

2 Mechanik

2.1 Kinematik

2.1.1 Grundbegriffe

Die Mechanik ist der „klassischste“ Teil der Physik, sie umfasst diejenigen Aspekte die schon am längsten untersucht wurden. Dazu gehören z.B. die berühmten Fallversuche von Galilei.



Abbildung 2.1: Galileo Galilei (1564-1642)

Zu den wichtigsten Begründern gehört Galileo Galilei, der wichtige Beiträge zur experimentellen Untersuchung von Naturgesetzen (Mechanik, Astronomie) lieferte und vor allem sehr geschickt war, deren Bedeutung und seine Beiträge dazu öffentlichkeitswirksam zu verbreiten.

Dazu verwendete er vor allem seine „Dialoge“, in denen fiktive Personen die verschiedenen Systeme vergleichen.

Die eigentliche Formalisierung der Mechanik ist vor allem Isaac Newton (1642-1727) zu verdanken, welcher mit Hilfe weniger Grundprinzipien („Newtons Gesetzen“) den größten Teil des damaligen physikalischen und astronomischen Wissens herleiten konnte. Sein Hauptwerk sind die „Philosophiae naturalis principia mathematica“, also die mathematischen Grundlagen der Naturwissenschaft.

Die Mechanik kann aufgeteilt werden in



Abbildung 2.2: Titelseiten von Galileos Dialog über die Weltsysteme.

Statik: Zusammensetzung und Gleichgewicht von Kräften

Kinematik: Beschreibung von Bewegungsvorgängen

Dynamik: Kräfte verursachen Bewegung

Außerdem unterscheiden wir Teilgebiete danach, welche Objekte beschrieben werden. Wir beginnen mit punktförmigen Objekten (=„Massenpunkt“; Beispiel: Planeten). Danach werden meist starre und deformierbare Körper behandelt. Da diese in der Vorlesung „Mechanik“ extensiv diskutiert werden wird dieser Teil übersprungen, und wir beschäftigen uns direkt mit Flüssigkeiten und Gasen.

2.1.2 Eindimensionale Kinematik

Wir beginnen mit eindimensionaler Kinematik, d.h. mit einer Bewegung, welche mit einer einzigen Ortskoordinate beschrieben werden kann, welche die Position des Körpers auf einer vorgegebenen Bahn beschreibt. Ein typisches Beispiel ist eine Eisenbahn auf einem einzelnen Gleis: dieses kann gebogen

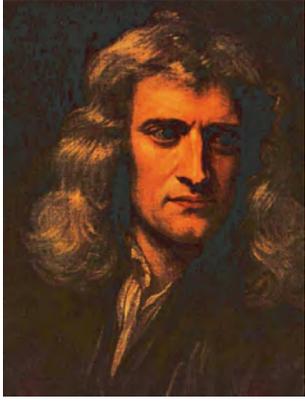


Abbildung 2.3: Isaac Newton (1642-1727).

sein, aber die Position der Eisenbahn ist exakt bestimmt wenn man die Position bezüglich einem Koordinatennullpunkt angibt.

Ein Massenpunkt ist ein Modell für einen Körper, dessen Ausdehnung für die behandelte Fragestellung keine Rolle spielt. Die Bewegung des Massenpunktes ist vollständig beschrieben wenn man die Position s als Funktion der Zeit t angibt. Dies erfolgt mathematisch durch eine Funktion $s(t)$ oder graphisch durch ein Weg-Zeit Diagramm.

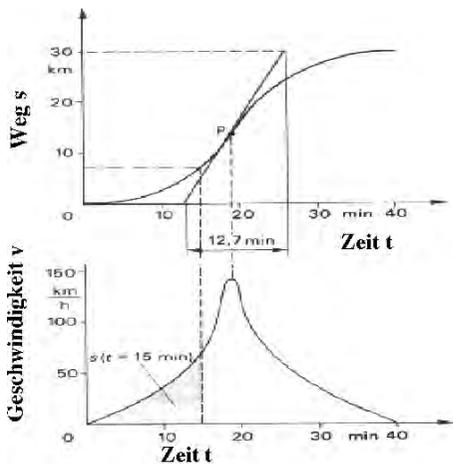


Abbildung 2.4: Weg-Zeit Diagramm.

Die Geschwindigkeit v des Massenpunktes kann aus dem Weg-Zeit Diagramm durch Ableitung bestimmt werden:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad [v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Graphisch ist die Geschwindigkeit durch die Steigung der Kurve im Weg-Zeit Diagramm bestimmt.

Anstelle der instantanen Geschwindigkeit $v(t)$ interessiert manchmal auch die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Im Weg-Zeit Diagramm ist dies die Steigung der direkten Verbindung zwischen zwei Punkten.

Anstelle des Weges kann man auch die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit auftragen. Im Geschwindigkeit-Zeit Diagramm ist die zurückgelegte Wegstrecke als Integral (=Fläche unter der Kurve) gegeben:

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(t) dt$$

Genau so wie die Geschwindigkeit als Änderung des Ortes pro Zeiteinheit definiert ist wird die Beschleunigung als Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit definiert:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad [a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Im Geschwindigkeit-Zeit Diagramm erscheint die Beschleunigung als Steigung der Kurve, im Ort-Zeit Diagramm als Krümmung: Positive Krümmung (nach oben) bedeutet positive Beschleunigung, negative Krümmung Verzögerung (d.h. Abbremsung). Die Geschwindigkeit ist durch das Integral der Beschleunigung gegeben:

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t) dt'$$

2.1.3 Konstante Beschleunigung

Ein wichtiger Spezialfall ist die konstante Beschleunigung, $a(t) = a$. Dazu gehört u. a. der freie Fall. Für einen Körper, der sich zunächst in Ruhe ($v_0 = 0$) am Punkt $x_0 = 0$ befindet nimmt die Geschwindigkeit bei konstanter Beschleunigung proportional zur Zeit zu, $v(t) = at$. Der zurückgelegte Weg ist deshalb

$$x(t) = \frac{a}{2} t^2$$

Auf der Erdoberfläche entspricht dies einer konstanten Beschleunigung nach unten mit $a = -g = -9,81 \text{ ms}^{-2}$ für ein Koordinatensystem, das senkrecht nach oben zeigt.

Wir erwarten somit, dass der zurückgelegte Weg quadratisch mit der Zeit ansteigt.

Exp. 14: Freier Fall (Fallschnüre)

Wir verifizieren diese Vorhersage anhand eines Experimentes. Jeweils vier Gewichte werden in unterschiedlicher Höhe über dem Boden aufgehängt und gleichzeitig losgelassen. An der ersten Schnur sind die Gewichte im Abstand 1:2:3:4 (d.h. linear) angebracht, an der zweiten im Abstand 1:4:9:16 (also quadratisch). Wir können akustisch feststellen, dass im zweiten Fall die Gewichte etwa gleichzeitig auf dem Boden (d.h. der Metallplatte) auftreffen.

$$\vec{r}(t) = \underbrace{\vec{r}(0)}_{\text{Anfangsort}} + \underbrace{\vec{v}(0)}_{\text{Anfangsgeschwindigkeit}} t + \underbrace{\vec{a}/2}_{\text{Beschleunigung}} t^2$$

Abbildung 2.5: Superpositionsprinzip.

Befindet sich der Körper zu Beginn nicht in Ruhe, so wird die Bewegung aufgrund der Anfangsgeschwindigkeit der Bewegung aufgrund der (gleichförmigen) Beschleunigung überlagert. Man bezeichnet dies als Superpositionsprinzip: der Anfangsort, die gleichförmige Bewegung und die gleichförmige Beschleunigung können unabhängig berechnet und die Resultate addiert werden.

Als Beispiel betrachten wir einen Körper, der von einem Turm (Höhe $h_0 = 10 \text{ m}$) mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 5 \text{ m/s}$ senkrecht nach oben geworfen wird. Die Schwerkraft erzeugt eine zeitlich konstante Beschleunigung von $a = -g = -9.81 \text{ m/s}^2$ nach unten.

Die Geschwindigkeit wird somit

$$v(t) = v_0 + at = (5 - 9.81t) \text{ m/s} \quad [t] = \text{s}$$

Der erste Term beschreibt die Anfangsgeschwindigkeit und ist unabhängig von der Zeit; dazu wird das Produkt aus Beschleunigung und Zeit addiert.

Für den Ort (d.h. die Höhe h) erhalten wir

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0 + v_0 t + a/2 t^2 = \\ &= (10 + 5t - 4.9t^2) \text{ m}. \quad [t] = \text{s}. \end{aligned}$$

Hier stellt der erste Term den Ausgangspunkt dar - er ist zeitunabhängig. Der zweite Term beschreibt den Effekt der Anfangsgeschwindigkeit, und der dritte Term ist auf die konstante Beschleunigung zurückzuführen.

Die maximale Höhe wird erreicht für $v(t) = 0$, d.h.

$$5 - 9,81 t_m = 0 \rightarrow t_m = 0,51 \text{ s}.$$

Sie beträgt dann

$$h(0,51 \text{ s}) = (10 + 2.55 - 1.27) \text{ m} = 11,28 \text{ m}.$$

Sie trifft auf den Boden ($h = 0$) auf wenn

$$\begin{aligned} h(t_0) = 0 &= h_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 = \\ &= 10 + 5t_0 - 4.9t_0^2, \end{aligned}$$

d.h. bei

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gx_0}}{g} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 196}}{9,81} = \\ &= \frac{5 \pm 14,87}{9,81}. \end{aligned}$$

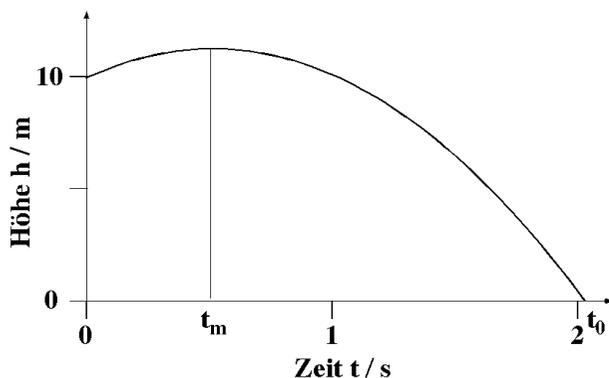


Abbildung 2.6: Höhe als Funktion der Zeit.

Wir erhalten somit zwei Lösungen:

$$t_1 = 2,03 \quad \text{und} \quad t_2 = -1,01.$$

Wir müssen jetzt überprüfen weshalb wir zwei Lösungen erhalten. Die erste ($t_1 > 0$) ist diejenige die wir suchen. Die zweite ($t_2 < 0$) entspricht ebenfalls einer Durchquerung des Bodens durch den Körper - allerdings bevor er vom Turm nach oben geworfen wurde. Der Körper würde bei dieser Lösung bei $t = 0$ an der Spitze des Turmes eintreffen und anschließend die gleiche Kurve verfolgen wie der Körper, der bei $t = 0$ geworfen wurde. Man erhält häufig mathematisch mehr Resultate als physikalisch sinnvoll sind, wenn man die Randbedingungen nicht berücksichtigt: in diesem Fall betrachten wir nur Zeiten $t > 0$.

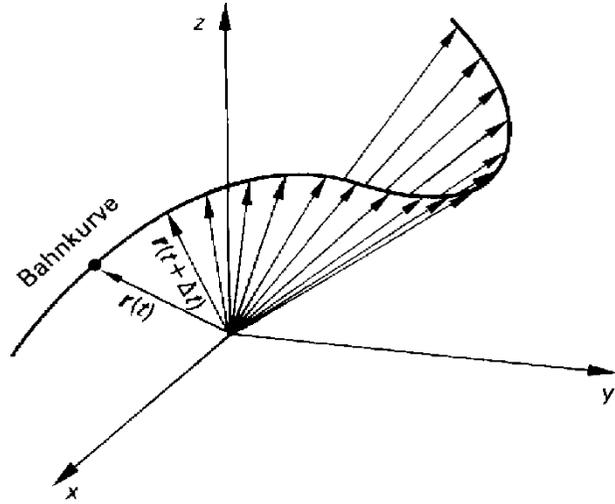


Abbildung 2.7: Bahnkurve in 3D.

