

Kommentierte Lösung zum Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Gegeben sind:

$$m = 10 \text{ t}, \quad h = 4 \text{ m}, \quad v_0 = 1 \text{ km/h} . \quad (1)$$

1.1

Energieerhaltung:

$$E_{pot} + E_{kin_0} = E_{kin_1} . \quad (2)$$

Allg. gilt:

$$E_{pot} = \int_0^h F \cdot ds , \quad (3)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 . \quad (4)$$

Daraus folgt:

$$\Rightarrow mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 , \quad (5)$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh + v_0^2} \approx 8,87 \text{ m/s} = 31,932 \text{ km/h} . \quad (6)$$

1.2

Es liegt ein inelastischer Stoß vor, da der Wagen sofort beim Zusammenstoß angekoppelt wird und sich dann mit dem Zugverband weiterbewegt. Hierbei ist es unerheblich ob die zusammenstoßenden Objekte elastisch sind oder nicht, entscheidend ist, dass durch das ankoppeln Energie in Form von Deformationsenergie (elastisch oder nicht ist wie gesagt egal) der kinetischen Energie verloren geht!(siehe Skript „2 Mechanik“ S.40)

inelastischer Stoß \Rightarrow keine Erhaltung der kinetischen Energie, aber Impulserhaltung!

Im folgenden gilt:

p_1 - Impuls des ersten Güterwagens

p_{15} - Impuls des gesamten Zugverbandes (inkl. des ersten Wagens)

$$p_1 = p_{15} \Rightarrow mv_1 = 15mv_x \Rightarrow v_x = \frac{1}{15} \cdot v_1 \approx 2,1 \text{ km/h} . \quad (7)$$

1.3

Unter einen der Wagen wird ein Bremskeil gelegt, woraufhin der Zugverband verlangsamt wird. Die Kraft F_R die vom Bremskeil ausgeht ist proportional zur Gewichtskraft F_N und dem Reibungskoeffizienten μ (siehe Skript), sie ist zeitlich konstant. Eine Kraft, die auf ein System wirkt, hat eine Impulsänderung des Systems zur Folge. Es gilt allg.:

$$F = \frac{dp}{dt} . \quad (8)$$

Für die Reibungskraft F_R und den Anfangsimpuls des Zugverbandes p_{15} gilt:

$$F_R = \frac{1}{4} F_N \mu , \quad (9)$$

$$p_{15} = 15mv_x . \quad (10)$$

Aus 8 folgt:

$$\int_{p_0=0}^{p_{15}} dp = \int_0^{\tau} F dt \quad (11)$$

$$\Rightarrow 15mv_x = \frac{1}{4} mg\mu\tau \quad (12)$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{60v_x}{g\tau} \approx 0,71 \quad (13)$$

$$(14)$$

Aufgabe 2

Es soll das Gravitationspotential in einem 1-dimensionalen Modell eines Universums, bzw. einer Kette von Punktmassen (die feste Positionen besitzen) berechnet werden.

2.1

Zunächst sollen nur zwei Massen m_1, m_2 an den Stellen $x = \pm x_i$ betrachtet werden. Hierzu muß man sich Gedanken bezüglich der Richtung der durch die Massenpunkte m_1 und m_2 hervorgerufene Kraft machen, die auf eine Probemasse m_0 wirkt, die sich an der Stelle x befindet.

$$x_1 = x_i - x \quad (15)$$

$$x_2 = -x_i - x \quad (16)$$

Die Kräfte die von den Massenpunkten m_1, m_2 aus auf m_0 wirken lautet:

$$F_1 = \frac{G \cdot m_1 m_0}{(x_i - x)^2} \cdot \frac{x_i - x}{|x_i - x|} \quad (17)$$

$$F_2 = \frac{G \cdot m_2 m_0}{(-x_i - x)^2} \cdot \frac{-x_i - x}{|-x_i - x|} \quad (18)$$

Die letzten beiden Terme geben hierbei die Richtung in die die Kräfte wirken an! Für die Gesamtkraft F_{Ges} , die auf die Masse m_0 wirkt, gilt das Superpositionsprinzip:

$$F_{Ges} = F_1 + F_2 . \quad (19)$$

Als nächstes sollte man sich Gedanken bezüglich der Definition des Potentials bzw. Gravitationspotentials machen (siehe hierzu z.B. „Gerthsen, Vogel“):

