1. Aufgabe

Wie bereits in der Vorlesung gesehen, gilt in einem um $\vec{\omega}$ rotierenden Koordinatensystem für die relativ Beschleunigung:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_I - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Grössen mit dem Subskript r beziehen sich hier auf das rotierende Koordinatensystem, jene mit dem Subskript I auf das Ruhesystem. Der zweite Term auf der rechten Seite ist die Coriolisbeschleunigung, der Dritte ist die Zentrifugalbeschleunigung (im Betrag gleich der Zentripetalbeschleunigung, der Führungskraft[1], allerdings mit entgegengesetzter Richtung).

a. Corioliseffekt:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{Coriolis} &= -2\vec{\omega} \times \vec{v}_r \\ &= -2\omega v_r \sin(\alpha)\, \hat{\phi} \end{aligned}$$

Wobei $\hat{\phi}$ ein Einheitsvektor ist, der die Erdkugel am Aufenthaltsort der Masse tangiert und nach Osten weist. Demnach ergibt sich für die Kraft, die nach Westen wirkt:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{Coriolis} &= m\vec{a}_C \\ F_{Coriolis} &= 2m\omega v_r \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Ihren Maximalwert erreicht sie am Nordpol, wo $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

b. Zentripetalbewegung:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{Zentripetal} &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \vec{\omega}\,(\vec{\omega}.\vec{r}) - |\vec{\omega}|^2\, \vec{r} \\ &= -\,|\vec{\omega}|^2\, |\vec{r}| \sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha)\hat{i} \end{aligned}$$

$\hat{i}$ ist ein Einheitsvektor in der Ebene parallel zur Äuqatorialebene, die den Aufenthaltsort der Masse beinhalten. Er zeigt von der Drehachse weg.

$$F_{Zentripetal} = m\,|\vec{\omega}|^2\,|\vec{r}| \cos(\alpha)$$

Zu beachten ist, dass die Zentripetalkraft nicht grundsätzlich zum Erdmittelpunkt hin wirkt. Dies ist nur der Fall ist, wenn sich die Masse auf dem Äquator befindet, wo sie auch gleichzeitig maximal ist.

Zahlenwerte:

$$\begin{aligned} a_{Coriolis} &= 6{,}05\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} & \qquad F_{Coriolis} &= 60{,}5\,\mathrm{N} \\ a_{Zentripetal} &= 33{,}5\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} & \qquad F_{Zentripetal} &= 33{,}5\,\mathrm{kN} \end{aligned}$$

[1] Unter Führungskraft versteht man die Kraft mit der ein bewegenden Körper auf einer vorgeschriebenen Bahn gehalten wird.

2. Aufgabe

Der Winkel $\beta(t)$ gibt an, wie weit ein mathematisches Pendel zum Zeitpunkt t ausgeschlagen ist. Er läßt sich im Ruhesystem anhand folgender Gleichung bestimmen:

$$lm\ddot{\beta} + mg\sin\beta = 0$$

Für kleine β ergeben sich demnach harmonsiche Schwingungen mit der Frequenz $\omega/2\pi$:

$$\beta(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Durch die Beschleunigung des Pendelsystems mit a nimmt die Gravitationskraft mg effektiv um ma zu. D.h. durch die Subsitution von $g \to g + a$ läßt sich erkennen, daß das Pendel bei nach oben gerichteter Beschleunigung schneller schwingt, nämlich mit $\omega' = \sqrt{\frac{g+a}{l}}$ bzw. im Falle einer Beschleunigung nach unten langsamer schwingt. Zu beachten ist auch, daß im freien Fall die Frequenz 0 wird, d.h. das Pendel schwingt nicht mehr.