2.1.4 Kinematik in zwei und drei Dimensionen

In vielen Fällen findet Bewegung in mehr als einer Dimension statt. In diesen Fällen wird die Position durch zwei oder mehr Koordinaten beschrieben. Grundsätzlich ist man frei in der Wahl der Koordinaten, doch sind häufig kartesische Koordinatensysteme einfach zu handhaben. Dabei handelt es sich um rechtwinklige Koordinatensysteme mit gleichem Maßstab in allen Richtungen. Die Bewegung eines Massenpunktes in drei Dimensionen wird dann beschrieben durch

$$\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}.$$

Dementsprechend sind auch Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \left\{ \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right\} = \\ &= \{v_x(t), v_y(t), v_z(t)\} \end{aligned}$$

und die Beschleunigung

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \left\{ \frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt}, \frac{dv_z(t)}{dt} \right\} \\ &= \{a_x(t), a_y(t), a_z(t)\} \end{aligned}$$

Vektoren in (zwei oder) drei Dimensionen.

Trägt man den Weg als Kurve auf, so ist die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ an einem beliebigen Punkt $\vec{r}(t)$ entlang der Tangente gerichtet.

Ist die Beschleunigung eines Massenpunktes gegeben, so können Geschwindigkeit und Ort als Funktion der Zeit für die Komponenten einzeln bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t') dt' = \\ &= \{v_x(0), v_y(0), v_z(0)\} + \\ &+ \left\{ \int_0^t a_x(t') dt', \int_0^t a_y(t') dt', \int_0^t a_z(t') dt' \right\}. \end{aligned}$$

Somit sind die drei Komponenten unabhängig voneinander.

Für den Fall konstanter Beschleunigung erhalten wir wiederum

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \vec{a}t$$

und

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{1}{2} \vec{a}t^2.$$

2.1.5 Wurfparabel

Wir illustrieren dieses Verhalten anhand einer zweidimensionalen Bewegung im Schwerfeld der Erde,



Abbildung 2.8: Schiefer Wurf.

d.h. mit konstanter Beschleunigung nach unten. Wir wählen ein Koordinatensystem mit x in horizontaler und z in vertikaler Richtung (nach oben). Der Körper sei zum Zeitpunkt $t = 0$ bei

$$\vec{r}(0) = \{x(0), z(0)\} = \{0, 0\}.$$

Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt

$$\vec{v}(0) = v_0 \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$$

und die Beschleunigung

$$\vec{a} = \{0, -g\},$$

sei also konstant.

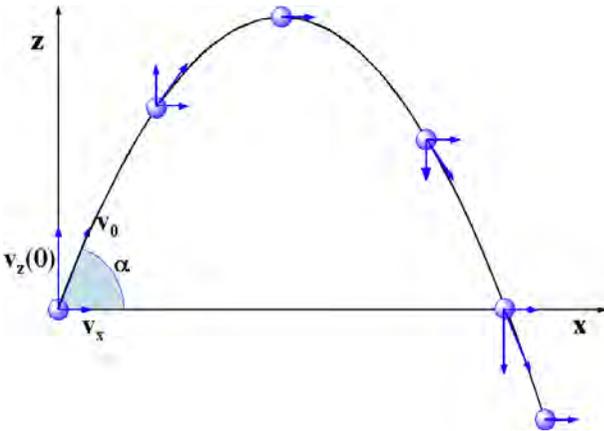


Abbildung 2.9: Bahnkurve des schiefen Wurfs.

Somit ist die Bewegung

$$\vec{r}(t) = v_0 t \{\cos \alpha, \sin \alpha\} + \frac{t^2}{2} \{0, -g\} =$$

$$= \left\{ v_0 t \cos \alpha, v_0 t \sin \alpha - g \frac{t^2}{2} \right\}.$$

Wir können diese Kurve auch als Gleichung schreiben. Die beiden Koordinaten ergeben 2 Gleichungen:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad z = v_0 t \sin \alpha - g \frac{t^2}{2}.$$

Wir lösen die erste Gleichung nach der Zeit t auf:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

und setzen diesen Ausdruck in die 2te Gleichung ein:

$$z = x \tan \alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Kurven der Form $z = ax + bx^2$ stellen Parabeln dar. In diesem speziellen Fall spricht man von der "Wurfparabel". Man kann sie z.B. durch einen Wasserstrahl sichtbar machen.

Exp. 17: Wasserstrahlparabel

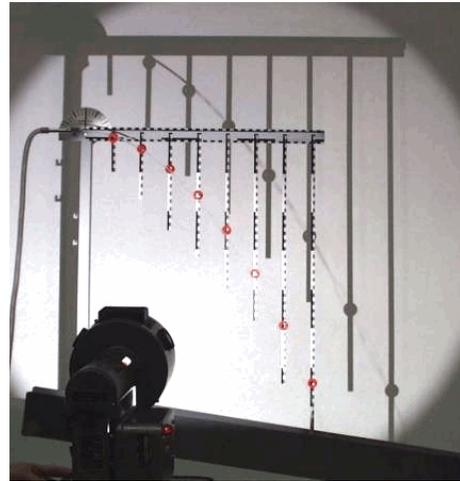


Abbildung 2.10: Wasserstrahlparabel.

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, dass das Wasser horizontal austritt, d.h. $\alpha = 0$. Die Gleichung reduziert sich dann zu

$$z = -x^2 \frac{g}{2v_0^2},$$

d.h. eine nach unten offene Parabel. Im Experiment tritt der Wasserstrahl horizontal aus der Düse aus und fällt unter dem Einfluss der Gravitationsbeschleunigung. Die roten Kreise markieren eine Parabel durch die Werte $(x/y) = (1/1), (2/4), (3/9), (4/16), (5/25) \dots$

Wird der Wasserstrahl gekippt, so erhält das Wasser eine Anfangsgeschwindigkeit in vertikaler Richtung. Wir erwarten, dass in diesem Fall der Parabel eine lineare Bewegung $(x, z) = v_0 t (\cos \alpha, \sin \alpha)$ überlagert wird. Dies kann man im Experiment leicht durch ein Kippen der Geraden zeigen, an der die Maßkreise befestigt sind.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_x t + a_x / 2 t^2 \\ z_0 + v_z t + a_z / 2 t^2 \end{pmatrix}$$

unabhängig von x
unabhängig von z

Abbildung 2.12: Das Unabhängigkeitsprinzip.

Das Unabhängigkeitsprinzip besagt, dass sich die beiden Koordinaten unabhängig voneinander entwickeln. Dies gilt immer für gleichförmig beschleunigte Bewegung.

2.1.6 Unabhängigkeitsprinzip

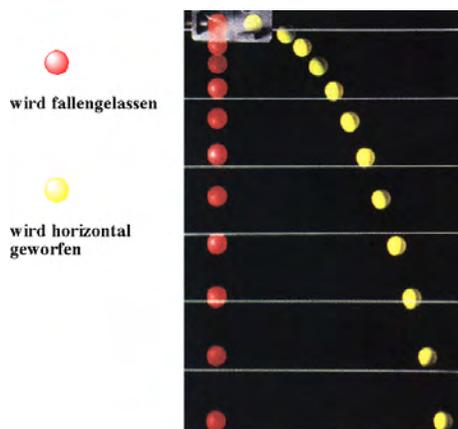


Abbildung 2.11: Unabhängigkeitsprinzip.

Nicht nur die Anfangswerte von Beschleunigung, Geschwindigkeit und Position gehen linear in die Gleichung ein; wir haben auch gesehen, dass die einzelnen Koordinaten voneinander unabhängig sind. Die bedeutet z.B., dass eine Kugel, welche aus 1 m Höhe fallengelassen wird, den Boden nach $t = \sqrt{2s/a} = 0.45\text{s}$ erreicht, unabhängig davon ob sie sich zu Beginn in Ruhe befinden oder ob sie eine horizontale Anfangsgeschwindigkeit aufweisen. Wir überprüfen dies, indem wir zwei Kugeln am gleichen Hebel befestigen. Wird mit dem Hammer darauf geschlagen, so fällt die eine senkrecht hinunter, die andere in einer Parabel. Dass beide gleichzeitig auf dem Boden auftreffen lässt sich leicht akustisch verifizieren.

Exp. 18: Unabhängigkeitsprinzip.

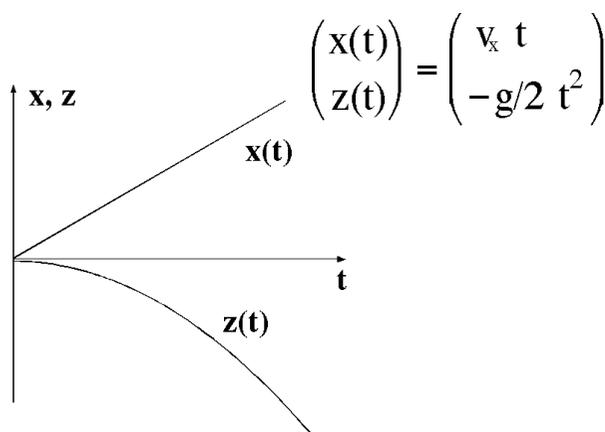


Abbildung 2.13: Koordinaten

Die x-Komponente der Geschwindigkeit ist konstant, die x Koordinate wächst deshalb linear (in beiden Fällen; für die rote Kugel ist $v_x = 0$). Die z-Komponente ist gleichförmig beschleunigt; die Koordinate wächst deshalb quadratisch mit der Zeit. Dies gilt für beide Kugeln.

Die Voraussage kann verifiziert werden, indem man 2 Kugeln gleichzeitig fallen lässt, von denen die eine zusätzlich eine horizontale Geschwindigkeitskomponente erhält.

Exp. 18a: Affenschuss

Ein weiteres Experiment dazu ist der "Affenschuss": Ein Jäger zielt auf einen Affen. Dieser lässt sich fal-



Abbildung 2.14: Unabhängigkeitsprinzip: Eine Kugel wird fallen gelassen, die andere gleichzeitig horizontal geworfen. Beide treffen gleichzeitig am Boden auf.

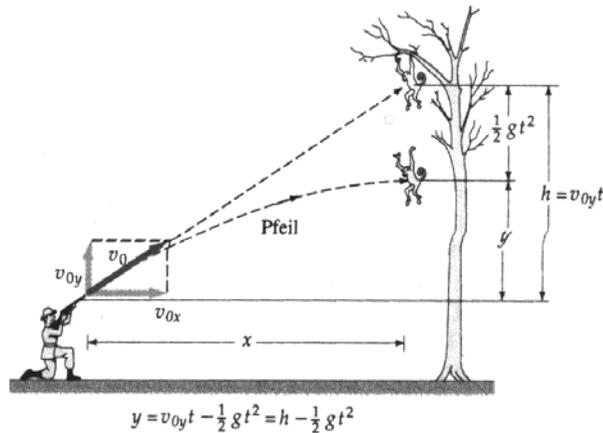


Abbildung 2.15: Der "Affenschuss".

len wenn er den Mündungsblitz des Gewehrs sieht. Wohin muss der Jäger zielen um den Affen (Höhe h , Distanz x_0) zu treffen? Was ist der Einfluss der Anfangsgeschwindigkeit v_0 ? Vernachlässigt man zunächst die Erdbeschleunigung, so muss der Jäger offenbar auf den Affen zielen um ihn zu treffen, d.h. $\tan \alpha = h/x_0$. Die Flugzeit der Kugel ist

$$t_0 = \frac{x_0}{v_0 \cos \alpha}.$$

Der zusätzliche Einfluss der Erdbeschleunigung ist identisch für den Affen und die Kugel: Beide fallen um eine Strecke $z = -gt_0^2/2$. Die Kugel trifft somit unabhängig von der Mündungsgeschwindigkeit wenn der Jäger richtig zielt und der Affe sich sofort fallen lässt.

