

## 1. Aufgabe (7 Punkte)

Gegeben sei eine komplexe Zahl

$$z = a + ib$$

1. Zeichnen Sie diese in einem kartesischen Koordinatensystem, welches die komplexe Ebene wiedergibt, ein.
2. Bestimmen Sie den Phasenwinkel  $\phi$  und den Betrag  $r$ .
3. Drücken Sie  $a$  und  $b$  als Funktionen von  $r$  und  $\phi$  aus.
4. Entwickeln Sie die Ausdrücke für  $a(\phi)$  und  $b(\phi)$  als MacLaurin Reihe. Nutzen Sie Ihr Ergebnis um zu zeigen, dass  $z = re^{i\phi}$ .

$$[ \text{MacLaurin Reihe: } f(x) \cong f(0) + \frac{df}{dx}|_{x=0}x + \frac{d^2f}{dx^2}|_{x=0}\frac{x^2}{2!} + \frac{d^3f}{dx^3}|_{x=0}\frac{x^3}{3!} + \frac{d^4f}{dx^4}|_{x=0}\frac{x^4}{4!} + \frac{d^5f}{dx^5}|_{x=0}\frac{x^5}{5!} + \dots ]$$

## 2. Aufgabe (4 Punkte)

1. Differenzieren Sie nach  $x$ :

$$y = (a^x)^2$$

2. Integrieren Sie:

$$I = \int x^2 e^x dx$$

3. Bestimmen Sie die Extrema folgender Funktion:

$$y = \cos^2(ax - b)$$

$$[ \text{Bedenken Sie: } \sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) ]$$

## 3. Aufgabe (7 Punkte)

1. Bestimmen Sie die zweite Ableitung von  $y$  nach  $x$  für:

$$\text{a) } y = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{b) } y = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2. Nutzen Sie ihr Ergebnis um folgende Differenzialgleichung zu lösen, wenn  $a > 0$ :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = ay(t)$$

3. Aus der Lösung der Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -ay(t)$$

folgt für die Randbedingungen  $y(0) = 1$  und  $\dot{y}(0) = 1$ , die Lösung  $y^* = \cos(\sqrt{at}) + \frac{1}{\sqrt{a}}\sin(\sqrt{at})$ . Zeigen Sie, dass man dieses Ergebnis auch durch die Substitution von  $a \Rightarrow -a$  in das Ergebnis der oben genannten Differentialgleichung erlangen kann. Welche Beziehung besteht zwischen den Hyperbelfunktionen  $\cosh(x)$  und  $\sinh(x)$  zu den trigonometrischen Funktionen  $\cos(x)$  und  $\sin(x)$ .

## 4. Aufgabe (2 Punkte)

Sie haben eine Messung der Grösse  $x$  durchgeführt. Wenn  $\bar{x}$  der arithmetische Mittelwert ihrer Messreihe aus  $N$  Werten ist, zeigen Sie, dass unter der Transformation gemäß  $y_m = \alpha + \beta x_m$ , wobei  $m = 1, 2, \dots, N$ , der arithmetische Mittelwert  $\bar{y}$  der transformierte Mittelwert von  $x$  ist. Nennen Sie ein Beispiel, wo eine solche Transformation notwendig ist.