Durch die Gravitationskraft einer Masse m und einer Probemasse m_0 wird im Raum ein Kraftfeld $\frac{F_{\text{Gravitation}}(x)}{m_0}$ erzeugt. Aufgrund des Kraftfeldes wird die Probemassen in Richtung des Kraftzentrums (welches in m liegt) beschleunigt. Dabei wird an der Masse m_0 Arbeit

$$W_{\text{pot}}(x_2 - x_1) = \int_{x_1}^{x_2} -F_{\text{Gravitation}}(x') dx' , \quad (20)$$

verrichtet, d.h. die potentielle Energie der Masse wird verändert. Hierbei normiert man im Allgemeinen die potentielle Energie auf einen unendlich entfernten Punkt ($r_1 \rightarrow -\infty$), an dem die Kraft null ist.

$$W_{\text{pot}}(x) = E_{\text{pot}}(x) = \int_{-\infty}^x -F_{\text{Gravitation}}(x') dx' , \quad (21)$$

gibt dann die Arbeit an, die nötig ist, die Masse m_0 aus dem Unendlichen auf den Abstand x zu bringen. Das Minuszeichen besagt, dass sinnvollerweise keine Arbeit aufgebracht werden muß, sondern frei wird. Die potentiellen Energie Gl. (21) lässt sich nun in eine von der Probemasse m_0 unabhängige Formen bringen:

$$U(x) = \frac{E_{\text{pot}}(x)}{m_0} = -\frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^x F_{\text{Gravitation}}(x') dx' . \quad (22)$$

Das Potential $U(x)$ gibt die von der Probenmasse m_0 unabhängige Fähigkeit des Kraftfeldes wiederzugeben Arbeit zu verrichten. Mit $F_{\text{Gravitation}} = F_{\text{Ges}}$ und Gl. (19) folgt aus (22):

$$U(x) = -G \int_{-\infty}^x \left[\frac{m_1}{(x_i - x')^2} \cdot \frac{x_i - x}{|x_i - x|} + \frac{m_2}{(-x_i - x')^2} \cdot \frac{-x_i - x}{|-x_i - x|} \right] dx' , \quad (23)$$

$$= -G \left[\frac{m_1}{(x_i - x)} \cdot \frac{(x_i - x)}{|x_i - x|} + \frac{m_2}{(-x_i - x)} \cdot \frac{(-x_i - x)}{|-x_i - x|} \right] + 0 , \quad (24)$$

$$U(x) = -G \left[\frac{m_1}{|x_i - x|} + \frac{m_2}{|-x_i - x|} \right] . \quad (25)$$

Abbildung 1 zeigt eine Simulation von Gl. (25).

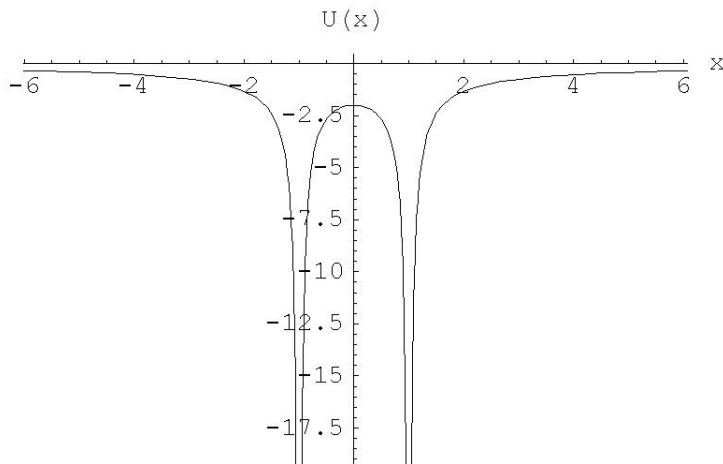


Abbildung 1: Simulation des Potentials (25) für $m_1 = m_2 = m$ und $x_i = 1$.