Im Sinne einer kurzen Zusammenfassung soll hier nochmals daran erinnert werden, was das Thema der

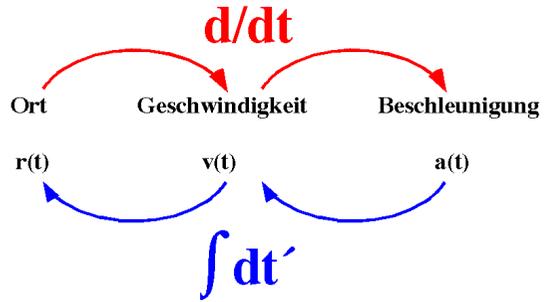


Abbildung 2.16: Zusammenfassung der Kinematik.

Kinematik ist: Es geht um die Beziehung zwischen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung, welche aus einander durch Differenzieren, resp. Integrieren hergeleitet werden können. In vielen Fällen gilt dies für die verschiedenen Raumdimensionen unabhängig voneinander.

2.2 Dynamik von Massenpunkten

Die Dynamik befasst sich mit der Bewegung, welche von Kräften erzeugt und geändert wird.

2.2.1 Definitionen

Die wichtigsten Grundbegriffe der Dynamik sind die Masse, der Impuls und die Kraft.

Masse ein Maß für den Widerstand eines Körpers gegen Bewegungsänderungen. Sie ist unabhängig vom Ort und vom Bewegungszustand. Damit ist sie auch ein geeignetes Maß für die Stoffmenge. Einheit: 1 kg. Man unterscheidet manchmal zwischen der trägen Masse (siehe oben) und der schweren Masse, welche ein Maß für die Schwerkraft ist. Experimentell findet man keinen Unterschied zwischen schwerer und träger Masse und die Relativitätstheorie zeigt, dass sie sich nicht unterscheiden.

Exp. 4: Trägheit der Masse

Impuls ist ein Maß für die Bewegung. In der klassischen Mechanik ist er gegeben durch das Produkt aus Geschwindigkeit und Masse. Er ist

somit eine vektorielle Größe parallel zur Geschwindigkeit. Einheit: m kg s^{-1} .

Kraft ist ein Maß für die Fähigkeit, eine Bewegungsänderung zu erzeugen. Einheit: $\text{N} = \text{m kg s}^{-2}$.

2.2.2 Newton'sche Axiome

Die Grundlage der klassischen Mechanik sind die drei Newton'schen Axiome:

Trägheitsgesetz: Ein Körper, auf den keine äußeren Kräfte wirken, behält seine Geschwindigkeit nach Richtung und Betrag bei.

Exp. 10: Gleichförmige Bewegung (Luftkissenschiene)

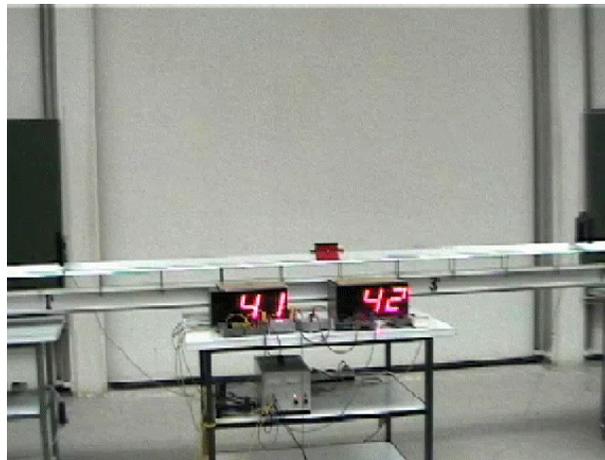


Abbildung 2.17: Experimentelle Verifikation von Newton's Axiomen: Bewegung auf einer Luftkissenschiene.

Die Bedingung, die in diesem Axiom enthalten ist, ist in der Praxis natürlich nur sehr schwer zu realisieren. Man kann sie in einem Demonstrationsexperiment näherungsweise verwirklichen indem man einen Körper auf einem Luftkissen laufen lässt und so Reibungskräfte sehr gering hält. An zwei Stellen dieser Schiene wird jeweils gemessen wie lange der Körper die Fozelle verdunkelt, wie lange er also braucht um eine Strecke zurückzulegen, die seiner eigenen Länge entspricht. Wir erwarten eine Zeit

$t = l/v$, wobei l die Länge des Körpers darstellt. Die gemessene Zeit ist somit indirekt proportional zur Geschwindigkeit, eine Änderung der Geschwindigkeit erscheint als eine Änderung der Zeit. Das Experiment zeigt, dass die gemessenen Zeiten in etwa konstant sind.

Aktionsgesetz = Grundgesetz der Mechanik: Die zeitliche Änderung des Impulses $p = mv$ ist gleich der resultierenden Kraft F :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Eine Kraft wirkt auf diese Körper offenbar am Umkehrpunkt; dies geschieht durch zwei Federn, welche am Wagen, resp. an der Schiene befestigt sind.

Wechselwirkungsgesetz (actio = reactio): Wirkt ein Körper 1 auf einen Körper 2 mit der Kraft F_{12} so wirkt der Körper 2 auf den Körper 1 mit der Kraft

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12},$$

d.h. mit gleichen Betrag und umgekehrter Richtung.

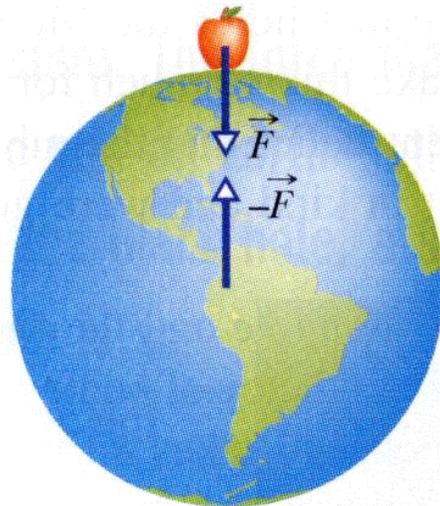


Abbildung 2.18: 3. Newtonsches Axiom: der Apfel erfährt die gleiche Kraft wie die Erde.

Exp. 24: Actio = Reactio

Dieses Prinzip kann in einem einfachen Experiment verifiziert werden. Dabei werden nicht direkt die

Kräfte gemessen, sondern das Integral der Kräfte.
Aus

$$F = \frac{dp}{dt}$$

folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = \Delta p = p(t_2) - p(t_1),$$

d.h. die gesamte Wirkung der zeitabhängigen Kraft F ist eine Impulsänderung Δp . Sind die beiden Kräfte zu jedem Zeitpunkt entgegengesetzt so sind auch die Impulsänderungen entgegengesetzt.

Dies kann sehr schön an Wagen auf einer Luftkissenschiene gezeigt werden, z. B. indem man die beiden Wagen zunächst in Ruhe starten, wobei eine Feder zwischen ihnen komprimiert ist, die eine abstoßende Kraft erzeugt. Dadurch werden sie in entgegengesetzte Richtungen beschleunigt. Sind beide gleich schwer so erhalten sie auch die gleiche (entgegengerichtete) Geschwindigkeit, wie die Messung durch die beiden Lichtschranken ergibt. Wird die Masse des einen Wagens verdoppelt, so bewegt sich dieser langsamer; seine Geschwindigkeit ist nur halb so groß wie diejenige des leichteren Wagens, und damit haben beide den gleichen Impuls,

$$m_2 v_2 = 2m_1 \frac{v_1}{2} = m_1 v_1.$$

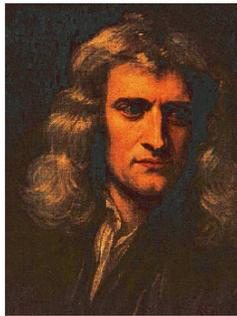
- **Trägheitsgesetz** : $v = \text{const}$
ohne äußere Kraft
- **Aktionsgesetz** : $dp/dt = F$
- **Actio = Reactio** : $F_{12} = -F_{21}$

Voraussetzungen:

- **Inertialsystem** (d.h. nicht beschleunigt)
- **Kleine Geschwindigkeiten**, $v \ll c$

Abbildung 2.19: Newton und seine Axiome.

Diese drei Grundgesetze sind die wichtigsten Grundlagen für die Dynamik. Ihre Einführung führte zu einer radikalen Vereinfachung der Physik und Astronomie.



Der experimentelle Befund ist, dass diese drei Axiome gelten sofern folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Das Bezugssystem ist nicht beschleunigt; Bezugssysteme, in denen die drei Axiome gelten werden als Inertialsysteme bezeichnet.
- Die (relativen) Geschwindigkeiten der Körper sind klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit (Relativitätstheorie).

2.2.3 Kräfte

Kräfte sind aus der Statik bekannt, welche im Wesentlichen auf dem Gleichgewicht der Kräfte beruht. In der Dynamik sind die Kräfte die Ursache für Bewegungsänderungen. Dazu gehören z.B. elastische Kräfte, welche im linearen Bereich mit dem Hooke'schen Gesetz $F = -c\Delta x$ beschrieben werden können.

Ein besonders interessanter Fall ist die Gewichtskraft. Sie resultiert aus der Massenanziehungskraft

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Hier stellt

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \text{s}^2}$$

die Gravitationskonstante dar. Wegen der Schwäche der Gravitationswechselwirkung ist eine entsprechende Messung sehr aufwändig und bedarf guter Planung um Fehler zu vermeiden.

Die Schwerkraft, die z.B. im Schwerfeld der Erde auf einen Körper wirkt, ist somit proportional zur Masse des Körpers. Die resultierende Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F} = \frac{1}{m} mg = g.$$

Hier ist g die Erdbeschleunigung, welche offenbar gegeben ist durch

$$g = \frac{Gm_{\text{Erde}}}{r_{\text{Erde}}^2}.$$

Damit ist die induzierte Impulsänderung proportional zur Masse, während die Beschleunigung unabhängig von der Masse ist.

Exp. 15: freier Fall im Vakuum

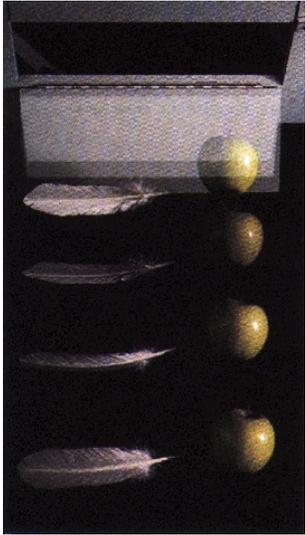


Abbildung 2.20: Freier Fall eines Apfels und einer Feder im Vakuum.

Letzterer Effekt wird bekanntlich im Allgemeinen davon überdeckt, dass unterschiedliche Luftreibung vorliegt, kann aber im Vakuum leicht gezeigt werden. In diesem Bild werden ein Apfel und eine Feder im Vakuum fallen gelassen. Die einzelnen Aufnahmen zu unterschiedlichen Zeiten zeigen, dass sie gleich schnell fallen.

Eine weitere Art von Kräften sind elektrische und magnetische Kräfte; diese werden im Kapitel 3 behandelt.

