werden.