2.2

In diesem Aufgabenteil sollte das Potential $U(x)$ aus dem ersten Aufgabenteil auf 2N-Massen erweitert werden, des Weiteren sollte man davon ausgehen, dass alle Massen $m_j = m$ mit $(j = -N, -N + 1, \dots, N - 1, N)$ gleich sind und sich an den Positionen $x_i = \pm iD$ mit $(i = 1, 2, \dots, N)$ befinden. Für das zu berechnende Potential $U_N(r)$ gilt:

$$U_N(x) = -Gm \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{|nD-x|} + \frac{1}{|nD+x|} \right). \quad (26)$$

Abbildung 2 zeigt eine Simulation von Gl. (26) für $N = 4$ Massen.

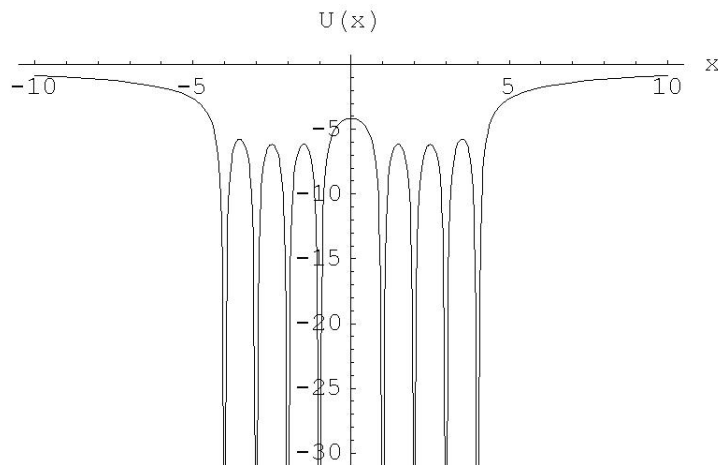


Abbildung 2: Simulation des Potentials (26) für $N = 4$ und $x_i = 1$.

2.3

In dieser Aufgabe sollte das Potential $U_N(x)$ auf unendliche viele Massen $U_\infty(x)$ erweitert werden. Des Weiteren sollten $U(x=0)$ und die Art des Extremums (Max. oder Min. $\Rightarrow d^2U(x=0)/dx^2$ bestimmen!) an der Stelle $x = 0$ bestimmt werden.

$$U_\infty(x) = -Gm \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|nD-x|} + \frac{1}{|nD+x|} \right) \quad (27)$$

$$\rightarrow U_\infty(0) = -\frac{2Gm}{|D|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n|} \quad (28)$$

$dU_\infty(x)/dx$ erhält man aus der ersten Ableitung von Gl.(26).

$$\frac{dU_\infty(x)}{dx} = -Gm \left[\frac{1}{|nD-x|^2} + \frac{1}{|-nD-x|^2} \right] \quad (29)$$

$$\rightarrow \frac{dU_\infty(0)}{dx} = 0 \quad (30)$$

$d^2U_\infty(x)/dx^2$ erhält man aus der zweiten Ableitung von Gl.(26).

$$\frac{d^2U_\infty(x)}{dx^2} = -Gm \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{|nD-x|^3} + \frac{2}{|-nD-x|^3} \right] \quad (31)$$

$$\rightarrow \frac{d^2U_\infty(x)}{dx^2} = \frac{d^2U_\infty(0)}{dx^2} = -\frac{Gm4}{|D|^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n|^3} < 0. \quad (32)$$

Das heißt, es liegt ein Maximum an der Stelle $x = 0$ vor. Dies bedeutet, dass man ein instabiles Gleichgewicht hat, bzw. für das Universum bedeutet es, dass man sich in einem dynamischen, sich räumlich verändernden Universum befindet (im Gegensatz zum statischen Universum).