2.2.4 Reibungskräfte

Eine weitere Gruppe von Kräften sind Reibungskräfte. Man unterscheidet zwischen Gleitreibung und Haftreibung. Haftreibung führt dazu, dass ein Körper sich nicht bewegt, wenn die daran angreifende Kraft geringer ist als die Haftreibung. Gleitreibung entsteht wenn ein Körper sich gegenüber einer Unterlage oder einem Medium bewegt. Sie ist der

Bewegungsrichtung entgegengesetzt und hängt von der relativen Geschwindigkeit zwischen Körper und Umgebung ab. Man unterscheidet

Äußere Reibung/Festkörperreibung. Bei Festkörpern, die sich auf einer festen Unterlage bewegen. Hier ist die Reibungskraft F_R (in gewisser Näherung) proportional zur Normalkraft F_N , mit der der Körper auf die Unterlage drückt:

$$F_R = \mu F_N.$$

Die Proportionalitätskonstante μ wird als Reibungszahl bezeichnet; sie ist unabhängig von der (makroskopischen) Kontaktfläche und von der Geometrie. Man unterscheidet zwischen Gleitreibung und Haftreibung, wobei die erstere sich auf bewegte Körper bezieht, die zweite auf ruhende. Typische Reibungskoeffizienten liegen im Bereich von 0.1 bis 0.5, wobei Extremwerte deutlich kleiner, aber auch größer als 1 werden können.

Exp. 25 : Reibung



Abbildung 2.21: Messung des Reibungswiderstandes mit Hilfe eines Federkraftmessers.

In diesem Experiment misst man die Stärke der Reibung über eine Federwaage. Wir stellen fest, dass die Haftreibung größer ist als die Gleitreibung und dass die Gleitreibung mit dem Gewicht des Körpers zunimmt,

Innere Reibung in Flüssigkeiten. Für laminare Strömungen gilt näherungsweise

$$F_R = b v.$$

Der Reibungskoeffizient b hängt von der Größe und Form des Körpers und der Viskosität der Flüssigkeit ab. Für eine Kugel mit Radius r gilt

$$b_K = 6\pi\eta r.$$

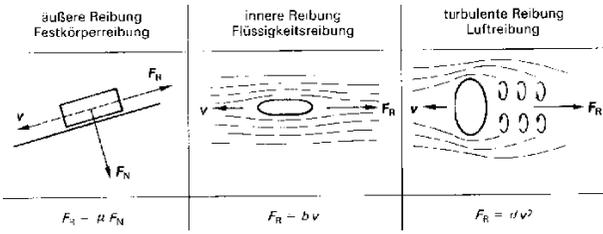


Abbildung 2.22: Reibungskräfte.

$$F_R = d v^2.$$

Der Luftreibungskoeffizient d hängt von Form und Oberfläche des Körpers, aber auch von der Art des strömenden Mediums ab. Eine übliche Beschreibung verwendet den Widerstandsbeiwert c_w :

$$d = \frac{1}{2} c_w \rho A,$$

wobei ρ die Dichte des Mediums und A die Querschnittsfläche darstellt.

Exp. 73: viskose Reibung

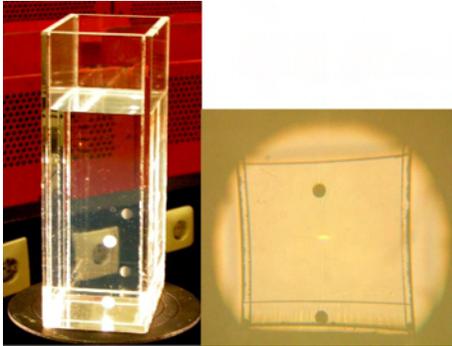


Abbildung 2.23: Freier Fall einer Kugel in Öl.

Diese kann gemessen werden indem man die Sinkgeschwindigkeit von Kugeln in einer viskosen Flüssigkeit misst. Nach einer "Anlaufstrecke" erreicht die Kugel eine konstante Geschwindigkeit. Diese ist dadurch bestimmt, dass die Schwerkraft gerade gleich groß und entgegengesetzt gerichtet zur Reibungskraft ist:

$$F_G = F_R = (m_K - m_{Fl})g = 6\pi\eta r v.$$

Hier ist m_K die Masse der Kugel und m_{Fl} die Masse der verdrängten Flüssigkeit, welche Auftrieb erzeugt. Wir schreiben diesen Ausdruck als

$$(\rho_K - \rho_{Fl}) \frac{4\pi}{3} r^3 g = 6\pi\eta r v$$

und lösen auf nach der Geschwindigkeit v :

$$v = (\rho_K - \rho_{Fl}) \frac{2g}{9\eta} r^2.$$

Größere Kugeln sollten also schneller fallen.

Turbulente Reibung / Luftreibung. Sie kann näherungsweise beschrieben werden als

2.2.5 Raketengleichung



Abbildung 2.24: Rakete beim Start.

Raketen bewegen sich im Weltraum und können beschleunigen, ohne dass äußere Kräfte auf sie wirken. Wie ist dies mit dem Impulssatz vereinbar?

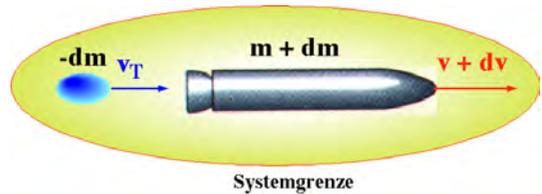


Abbildung 2.25: Modell einer Rakete.

Raketen erzeugen Schub indem sie einen Treibstoff mit möglichst hoher Geschwindigkeit nach hinten ausstoßen. Die Impulserhaltung gilt für das Gesamtsystem Rakete plus Treibstoff (Vorrat in der Rakete plus ausgestoßener Teil). Der Treibstoff wird nach hinten beschleunigt, mit einer Kraft, welche

gleich stark die Rakete nach vorn beschleunigt. Dadurch ändert sich sowohl die Masse wie auch die Geschwindigkeit der Rakete: im Zeitintervall dt ändert sich die Masse m der Rakete um dm (mit $dm < 0$) und die Geschwindigkeit v um dv (> 0). Der Impuls des Gesamtsystems (=Rakete plus ausgestoßener Treibstoff) ändert sich somit um

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \\ &= [(m+dm)(\vec{v}+d\vec{v}) - dm\vec{v}_T] - m\vec{v} = \\ &= md\vec{v} - dm(\vec{v}_T - (\vec{v} + d\vec{v})) = 0. \end{aligned}$$

Hier stellt \vec{v}_T die Geschwindigkeit des Treibstoffes dar. Wir definieren die Geschwindigkeit \vec{v}_{rel} des Treibstoffs relativ zur Rakete als

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_T - (\vec{v} + d\vec{v})$$

und erhalten damit die Raketengleichung

$$d\vec{p} = m d\vec{v} - dm \vec{v}_{rel} = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet für Anfangsgeschwindigkeit \vec{v}_0 , konstante Austrittsgeschwindigkeit des Treibstoffes und konstante Rate des Treibstoffausstoßes

$$\vec{v}_{end} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{rel} \ln \frac{m_0}{m_{end}},$$

wobei m_0 die Anfangsmasse bezeichnet und m_{end} die verbleibende Masse bei Brennschluss.

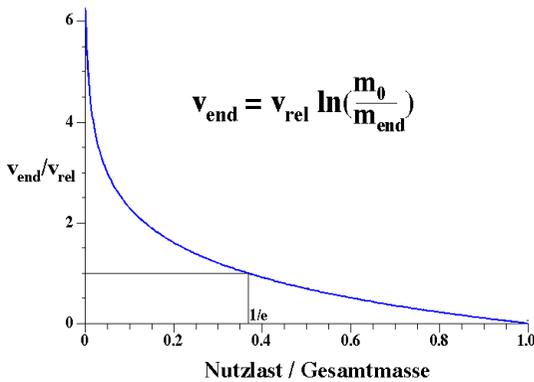


Abbildung 2.26: Endgeschwindigkeit der Rakete als Funktion der Nutzlast.

Man kann somit beliebig hohe Geschwindigkeiten erreichen: Allerdings nimmt das verbleibende Gewicht (d.h. die Nutzlast) exponentiell mit der Geschwindigkeit ab.

Exp. 47: Raketenantrieb



Abbildung 2.27: Modellrakete.

Ein einfaches Modell einer Rakete zeigt bereits die wichtigsten Merkmale. Diese Modellrakete kann mit Luft oder Wasser als Treibstoff verwendet werden, wobei die Relativgeschwindigkeit in beiden Fällen durch Aufpumpen mit Druckluft erzeugt wird. Während die Endgeschwindigkeit bei Luft als Treibstoff relativ bescheiden ist findet man bei Wasser als Treibstoff eine wesentlich höhere Endgeschwindigkeit. Die relative Austrittsgeschwindigkeit ist im Falle von Luft höher, das Massenverhältnis ist jedoch bei Wasser als Treibstoff erheblich günstiger.

In der theoretischen Analyse haben wir die Schwerkraft nicht berücksichtigt. Startet die Rakete von der Erde muss noch die Schwerebeschleunigung abgezogen werden, so dass die resultierende Beschleunigung und Geschwindigkeit deutlich niedriger werden.

Als Beispiel betrachten wir die erste Stufe der Saturn V Rakete des Apollo Programms. Ihre Ausstoßgeschwindigkeit v_{rel} betrug 2220 m/s, die Startmasse $m_0 = 2,95 \cdot 10^6$ kg, die Nutzlast 27% davon, und die Brenndauer 130 s. Bei konstantem Massestrom betrug dieser

$$\frac{dm}{dt} = 2,95 \cdot 10^6 \text{ kg} \frac{0,73}{130 \text{ s}} = 16565 \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Dies entspricht einem Schub

$$\frac{dm}{dt} v_{rel} = 16565 \cdot 2220 \text{ N} = 36,8 \text{ MN}.$$

Damit war die Anfangsbeschleunigung am Boden

$$\frac{dv}{dt} = -g + \left| \frac{dm}{dt} \right| \frac{v_{rel}}{m_0} = 2,66 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Am Ende der Brenndauer ist die Beschleunigung

$$\frac{dv}{dt} = -g + \left| \frac{dm}{dt} \right| \frac{v_{rel}}{m_{end}} = 36,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Die Endgeschwindigkeit beträgt

$$v_{end} = -gt_B + v_{rel} \ln \frac{m_0}{m_{end}} = -1275 + 2906 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$= 1,63 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

2.3 Arbeit und Energie

2.3.1 Motivation und Definition

Prinzipiell kann man mit den Newton'schen Axiomen die Bewegung von Massenpunkten wie auch Systemen von Massenpunkten beschreiben. In vielen Fällen ist es aber sehr aufwendig, die Bewegungsgleichungen exakt zu lösen. Es ist dann nützlich, andere Methoden zur Verfügung zu haben, um relevante Aussagen machen zu können. Ein wichtiges und sehr leistungsfähiges Hilfsmittel ist das Konzept der Energie.



Abbildung 2.28: Ein fahrender Zug besitzt kinetische Energie.

Als Beispiel betrachten wir eine Eisenbahn, die mit einer Geschwindigkeit von 250 km/h auf ebener Strecke fährt. Die Zugkraft der Lokomotive reicht genau um die Reibungskraft zu überwinden. Sie fährt auf einen Hügelskamm zu, der 200 m über der

Ebene liegt. Gelingt es der Eisenbahn, diesen Hügel mit konstanter Zugkraft zu überqueren? Die Frage kann mit Hilfe der Newton'schen Axiome diskutiert werden, aber nur wenn der gesamte Streckenverlauf (genauer: die Steigung als Funktion des Ortes) bekannt ist. Am Ende des Kapitels werden wir zeigen, dass dies nicht nötig ist.