Die Seilkraft $\vec{F}_s$ wirkt der Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z$ der Pendelbewegung entgegen und nimmt die Komponente der Erdanziehung $\vec{F}_G$ auf, die entlang des Seils verläuft ($\hat{l}$ Richtung). Sie sorgt als Führungskraft dafür, dass die Pendelbewegung durchgeführt werden kann. Die rechtwinklig zum Seil wirkenden Komponenten ($\vec{p}$ Richtung) werden von der Seilkraft nicht aufgenommen, sie ergeben die bereits bekannte Pendelgleichung (siehe oben). Zur Bestimmung von $\vec{F}_Z$ geht man zunächst von der Summe der Kräfte aus:

$$\begin{array}{ccc} \vec{F}_{net} & = & \vec{F}_S + \vec{F}_G + \vec{F}_Z \\ lm\ddot{\beta}\hat{p} & = & \vec{F}_S + mg\cos\beta\hat{l} - mg\sin\beta\hat{p} + ml(\dot{\beta})^2\hat{l} \\ 0 & = & \vec{F}_S + mg\cos\beta\hat{l} + ml(\dot{\beta})^2\hat{l} \end{array}$$

Im beschleunigten System gilt demnach:

$$\vec{F}_S = m\left[l\left(\dot{\beta}\right)^2 + (g+a)\cos(\beta)\right]\hat{l}$$

Hierraus läßt sich der Betrag der Seilkraft einfach bestimmen als:

$$F_s = ml\omega^2\left[A\sin(\omega' t) - B\cos(\omega' t)\right]^2 + (g+a)\left[A\cos(\omega' t) + B\sin(\omega' t)\right]$$

3. Aufgabe

Ist in der Übung ausreichend behandelt worden.

4. Aufgabe

Der Auftrieb muss das gesamt Gewicht aus Ladung und Ballon aufbringen um ein Schweben/Abheben zu ermöglichen:

$$F_A = F_B + F_L$$

Von Archimedes Prinzip:

$$\rho_L g V = \rho_{He} g V + mg$$
$$V = \frac{m}{\rho_L - \rho_{He}}$$

Barometrische Höhenformel (Skript S.59) für Luft:

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{h}{8\,\mathrm{km}}}$$

Wenn $p \propto \rho$ (wahr z.B. für ein ideales Gas bei isothermen Verhältnissen):

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{h}{8\,\mathrm{km}}}$$

Demnach gilt:

$$V_{He} = 133\,\mathrm{m}^3$$

Die Füllmenge bleibt gleich, allerdings dehnt sich der Ballon aus:

$$V_{32km} = \frac{m}{\rho_{L0} e^{-\frac{h}{8\,\mathrm{km}}} - \frac{m_{He}}{V_{32km}}}$$
$$V_{32\mathrm{km}} = \frac{m + m_{He}}{\rho_{L0}} e^{\frac{h}{8\,\mathrm{km}}}$$

Demnach ergeben sich für einen kugelförmigen Ballon:

$$V_{32\mathrm{km}} = 7570\,\mathrm{m}^3 \qquad D_{32\mathrm{km}} = 24\,\mathrm{m} \qquad D_0 = 6\,\mathrm{m}$$

5. Aufgabe

Es gilt für den Wasserdruck p, den Kapillardruck p_{HgW} auf Wasserseite und p_{HgL} auf der Luftseite und den Luftdruck p_0 bei einer Höhendifferenz von Δh im Gleichgewicht:

$$p + p_{HgW} = p_0 + p_{HgL} + \rho_{Hg} g \Delta h$$

bzw. umgeformt für den Druckunterschied der gemessen werden soll:

$$p - p_0 = (p_{HgL} - p_{HgW}) + \rho_{Hg} g \Delta h$$

Unter Berücksichtigung des Überdrucks aufgrund der Oberflächenspannungen (siehe Vorlesung), ergibt sich:

$$p - p_0 = 2\left[\frac{\sigma_{HgL}}{R} - \frac{\sigma_{HgW}}{R}\right]$$

Für die gegebenen Grenzwinkel β der Oberflächen, lässt sich eine Beziehung zwischen Kapillardurchmesser D und Krümmungsradius R der Grenzfläche herleiten durch:

$$R = \frac{D}{2\cos\beta}$$

Demnach kommt es bei einer Messung von $p - p_0$ zu einem systematischen Fehler von:

$$\frac{4}{D}\left[\sigma_{HgL} - \sigma_{HgW}\right] = 66.8\,\mathrm{Pa}$$

Sollte Ihnen ein Fehler aufgefallen sein, melden Sie sich bitte bei 'wieland@e3.physik.uni-dortmund.de'

Bei Verständnisfragen darf die Bürostunde gerne in Anspruch genommen werden!