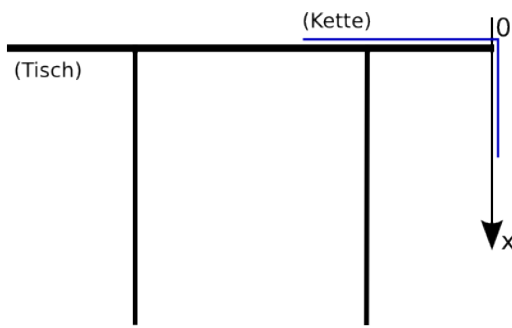


Abbildung 3: (Skizze zu Aufgabe 3) Die blauen Linien deuten die Kette an. In die Kante vom Tisch an der die Kette herunterhängt wird Ursprung des Koordinatensystems gelegt. Die x-Achse zeigt nach unten. Die y-Achse wird nicht weiter betrachtet.

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Tisch auf dem eine Kette mit der Gesamtlänge $l = 0,5\text{m}$ liegt. Ein Teil der Kette mit der Länge x_0 hängt dabei vom Tisch herunter (vgl. Abb. 3). Im Folgenden geht man von der vereinfachenden Annahme aus, dass der Haftreibungskoeffizient μ_H gleich dem Gleitreibungskoeffizient μ_G ist, d.h. $\mu_H = \mu_G = \mu$ (Wer es genauer mag kann natürlich von verschiedenen Koeffizienten ausgehen!).

3.1

Die Bedingung die es zu erfüllen gilt lautet:

$$\text{Gravitationskraft} > \text{Reibungskraft} \quad (33)$$

$$\Rightarrow F_N > F_R \quad (34)$$

Ist die Masse der Kette homogen über diese verteilt, so ist die Gravitationskraft F_N , welche die Kette beschleunigen könnte, proportional zu dem Teil x_0 der Kette, welcher am Tisch herunterhängt, bezogen auf die Gesamtlänge l :

$$F_N = mg \frac{x_0}{l}. \quad (35)$$

Die Reibungskraft F_R ist proportional zur Gewichtskraft $F = mg$, dem Reibungskoeffizienten μ und dem Teil der Kette $l - x_0$, welcher auf dem Tisch verbleibt, bezogen auf die Gesamtlänge l der Kette:

$$F_R = mg\mu \frac{l - x_0}{l}. \quad (36)$$

Einsetzen von Gl. (35) und (36) in Gl. (34) ergibt:

$$mg \frac{x_0}{l} > mg\mu \frac{l - x_0}{l} \Rightarrow x_0 > \frac{\mu l}{1 + \mu} \approx 0,115 \quad (37)$$

3.2

Ist die Bedingung aus Aufgabe (3.1) erfüllt, wirkt auf die Kette eine Kraft F_{Res} , die sie vom Tisch zieht. Die Kraft äußert sich darin, dass die Geschwindigkeit dx/dt mit der sich die Länge des Kettenteils

$x'(t) = x_0 + x(t)$, welcher vom Tisch herunterhängt, mit fortschreitender Zeit größer wird ($d^2x'/dt^2 = d^2x/dt^2 \neq 0$). Es gilt also:

$$F_{Res} = F_N - F_R \rightarrow m\ddot{x} = mg\frac{x}{l} - mg\mu\frac{l-x}{l} \quad (38)$$

$$\rightarrow \ddot{x} - \frac{g(1+\mu)}{l}x = -g\mu \quad (39)$$

Bei Gl. (39) handelt es sich um eine inhomogene DGL zweiter Ordnung. Die allgemeine Lösung x einer inhomogenen DGL ist die Summe aus der Lösung x_h der homogenen DGL mit einer partikulären Lösung x_p der inhomogenen DGL, d.h.:

$$x = x_h + x_p . \quad (40)$$

- **Lösung der homogenen DGL** Die zu Gl.(39) homogene DGL lautet:

$$\ddot{x} - \frac{g(1+\mu)}{l}x = 0 . \quad (41)$$

Hat man noch die Aufgaben vom ersten Übungszettel in Erinnerung so fällt auf, dass sich Gl.(41) leicht mit dem Ansatz $x = A \cdot \cosh(at)$ lösen lässt (vgl. Zettel 1). Die unbekannt Variablen A und a werden durch einsetzen von x in Gl.(41) bestimmt. Erinnerung man sich nicht mehr an den Inhalt des erst Übungszettels, so kann man die DGL mit dem allgemeinen Exponentialansatz lösen:

$$x = Ce^{at} \Rightarrow \ddot{x} = a^2Ce^{at} . \quad (42)$$

Einsetzen in Gl. (41) liefert:

$$a^2Ce^{at} - \frac{g(1+\mu)}{l}Ce^{at} = 0 , \quad (43)$$

$$\Rightarrow a_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g(1+\mu)}{l}} . \quad (44)$$