Exp. 23: Hemmpendel

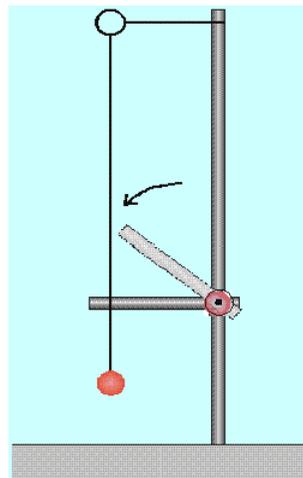


Abbildung 2.29: Das Hemmpendel

Ein zweites Beispiel kann etwas einfacher im Experiment gezeigt werden: Wir betrachten ein schwingendes Pendel, bei dem wir jeweils einmal pro halbe Periode eine Umlenkung einführen, so dass die Pendellänge verkürzt wird. Frage: wie sieht die Bahn des Pendels jetzt aus?

Wir beginnen mit der Definition der Arbeit. Die Arbeit, die an einem System geleistet wird, ist definiert als das Integral der Kraft F , welche von außen auf das System ausgeübt wird, über den Weg,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \rightarrow W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Die Einheit der Arbeit beträgt demnach

$$[W] = \text{Nm} = \text{J} = \text{Joule} = \text{m}^2 \text{kg s}^{-2}.$$

Wie aus der Definition hervorgeht trägt nur diejenige Komponente der Kraft zur Arbeit bei, welche parallel zum zurückgelegten Weg wirkt, resp. nur diejenige Komponente des Weges, die parallel zur angelegten Kraft zurückgelegt wird.

Die Kraft, welche hier eingesetzt werden muss, ist die von außen angelegte Kraft. Somit ist die Arbeit positiv definiert wenn gegen den Widerstand des Systems Arbeit verrichtet wird, z.B. wenn ein Körper angehoben wird. Im Falle eines Motors, wo der explodierende Treibstoff eine Kraft erzeugt, wird dem Motor Arbeit entzogen, d.h. die am Motor geleistete Arbeit ist negativ. Dies kann man natürlich auch so betrachten, dass der Motor an seiner Umwelt Arbeit leistet.

2.3.2 Beispiele

Ist die Kraft unabhängig vom Ort, so muss lediglich die Projektion des Weges auf die Kraft integriert werden. Beispiele dafür sind die Schwerkraft (in der Nähe der Erdoberfläche), die Beschleunigungskraft für eine konstante Masse, oder die Arbeit gegen eine Reibungskraft.

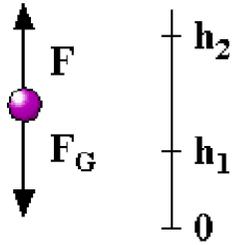


Abbildung 2.30: Hebung eines Körpers.

Ein typischer Fall ist die Hebung eines Körpers gegen die Gewichtskraft. Hier ist die erforderliche Kraft $\vec{F} = -\vec{F}_G = mg$, unabhängig vom Ort. Da Kraft und Wegelement parallel sind, reduziert sich das Integral auf

$$W = \int_{h_1}^{h_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = mg \int_{h_1}^{h_2} ds = mg(h_2 - h_1).$$

Mit der Notation $h = h_2 - h_1$ für die Höhendifferenz erhält man somit für die zu leistende Arbeit

$$W = mgh.$$

Die Arbeit hängt somit nur von der Höhendifferenz h ab.

Wir betrachten als nächstes den Fall, dass ein Körper auf einer schiefen Ebene reibungsfrei nach oben geschoben wird. Die Hangabtriebskraft beträgt $F_H =$

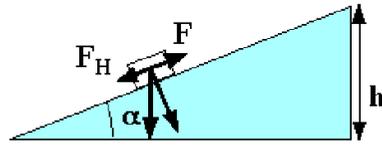


Abbildung 2.31: Schiefe Ebene.

$-mg \sin \alpha$. Somit ist eine gleich starke Kraft in Bewegungsrichtung notwendig, um den Körper zu transportieren. Die zurückgelegte Wegstrecke beträgt $h/\sin \alpha$. Somit ist insgesamt eine Arbeit $W = mgh$ notwendig. Offenbar ist dies unabhängig von der Neigung der Ebene.

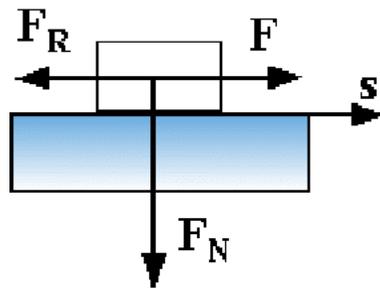


Abbildung 2.32: Verschiebung in der Ebene.

Als nächsten Fall betrachten wir die Arbeit, die benötigt wird, um einen Körper auf einer horizontalen Fläche gegen die Reibungskraft zu bewegen. Die Reibungskraft beträgt

$$F_R = \mu F_N = \mu gm.$$

Um den Körper über eine Distanz s zu transportieren beträgt die Arbeit somit $W = \mu gms$, sofern der Reibungskoeffizient μ konstant ist.

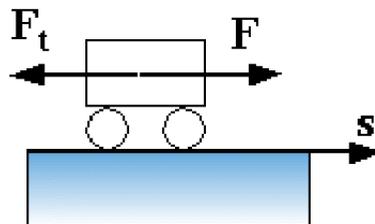


Abbildung 2.33: Reibungsfreie Bewegung.

Das nächste Beispiel ist ein Körper, der sich reibungsfrei auf ebener Strecke bewegt. Eine äußere Kraft (die gegen die Trägheitskraft wirkt) bewirkt

in diesem Fall eine Beschleunigung. Die Kraft ist $F = ma$. Beträgt die Geschwindigkeit des Körpers zu Beginn v_0 und wird er gleichmäßig beschleunigt, so legt er während einer Zeit Δt eine Distanz

$$s = v_0 \Delta t + \frac{a}{2} \Delta t^2$$

zurück, wobei die Geschwindigkeit auf

$$v = v_0 + a \Delta t$$

erhöht wird. Wir lösen die zweite Gleichung nach

$$\Delta t = \frac{v - v_0}{a}$$

auf und setzen in die erste ein:

$$\begin{aligned} s &= v_0 \Delta t + \frac{a}{2} \Delta t^2 = \frac{v_0(v - v_0)}{a} + \frac{(v - v_0)^2}{2a} = \\ &= \frac{2v_0v - 2v_0^2 + v^2 + v_0^2 - 2v_0v}{2a} = + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \end{aligned}$$

Die Arbeit, welche dafür geleistet werden muss, beträgt somit

$$W = Fs = mas = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2).$$

Die entspricht gerade der Änderung der kinetischen Energie des Mörpers.

Die Kraft kann auch mit dem Weg variieren; in diesem Fall muss die Integration explizit durchgeführt werden. Wir betrachten hier zwei Beispiele:

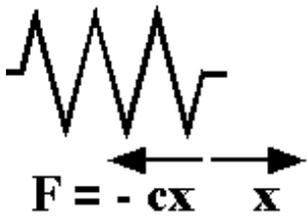


Abbildung 2.34: Federkraft

Der einfachste Fall ist wohl das Federgesetz, wo die Kraft proportional zur Auslenkung ist, $F_f = -cx$. Die Kraft, welche von außen angelegt werden muss, ist deshalb $F = cx$ und die Arbeit beträgt

$$W_{ab} = \int_a^b F dx = c \int_a^b x dx = \frac{c}{2}(b^2 - a^2).$$

In diesem Fall wird die an der Feder geleistete Arbeit in poenzielle Energie der Feder überführt.

2.3.3 Energie

In den meisten hier diskutierten Fällen ist die Arbeit, die am Körper geleistet wurde unabhängig vom Weg, den man vom Anfangs- zum Endpunkt genommen hat, also z.B. von der Geschwindigkeit 0 zur Geschwindigkeit v . Durch die Arbeit, die am Körper geleistet wurde, ist er in eine höhere Lage oder zu einer höheren Geschwindigkeit gebracht worden. Dadurch ist er selbst in die Lage gebracht worden, an anderen Körpern Arbeit zu leisten. Die Größe, welche diese Fähigkeit quantifiziert, ist die mechanische Energie (potenzielle oder kinetische): die Energie des Körpers (oder Systems) bezeichnet sein Potenzial, Arbeit zu leisten. Sie ist eine Größe, die rein durch den Zustand bestimmt ist, unabhängig vom Weg, auf dem der Zustand erreicht wurde.

In der Mechanik unterscheidet man zwei Arten von Energie, die kinetische und die potenzielle Energie:

$$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot}.$$

Die kinetische Energie ist eine Funktion von Geschwindigkeit oder Impuls und Masse des Körpers, die potenzielle Energie ist abhängig von Ort und Masse sowie von den Kräften, die auf das System wirken. Es können sowohl äußere Kräfte wie auch innere Kräfte beitragen.

Die Änderung der mechanischen Energie eines Systems ist gleich der an diesem System geleisteten Arbeit,

$$\Delta E = E_2 - E_1 = W_{12}.$$

Wenn wir noch einen Nullpunkt für die Energie definieren, können wir somit direkt die Ausdrücke übernehmen, die wir für die Arbeit hergeleitet haben.

Nicht jede Art von Arbeit führt zu einer Änderung der mechanischen Energie des Systems. Das oben diskutiert Beispiel der Arbeit gegen eine Reibungskraft ist ein typisches Beispiel wo die mechanische Energie nicht geändert wird: der Körper ist immer auf der gleichen Höhe, bei der gleichen Geschwindigkeit. Die aufgewendete Arbeit wird stattdessen in Reibungswärme umgewandelt. Ob eine Kraft, gegen die Arbeit geleistet wird, zu einer entsprechenden

Änderung der Energie des Systems führt, wird am besten mit folgendem Kriterium gemessen:

Wir betrachten einen geschlossenen Pfad, d.h. das System wird nach einem beliebigen Weg, welcher gegen diese Kraft zurückgelegt wird, wieder in den Ausgangszustand gebracht (gleicher Ort, gleiche Geschwindigkeit). Verschwindet die Arbeit für diesen geschlossenen Pfad, so wird die Kraft als konservativ bezeichnet. Dies ist für alle oben genannten Kräfte mit Ausnahme der Reibungskraft erfüllt. Die Reibungskraft wird deshalb als nicht-konservativ bezeichnet.

Es existiert keine absolute Skala für die Energie; gemessen werden immer Energiedifferenzen. Bei jeder Energieform muss deshalb ein Referenzpunkt festgelegt werden, denjenigen Zustand für den die Energie als Null definiert wird. Für die kinetische Energie wählt man den Nullpunkt bei $v = 0$; somit ist die kinetische Energie gegeben durch die Arbeit, welche geleistet werden muss, um den Körper von 0 auf v zu beschleunigen,

$$E_{kin} = W_{0v} = \frac{m}{2}v^2.$$

Eng verwandt mit der Energie ist die Leistung, welche sich durch Differenzierung nach der Zeit ergibt,

$$P = \frac{dE}{dt}. \quad [P] = \frac{J}{s} = W = Watt.$$

Handelt es sich um eine mechanische Leistung (Arbeit pro Zeit) und ist die Kraft konstant, so kann die Leistung auch als Kraft mal Geschwindigkeit definiert werden:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

2.3.4 Potenzielle Energie

Potenzielle Energie ist immer mit einer konservativen Kraft verbunden. Wir hatten zum Beispiel die Federkraft diskutiert, bei der die Arbeit, welche geleistet werden musste, um die Feder zu spannen, proportional zum Quadrat der Auslenkung ist. Demnach ist ihre potenzielle Energie

$$E_F = \frac{1}{2}cx^2.$$

Eine andere Form von potenzieller Energie ist die Lageenergie im Schwerfeld. Da die Schwerkraft unabhängig ist vom Ort wird die potenzielle Energie proportional zur Höhe,

$$E_{lage} = mgh.$$

In diesem Fall wurde der Energienullpunkt so gewählt, dass ein Körper auf der Höhe $h=0$ keine potenzielle Energie besitzt.

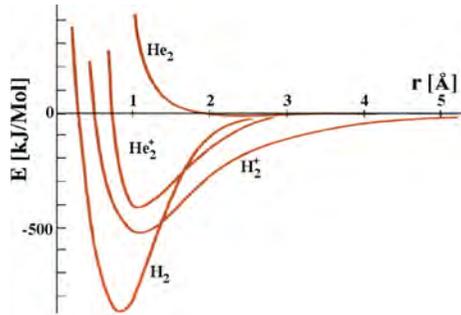


Abbildung 2.35: Potenzielle Energie einfacher 2-atomiger Moleküle als Funktion des atomaren Abstandes.

Bei potenzieller Energie, die mit einer distanzabhängigen Kraft verbunden ist, wie z.B. der Gravitationsenergie oder der Coulomb-Energie, wählt man den Nullpunkt meist für unendlich getrennte Körper. Die Kraft ist in beiden Fällen proportional zu $\frac{1}{r^2}$ und die potenzielle Energie, welche durch das Integral über die Kraft gegeben ist, zu $-1/r$.

Ein Molekül als eine deformierbare Ansammlung von Atomen besitzt es eine potenzielle Energie als Funktion der Geometrie. In allen Fällen hängt die Energie von räumlichen Koordinaten ab.

Trägt man die potenzielle Energie als Funktion des Ortes auf so erhält man eine Kurve, aus der man leicht qualitative (und auch quantitative) Aussagen machen kann über die Bewegung, welche das System durchführen wird. In einem eindimensionalen System bewegt sich das System (falls es zu Beginn in Ruhe ist) auf der Potenzialkurve nach unten, wobei potenzielle Energie in kinetische Energie umgewandelt wird, d.h. das System beschleunigt. Indem die dadurch erzeugte kinetische Energie wieder in potenzielle Energie umgewandelt wird kann das Sys-

tem sich auch auf der Potenzialkurve aufwärts bewegen.

2.3.5 Kraft und Gleichgewicht

Die potenzielle Energie wird dem System zugeführt indem daran Arbeit verrichtet wird. Daraus lässt sich umgekehrt ableiten wie groß die (konservative) Kraft ist, welche überwunden werden muss, um dem System die entsprechende potenzielle Energie zuzuführen:

Die Kraft, welche von außen aufgebracht werden muss beträgt

$$F = \frac{dW}{ds} = \frac{dE_{pot}}{ds}.$$

Diese ist im Gleichgewicht entgegengesetzt gleich der Kraft, welche das System auf seine Umgebung ausübt. Wird keine äußere Kraft auf das System angewendet, so bewegt es sich nur unter dem Einfluss der potenziellen Energie. Es wird dann beschleunigt durch eine entgegengerichtete Kraft

$$F_P = -\frac{dE_{pot}}{ds}.$$

Die Kraft, welche auf einen Körper wirkt, kann somit aus der Ortsabhängigkeit der potenziellen Energie bestimmt werden. In drei Dimensionen gilt entsprechend

$$\vec{F}_P = -\nabla \vec{E}_{pot},$$

d.h. die resultierende Kraft zeigt in Richtung des steilsten Abfalls.

Offenbar gibt es auch Situationen, in denen keine Kraft auf den Körper wirkt. Dies ist der Fall bei einem Maximum, bei einem Minimum oder einem ebenen Teil der Potenzialkurve. Man bezeichnet diese Punkte als instabiles, stabiles oder neutrales Gleichgewicht: bei einem instabilen Gleichgewicht führt eine geringe Auslenkung dazu, dass eine Kraft wirkt und das System immer stärker beschleunigt. Ein Beispiel dafür ist ein Bleistift, der auf seiner Spitze steht. Im Fall des stabilen Gleichgewichts führt eine Auslenkung zu einer Kraft, welche das System zurück zum Gleichgewicht treibt, während

in einem neutralen Gleichgewicht verschiedene Positionen mit identischer Energie vorhanden sind und eine Auslenkung keine Kraft erzeugt.

2.3.6 Umwandlung und Erhaltung von Energie

Unterschiedliche Energieformen können ineinander umgewandelt werden. Dies geschieht z.B. wenn man einen Körper fallen lässt: dabei wird potenzielle Energie in kinetische Energie umgewandelt.

In einem Pendel wird ebenfalls Energie von potenzieller in kinetische umgewandelt (und umgekehrt): Ein mathematisches Pendel bewegt sich wie

$$\Phi(t) = A \sin \omega t \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

wobei Φ den Winkel der Auslenkung darstellt, l die Länge des Pendels und A die Amplitude der Schwingung. Die potenzielle Energie ist gegeben durch die Höhe,

$$E_{pot} = mgh = mgl \frac{\Phi^2}{2} = \frac{mgl}{2} (A \sin \omega t)^2,$$

wobei - wie immer beim mathematischen Pendel - die Näherung $\sin \Phi \approx \Phi$, $\cos \Phi \approx 1 - \Phi^2/2$ verwendet wurde. Die kinetische Energie ist

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} l^2 \dot{\Phi}^2 = \frac{m}{2} l^2 \omega^2 (A \cos \omega t)^2 \\ &= mg \frac{l}{2} A^2 \cos^2 \omega t. \end{aligned}$$

Die Summe aus potenzieller und kinetischer Energie ist somit

$$E = mg \frac{l}{2} A^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = mg \frac{l}{2} A^2,$$

also zeitunabhängig. Es findet lediglich ein Austausch zwischen den beiden Energieformen statt.

Wird die Energie eines Systems erhöht indem daran Arbeit geleistet wird, so muss dazu die Energie eines anderen Systems erniedrigt werden. Allgemein gilt, dass Energie weder erzeugt noch vernichtet werden kann. Energie ist eine Erhaltungsgröße. Sie kann aus einer Form in eine andere überführt werden oder von

einem Ort zu einem anderen Ort transportiert werden, die gesamte Energie eines abgeschlossenen Systems bleibt jedoch konstant. Im Rahmen der Mechanik ist die Energie auf potenzielle und kinetische Energie beschränkt, so dass gilt

$$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot} = konst.$$

Exp. 22: Kugeltanz

Die Umwandlung von potenzieller in kinetische Energie kann man z.B. beim Fallenlassen eines Körpers beobachten. Beim Auftreffen auf dem Boden wird die kinetische Energie kurzfristig in elastische Energie umgewandelt, dann wieder in kinetische und schließlich wieder in potenzielle. Die Umwandlungsprozesse sind nie 100% effizient, sondern ein Teil der Energie wird jeweils in Wärme umgewandelt. Deshalb erreicht die Kugel nicht mehr ganz die Ausgangshöhe.

Nicht in allen Fällen wird die Arbeit, die am System geleistet wurde, auch in mechanische Energie umgewandelt. Erfolgt die Arbeit gegen eine Reibungskraft, wie z.B. beim Transport eines Körpers auf einer horizontalen Ebene mit konstanter Geschwindigkeit, so bleibt die mechanische Energie des Körpers konstant. In diesem Fall wird die geleistete Arbeit in Wärme umgewandelt.

Es ist nicht möglich, zu "beweisen", dass die Energie eines beliebigen Systems konstant ist. Der Energieerhaltungssatz ist jedoch mit allen bisher gemachten Erfahrungen vereinbar. Er kann außerdem bewiesen werden für den Fall, dass die Naturgesetze zeitlich invariant sind. Dies ist wiederum ein nicht beweisbarer Glaubenssatz, welcher mit allen bisher gemachten Erfahrungen übereinstimmt. Im Falle der oben erwähnten nichtkonservativen Kräfte (z.B.) Reibung, bei denen die gesamte Arbeit über einen geschlossenen Pfad nicht verschwindet, wird die geleistete Arbeit in Wärmeenergie umgewandelt. Außerdem sind Energie und Materie äquivalent, d.h. sie können ineinander umgewandelt werden.

Wenn in den Medien von einem "Energieproblem" die Rede ist, oder sogar von einem "Energie-mangel" so kann sich dies offenbar nicht auf die gesam-

DIE ZEIT - Energieprobleme gelöst

DIE ZEIT

Leben 38/2002

Energieproblem gelöst

Abbildung 2.36: Gibt es ein "Energieproblem"?

te zur Verfügung stehende Energie beziehen, sondern offenbar nur auf bestimmte Formen von Energie. Da es nicht möglich ist, Energie zu erzeugen, kann das "Energieproblem" auch nicht "gelöst" werden indem man mehr Energie erzeugt. Es gibt jedoch unter den unterschiedlichen Formen der Energie solche die nützlicher sind als andere. So können die mechanischen Formen der Energie theoretisch zu 100% in andere Energieformen umgewandelt werden. Bewegt man sich von A (z. B. Uni Dortmund) nach B (z. B. nach Hause) und wieder nach A, so ist offenbar die mechanische Energie des Körpers, welcher dabei bewegt wurde, konstant geblieben. Die Energie, welche dabei "verbraucht" wurde, wurde somit nicht in mechanische Energie des transportierten Körpers umgesetzt, sondern typischerweise in Wärme umgewandelt. Die minimal für einen solchen Transport notwendige Energie ist damit Null. Ein Verkehrssystem kann als umso intelligenter bezeichnet werden, je näher es diesem Grenzwert kommt.

2.3.7 Anwendungen

Die Verwendung des Prinzips der Energieerhaltung kann Rechnungen häufig stark vereinfachen. Als Beispiel berechnen wir die Geschwindigkeit eines Pendels am tiefsten Punkt. Man verwendet dazu die Tatsache, dass die kinetische Energie am niedrigsten Punkt gerade gleich der potenziellen Energie am höchsten Punkt ist,

$$E_{kin}(\Phi = 0) = E_{pot}(\Phi_{max}) = \frac{m}{2}v^2 = mgh.$$

Somit ist die Geschwindigkeit am niedrigsten Punkt

$$v = \sqrt{2gh},$$

d.h. wie wenn ein Körper fallengelassen wird, außer, dass in diesem Fall die Geschwindigkeit horizontal ist. Der Faden übt zwar eine Kraft aus auf die Pendelmasse, da die Länge konstant ist leistet er aber keine Arbeit.

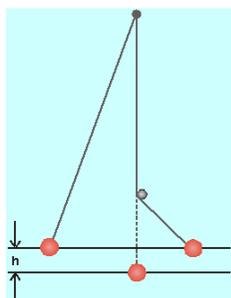


Abbildung 2.37: Bahn des Hemmpendels.

Damit können wir auch die Frage beantworten was für eine Bahn das Hemmpendel beschreibt: auf der gestreckten Seite wird die gesamte potenzielle Energie in kinetische Energie umgewandelt.

Auf der gehemmten Seite wird die kinetische Energie wieder in potenzielle Energie umgewandelt, d.h. der Pendelkörper erreicht die gleiche Höhe wie auf der gestreckten Seite.

Hier die Lösung der Eisenbahnfrage: Da die Lokomotive die Reibungskraft kompensiert ist das System äquivalent zu einem reibungsfreien Zug ohne Lokomotive. Er kann den Hügel überqueren wenn die kinetische Energie in der Ebene höher ist als die potenzielle Energie auf dem Hügel. Die beiden Energien betragen, jeweils durch die Masse dividiert

$$E_{kin}/m = \frac{1}{2}v^2 = 2411 \frac{m^2}{s^2} = 2411 \frac{J}{kg}.$$

$$E_{pot}/m = gh = 1962 \frac{m^2}{s^2} = 1962 \frac{J}{kg}.$$

Die Energie reicht somit aus. Es bleiben sogar $449 \text{ m}^2/\text{s}^2$ übrig, d.h. die Eisenbahn hat noch eine Geschwindigkeit von $30 \text{ m/s} = 108 \text{ km/h}$.