Man erhält somit zwei voneinander unabhängige Lösung $a_{1,2}$ für die homogene DGL. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ergibt sich aus der Summe der Einzellösungen:

$$x_h = C_1e^{a_1t} + C_2e^{a_2t} . \quad (45)$$

- **Partikuläre Lösung** Die partikuläre Lösung x_p der DGL kann man auf verschiedene Weisen ermitteln, hier sollen nur zwei Methoden angesprochen werden.

- Zum einen kann man die Lösung einfach „raten“. Dabei nimmt man an, dass sich die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL dem Störungsterm auf der rechten der Gl. (39) anpasst. D.h. der Ansatz für die partikuläre Lösung lautet:

$$x_p = \text{const.} = A . \quad (46)$$

Einsetzen in Gl. (39) liefert:

$$A = \frac{\mu l}{(1+\mu)} = x_p . \quad (47)$$

- Eine andere Möglichkeit die partikuläre Lösung zu ermitteln besteht in der Anwendung einer Methode, die „Variation der Konstanten“ genannt wird. Dabei verwendet man die Lösung die bereits von der homogenen DGL erhalten hat, wobei man nun annimmt, dass die als Konstanten betrachteten Koeffizienten (hier: C_1 und C_2) nunmehr Funktionen von der Veränderlichen (hier der Zeit t) sind. Der Ansatz für die partikuläre Lösung lautet somit:

$$x_p = C_1(t)e^{a_1t} + C_2(t)e^{a_2t} . \quad (48)$$

Die Formeln zur Bestimmung der Koeffizienten $C_1(t)$ und $C_2(t)$ lassen sich mathematischen Büchern entnehmen (z.B. Gelbes Rechenbuch Bd.3, Bronstein („Taschenbuch der Mathematik“)).

Mit aus den Gl.en (40),(45) und (47) folgt:

$$\Rightarrow x = C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{-a_1 t} + \frac{\mu l}{(1 + \mu)} . \quad (49)$$

Die Koeffizienten C_1 und C_2 lassen sich durch Randbedingungen, die der Aufgabe zu entnehmen waren, bestimmen. Die Randbedingungen lauten:

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \text{und} \quad x(0) = x_0 \quad (50)$$

$$\rightarrow \dot{x}(t=0) = C_1 a_1 e^{a_1 0} - C_2 a_1 e^{-a_1 0} = 0 \quad \Rightarrow C_1 = C_2 \quad (51)$$

$$\rightarrow x(t=0) = 2C_1 + \frac{\mu l}{1+\mu} = x_0 \quad \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{\mu l}{1+\mu} \right) \quad (52)$$

Die Lösung der DGL (39) lautet somit:

$$x = \left(x_0 - \frac{\mu l}{1 + \mu} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \underbrace{\left(e^{a_1 t} + e^{-a_1 t} \right)}_{2 \cdot \cosh(a_1 t)} + \frac{\mu l}{1 + \mu} . \quad (53)$$

3.3

An welchen Zeitpunkt ($t = T$) verlässt die Kette den Tisch? Mit $x_0 = 0$, $15m$ folgt aus Gl. (53):

$$x(T) = l = 0,5 \text{ m} . \quad (54)$$

Auflösen nach T liefert:

$$\Rightarrow T = \frac{1}{\sqrt{\frac{g(1+\mu)}{l}}} \cdot \operatorname{arccosh} \left(\frac{l - \frac{\mu l}{(1+\mu)}}{x_0 - \frac{\mu l}{(1+\mu)}} \right) = 0,64 \text{ s} . \quad (55)$$