2.4 Stoßprozesse

2.4.1 Definition und Motivation

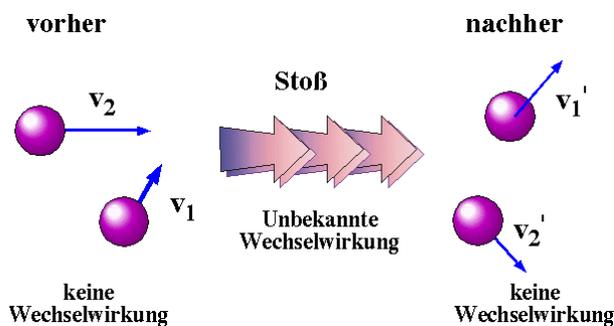


Abbildung 2.38: Stoßprozess

Unter einem Stoß versteht man eine zeitlich begrenzte Wechselwirkung zwischen zwei oder mehr Systemen, wobei man sich für die Einzelheiten der Wechselwirkung entweder nicht interessiert oder keine Möglichkeit hat, sie zu untersuchen oder zu beeinflussen. Man betrachtet einerseits die Körper bevor die Wechselwirkung stattfindet und andererseits dann, wenn die Wechselwirkung praktisch nicht mehr vorhanden ist. Dazwischen liegt die eigentliche Wechselwirkungszone. Interessant ist eine solche Betrachtung vor allem dann wenn die Wechselwirkung mit dem Abstand zwischen den beiden Körpern rasch abnimmt, so dass die beteiligten Körper sich meist frei und unabhängig bewegen.

Für den gesamten Prozess geht man davon aus, dass keine äußeren Kräfte auf das System wirken: Das Grundgesetz der Mechanik sagt, dass in diesem Fall der Gesamtimpuls \vec{p}_{ges} des Systems, also die Summe der Einzelimpulse \vec{p}_i konstant bleibt:

$$\vec{p}_{ges} = \sum_i \vec{p}_i = \text{konst.}$$

Ein typischer Fall sind Kollisionen in der Kern- und Elementarteilchenphysik, wo die Wechselwirkungen häufig gar nicht analytisch beschrieben werden können. In der Molekülphysik, resp. bei chemischen Reaktionen zwischen Molekülen ist die Situation sehr ähnlich: man kennt die Details der Wechselwirkung nicht, man kann höchstens die Ausgangszustände bestimmen und die Produkte analysieren.

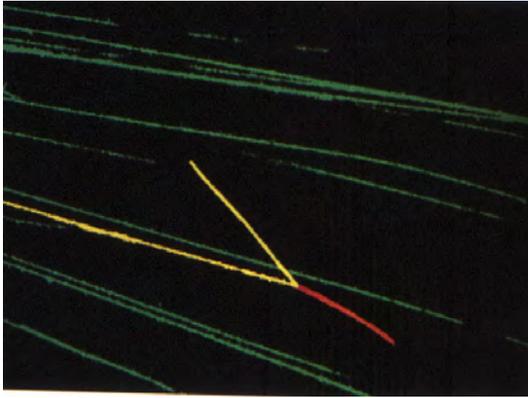


Abbildung 2.39: Stoßprozess eines α -Teilchens mit einem Stickstoffatom.

In vielen Fällen kann man einen Teil oder sogar die gesamte Kinematik nach dem Stoß vorhersagen ohne die Details der Wechselwirkung zu kennen. Wir werden für geeignete Beispiele die Geschwindigkeiten nach dem Stoß berechnen ohne die Art der Wechselwirkung überhaupt zu diskutieren. Dies bedeutet, dass die folgenden Überlegungen für die Gravitationswechselwirkung zwischen Galaxien genau so zutrifft wie für Billardkugeln oder sub-atomare Teilchen in einem Beschleuniger.

Stoßprozesse zwischen Atomen und Molekülen in Gasen spielen eine wichtige Rolle. Kollisionen zwischen Atomen und Molekülen sind die Grundlage für die kinetische Gastheorie.

2.4.2 Klassifikation von Stoßprozessen

Man unterscheidet verschiedene Arten von Stoßprozessen. Zum einen können wir sie anhand der Zahl der Stoßpartner klassifizieren. Im Rahmen dieser Vorlesung beschränken wir uns auf zwei Stoßpartner.

Ein weiteres wichtiges Kriterium ist, ob beim Stoß kinetische Energie der Körper in Deformationsenergie umgewandelt wird. Je nachdem wird der Stoß als elastisch, inelastisch, oder unelastisch bezeichnet.

Da keine äußeren Kräfte auf das System wirken ist die gesamte Energie des Systems immer konstant. Bei elastischen Stößen ist auch die mechanische Energie konstant, bei inelastischen und unela-

Art		Charakteristika
elastisch		Die Summe der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß ist gleich
inelastisch		Die Summe der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß ist verschieden
unelastisch		Die Körper bewegen sich nachher mit der gleichen, gemeinsamen Endgeschwindigkeit weiter

Abbildung 2.40: Klassifizierung von Stoßprozessen zwischen 2 Körpern.

stischen Stößen wird ein Teil in Wärme umgewandelt.



Abbildung 2.41: Beispiel für einen unelastischen Stoß: Meteorkrater in Arizona.

Ein typisches Beispiel eines unelastischen Stoßes ist der Aufprall eines Meteoriten auf die Erde: hier wurde die gesamte kinetische Energie des Meteoriten in Wärme umgewandelt.

Ein weiteres typisches Beispiel für inelastische oder unelastische Stöße sind Zusammenstöße zwischen Automobilen oder Autos mit stationären Objekten. Die Deformationsenergie wird hier sehr leicht sichtbar.

2.4.3 Elastischer 2-Körperstoß

Wir betrachten zwei Körper mit Massen m_1 und m_2 . Wir diskutieren hier nur den Fall wo die Schwerpunkte der beiden Körper sich zu jeder Zeit auf der

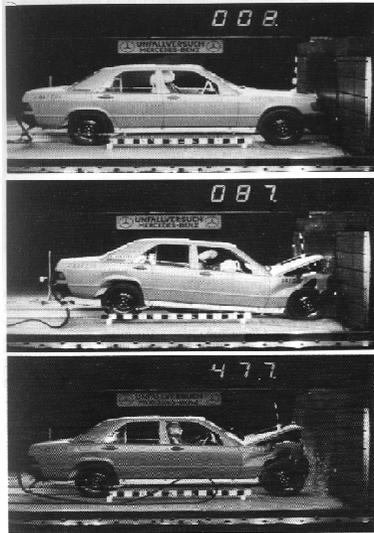


Abbildung 2.42: Unelastischer Stoß eines Automobils.

gleichen Linie bewegen - man spricht dann von einem zentralen Stoß. Wir brauchen dann den Vektorcharakter der Geschwindigkeit nicht zu berücksichtigen. Damit können wir die Geschwindigkeiten vor dem Stoß mit $v_{1,2}$ bezeichnen. Man würde erwarten, dass je nach der Art der Wechselwirkung während des Stoßes die beiden Körper sich nach dem Stoß sehr unterschiedlich verhalten.

Um die Geschwindigkeiten $v'_{1,2}$ nach dem Stoß zu berechnen benötigen wir lediglich die Erhaltungssätze für Energie und Impuls. Der Impuls bleibt nach den allgemeinen Voraussetzungen für Stoßprozesse immer erhalten, die mechanische Energie für den Fall elastischer Stöße. Die Erhaltungssätze lauten

$$p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = p'_1 + p'_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$2E_{kin} = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2.$$

Die beiden Erhaltungssätze können als Bestimmungsgleichungen für die beiden Ausgangsgeschwindigkeiten verwendet werden. Auflösung nach $v'_{1,2}$ ergibt:

$$v'_1 = \frac{2m_2 v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}.$$

Exp. 30: elastischer Stoß

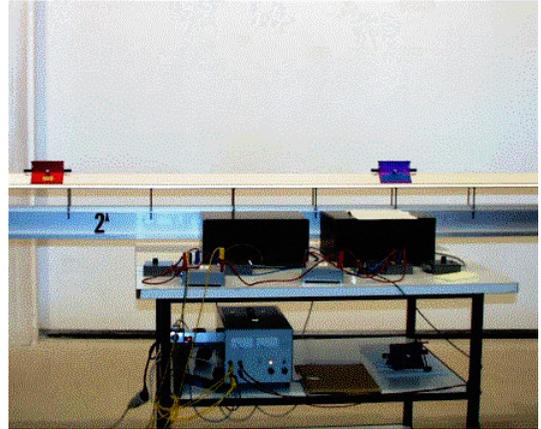


Abbildung 2.43: Elastischer Stoß auf Schiene.

Wir betrachten zunächst als einfachen Spezialfall die Situation wo beide Massen identisch sind, $m_1 = m_2 = m$: Dann vereinfachen sich die Ausdrücke zu

$$v'_1 = v_2; \quad v'_2 = v_1,$$

d.h. die beiden Körper tauschen Geschwindigkeit (und damit Impuls).

Für zwei weitere Spezialfälle verwenden wir Schlitten mit einem Massenverhältnis von 2:1, von denen der eine jeweils auf den ruhenden zweiten auftrifft. Ist der massivere Schlitten in Ruhe, d.h. $m_2 = 2m_1$, $v_2 = 0$, so finden wir durch Einsetzen in die allgemeine Formel

$$v'_1 = -\frac{v_1}{3}, \quad v'_2 = \frac{2v_1}{3},$$

d.h. die leichtere Masse bewegt sich nach dem Stoß rückwärts, die leichtere mit reduzierter Geschwindigkeit vorwärts. Im Extremfall von einem großen Massenverhältnis ($m_2 \gg m_1$) wird die leichtere Masse exakt reflektiert.

Der dritte Spezialfall entspricht dem umgekehrten Massenverhältnis: $m_2 = m_1/2$, $v_2 = 0$. Hier bewegen sich beide Schlitten nach dem Stoß in die gleiche Richtung, mit dem Geschwindigkeitsverhältnis 4:1:

$$v'_1 = \frac{v_1}{3}, \quad v'_2 = \frac{4v_1}{3}.$$

Die leichtere Masse bewegt sich somit nach dem Stoß schneller als die schwere vor dem Stoß!

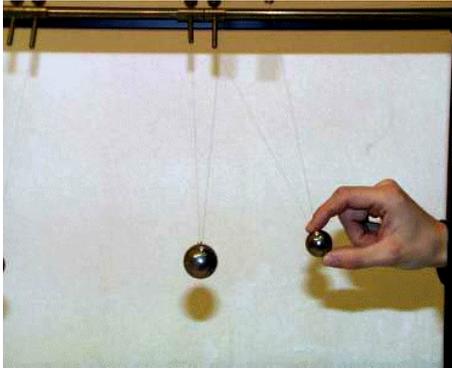
Exp. 32: Stoß an Kugelreihe

Abbildung 2.44: Stoß an einer Kugelreihe.

Die Übertragung von Impuls von einem Körper auf einen anderen kann auch sehr schön mit Hilfe von aufgehängten Kugeln gezeigt werden. Wenn wir eine Kugel in Ruhe haben und eine andere darauf fallen lassen so realisieren wir den Fall den wir gerade berechnet haben. Zwar ist die Bewegung der Kugel nicht auf einer Geraden, aber unmittelbar beim Stoß ist die Bewegung horizontal; unmittelbar danach beginnt ein Austausch von kinetischer und potenzieller Energie, der aber während des Stoßes vernachlässigt werden kann. Durch Zufügen weiterer Kugeln erhält man verschiedene Fälle die auch analog berechnet werden können, wie z.B. den Übertrag von zwei Impulsen.

Wenn alle Kugeln die gleiche Masse haben sind nach dem Stoß immer gleich viele Kugeln in Bewegung wie vor dem Stoß. Dies ändert sich, wenn wir Kugeln mit unterschiedlicher Masse verwenden - in exakter Analogie zum Stoß auf der Schiene. So schiebt eine schwere Kugel eine leichtere vor sich her und gibt nur einen Teil seines Impulses ab. Trifft jedoch eine leichte Kugel auf eine schwere, so wird sie reflektiert, während die schwere nur entsprechend langsamer zurückweicht.