3.4

Es soll $\dot{x}(t) = dx/dt = v(t)$ für $0 \leq t \leq T$ bestimmt werden. Ableiten von Gl. (53) nach t liefert:

$$\dot{x} = v(t) = \left(x_0 - \frac{\mu l}{1 + \mu} \right) \sqrt{\frac{g(1 + \mu)}{l}} \sinh \left(\sqrt{\frac{g(1 + \mu)}{l}} \cdot t \right) \quad (56)$$

3.5

Es soll $v(T)$ mit Ergebnis für T aus Gl. (55) berechnet werden:

$$v(T) = 1,8 \text{ m/s} . \quad (57)$$

Aufgabe 4

Es war ein Seil der Länge r_0 gegeben, welches an einem kreisrunden Baumstamm befestigt worden ist. Am Ende des Seiles befindet sich eine Masse m , die sich mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht zur Kreistangente bewegt (vgl. Abb. 4).

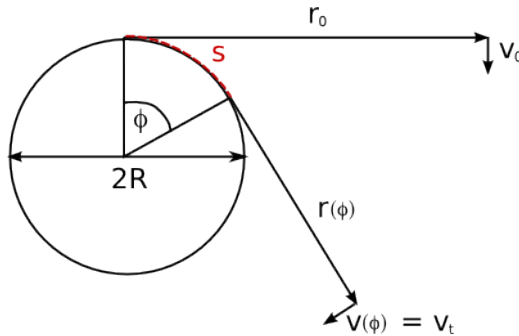


Abbildung 4: Skizze zu Aufgabe 4

Es ist angegeben, dass das Produkt aus sich ändernden Seillänge $r(\phi)$ und der senkrecht zur Tangente orientierten Geschwindigkeit $v(\phi) = v_t$ konstant ist, bzw.:

$$\frac{d(r(\phi) \cdot v(\phi))}{dt} = 0 . \quad (58)$$

Hierbei gibt ϕ den Winkel zwischen dem Startpunkt ($t = 0$) und dem derzeitigen Ansatzpunkt der Tangente an. Über ϕ lässt sich leicht die verbleibende Länge des Seiles bestimmen:

$$r(\phi) = r_0 - S . \quad (59)$$

s gibt den Teil des Seiles an, welcher sich bereits um den Baumstamm gewickelt hat:

$$S = 2\pi R \frac{\phi}{2\pi} = R\phi \quad (60)$$

Der Winkel π in Gl. (60) ist in Radianen (0 bis 2π) gegeben. $r(\phi)$ ergibt sich somit zu:

$$r(\phi) = r_0 \left(1 - \frac{R}{r_0} \phi \right) . \quad (61)$$

Die Winkelabhängigkeit von v lässt sich aus Gl. (58) herleiten. Da das Produkt $r(\phi) \cdot v(\phi)$ zeitlich konstant ist, muß lediglich die Konstante bestimmt und nach $v(\phi)$ aufgelöst werden. Mit den bekannten Anfangsbedingungen r_0 und v_0 folgt:

$$v(\phi)r(\phi) = v_0r_0 , \quad (62)$$

$$\Rightarrow v(\phi) = \frac{v_0r_0}{r(\phi)} = \frac{v_0}{1 - \frac{R}{r_0}\phi} . \quad (63)$$

Des Weiteren sollte die Zeitabhängigkeit (hier: implizite Zeitabhängigkeit) von $r(\phi)$, d.h. $\dot{r}(\phi)$ bestimmt werden. Die Geschwindigkeit mit der die Seillänge abnimmt ist proportional Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}(t)$:

$$\dot{r}(t) = -R\dot{\phi} = -R \frac{v(\phi)}{r(\phi)} = -\frac{R v_0}{r_0 \left(1 - \frac{R}{r_0} \phi\right)} \quad \text{mit} \quad \phi = \phi(t). \quad (64)$$

Das die Relation $\dot{\phi}(t) = \frac{v(\phi)}{r(\phi)}$ gilt kann man sich deutlich machen, wenn man den Winkel zwischen den Richtungen von r_0 und $r(\phi)$ betrachtet und diesen mit ϕ vergleicht. Dabei wird deutlich, dass diese Winkel gleich sind, womit die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das Seil um den Baumstamm wickelt, gleich $\dot{\phi}$ ist.