2.4.4 Unelastischer 2-Körperstoß

Von einem unelastischen Stoß zweier Körper spricht man dann wenn sich die beiden Körper nach dem Stoß gemeinsam weiterbewegen, also "verschmel-

zen". In diesem Fall ist die mechanische Energie des Systems nicht erhalten, da ein Teil davon in Deformations- und Wärmeenergie umgewandelt wird. Es gilt jedoch weiterhin die Impulserhaltung:

$$p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v',$$

wobei v' die Geschwindigkeit des kombinierten Körpers nach dem Stoß darstellt. Sie beträgt somit

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

entspricht also massengewichtete Mittel der Anfangsgeschwindigkeiten.

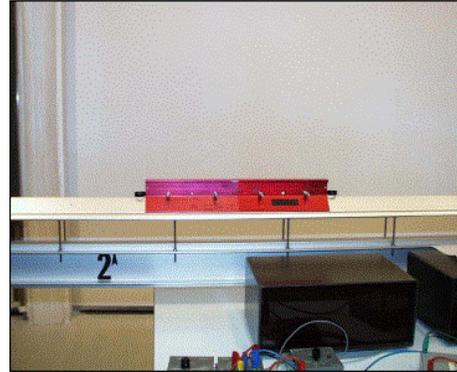
Exp. 31: unelastischer Stoß

Abbildung 2.45: Unelastischer Stoß.

Wir führen das Experiment so durch, dass ein Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_1 auf einen ruhenden Körper der gleichen Masse auftrifft. Die beiden kleben aneinander und bewegen sich gemeinsam weiter, wobei die resultierende Geschwindigkeit gleich der halben Geschwindigkeit des bewegten Körpers ist. Die Geschwindigkeit wird gemessen indem für den ersten Körper zweimal die Verdunklungszeit gemessen wird, für den kombinierten, doppelt so langen, nur einmal; die zweite Zeit ist in guter Näherung doppelt so lang wie die erste.

2.4.5 Elastischer Stoß in zwei Dimensionen

Im Allgemeinen finden Stöße nicht in einer Dimension statt. Wir diskutieren hier den zweidimensionalen

Fall. Der Erhaltungssatz für die Energie bleibt unverändert, während der Erhaltungssatz für den Impuls jetzt für beide Dimensionen unabhängig gilt. Wir betrachten einen elastischen Stoß zwischen zwei Körpern

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2.$$

Damit hat man drei Gleichungen und (im Allgemeinen) vier Geschwindigkeitskomponenten nach dem Stoß. Es ist somit nicht möglich, die Bewegung der Körper nach dem Stoß vorauszusagen.

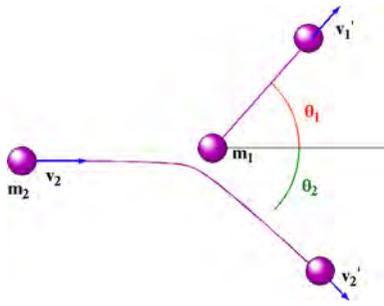


Abbildung 2.46: Elastischer Stoß in 2 Dimensionen.

Dass man trotzdem zu nützlichen Aussagen kommen kann zeigen wir für den Spezialfall, dass die beiden Körper gleiche Masse haben und der eine Körper zu Beginn in Ruhe ist. Dann vereinfachen sich die Erhaltungsgleichungen zu

$$\vec{v}_2 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \quad v_2 = v'_1 + v'_2.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die Behandlung vereinfachen indem wir die x -Achse des Koordinatensystems in Richtung der Anfangsbewegung \vec{v}_2 legen. Dann folgt aus der Impulserhaltung für die y -Komponente, dass die beiden y -Komponenten nach dem Stoß entgegengesetzt sind,

$$v'_{1y} = -v'_{2y} = v_y.$$

Wie bereits erwähnt kann man die Bahnen der beiden Körper nicht bestimmen; sie hängen u.a. davon ab, wie stark die beiden Körper gegeneinander versetzt sind. Aus der obigen Beziehung zwischen einlaufenden und auslaufenden Geschwindigkeiten

erhält man aber eine Bedingung für die auslaufenden Geschwindigkeitsvektoren, welche für alle Stöße dieser Art erfüllt sein muss, unabhängig von der Art der Wechselwirkung: Der Winkel $\theta_1 + \theta_2$ zwischen den beiden auslaufenden Bahnen ist immer 90° .

2.5 Dynamik der Drehbewegung

2.5.1 Drehimpuls

Genau so wie ein Körper sich ohne die Einwirkung äußerer Kräfte geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, so behält er seine Orientierung gegenüber einem Inertialsystem bei, sofern er sich zu Beginn in Ruhe befindet, resp. behält eine vorhandene Drehbewegung bei.

Dies kann man anhand eines Kreiselns im Hörsaal zeigen. Es gibt außerdem eine lange Liste von physikalisch relevanten Phänomenen, bei denen dies eine Rolle spielt.

Eigendrehimpuls von Elementarteilchen



Abbildung 2.47: Eigendrehimpuls findet man bei Elementarteilchen wie auch bei Galaxien.

Dies beginnt auf sehr kleinen Skalen mit dem Spin, d.h. dem Eigendrehimpuls von Elementarteilchen, und es setzt sich über viele Größenordnungen fort, z.B. zur Rotation von Planeten, ihrer Bahnbewegung um die Sonne, oder der Rotationsbewegung von Galaxien.

Offenbar existiert hier ebenfalls ein Erhaltungssatz. Dieser kann am besten für den Drehimpuls formu-

liert werden. Für einen Massenpunkt ist der Drehimpuls definiert als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad [L] = \text{m}^2 \text{kg s}^{-1} = \text{Nms} = \text{Js},$$

also als Vektorprodukt aus Ort und Impuls. Der Drehimpuls ist somit immer in Bezug auf ein Koordinatensystem definiert.

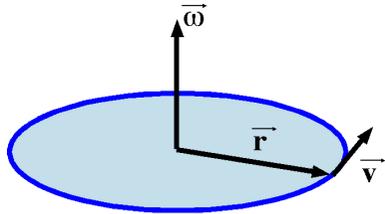


Abbildung 2.48: Kreisbewegung und Drehimpuls.

Wir betrachten den Fall einer Kreisbewegung. Hier ist die Geschwindigkeit eines Massenpunktes bestimmt durch das Produkt aus Winkelgeschwindigkeit und Abstand von der Rotationsachse:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

wobei $\vec{\omega}$ den Winkelgeschwindigkeitsvektor bezeichnet. Er steht parallel zur Rotationsachse und sein Betrag ist durch die Rotationsfrequenz $\omega/2\pi$ gegeben. Der Drehimpuls wird somit

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Im Fall der Kreisbewegung sind die Vektoren \vec{r} , \vec{v} und $\vec{\omega}$ jeweils senkrecht zueinander. Damit vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\vec{L} = mr^2 \vec{\omega}.$$

Offenbar ist der Drehimpuls proportional zur Winkelgeschwindigkeit.

Häufig ist es nützlich, das Trägheitsmoment I als Proportionalitätskonstante zwischen Winkelgeschwindigkeit und Drehimpuls einzuführen, analog zur Masse als Proportionalitätskonstante zwischen Geschwindigkeit und Impuls. Damit erhalten wir

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

Für die Kreisbewegung eines Massenpunktes gilt offenbar $I = mr^2$.

Allgemein wird das Trägheitsmoment berechnet als Integral über die Beiträge einzelner infinitesimaler Massenelemente,

$$I = \int r^2 dm,$$

wobei das Integral über den gesamten Körper läuft und r den Abstand von der Rotationsachse darstellt. Das Trägheitsmoment ist deshalb im Allgemeinen abhängig von der Orientierung der Rotationsachse. Man spricht deshalb von einem Trägheitstensor. Für einen asymmetrischen Trägheitstensor ist der Drehimpuls \vec{L} nicht mehr parallel zur Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

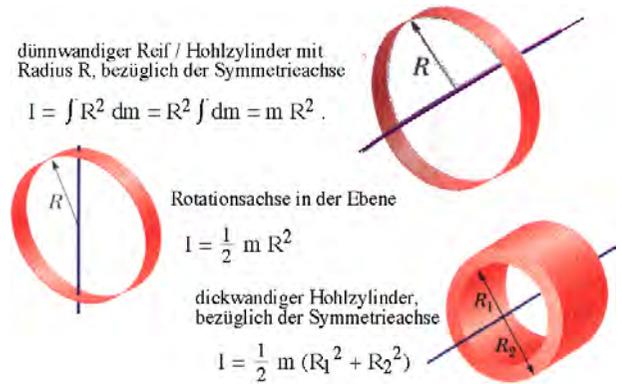


Abbildung 2.49: Trägheitsmomente von Hohlzylindern.

Auch ein Körper, der sich auf einer Geraden bewegt, besitzt einen Drehimpuls; dieser wird als Bahndrehimpuls bezeichnet. Im Gegensatz dazu unterscheidet man den Eigendrehimpuls, bei dem man sich auf eine Achse durch den Schwerpunkt bezieht.

Offenbar bestehen eine Reihe von Analogien zwischen Drehimpuls und linearem Impuls:

	Translation	Rotation	
Impuls	\vec{p}	\vec{L}	Drehimpuls
Masse	m	I	Trägheitsmoment
Geschwindigkeit	\vec{v}	$\vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit

In Analogie zum Erhaltungsgesetz für den linearen Impuls gilt ein Erhaltungssatz für den Drehimpuls:

So lange keine äußeren Kräfte wirken bleibt der Drehimpuls eines Systems erhalten. Die Erhaltung des Drehimpulses spielt eine große Rolle in vielen Teilen der Physik, vom Mikrokosmos (z.B. Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen, Absorption von Licht) bis zum Makrokosmos (Planetenbewegung, Stabilität von Galaxien).

2.5.2 Drehmoment

Der Drehimpuls ist eine Erhaltungsgröße wenn keine äußere Kraft angreift. Wie beim linearen Impuls kann aber eine äußere Kraft den Drehimpuls verändern.

Wir diskutieren dies anhand eines Experimentes.

Exp. 44: $E_{pot} \rightarrow E_{rot}$

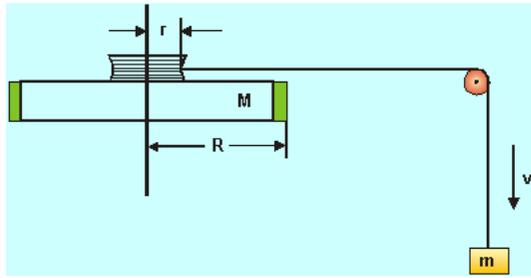


Abbildung 2.50: Drehmoment

In diesem Experiment greift eine Kraft (Gewichtskraft) tangential am Rad an. Wir berechnen die daraus resultierende Änderung des Drehimpulses gemäß seiner Definition über die Kraft, welche an einem Massenpunkt an der Stelle des Fadens angreift als

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Die beiden Vektoren des ersten Terms (\vec{v} und \vec{p}) sind parallel, so dass das Vektorprodukt verschwindet. Bei einer Drehbewegung ohne äußere Kräfte ($\vec{\omega}$ konstant) ist außerdem $\frac{d\vec{p}}{dt} \parallel \vec{r}$, so dass auch der zweite Term verschwindet: der Drehimpuls ist konstant.

Wenn jedoch eine Kraft angreift und die Geschwindigkeit der Drehbewegung sich ändert, erhält $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

eine tangentielle Komponente, so dass

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Dies ist offenbar das Äquivalent zum zweiten Newton'schen Axiom. Man bezeichnet die Größe auf der rechten Seite als Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad [M] = \text{Nm}.$$

Damit kann man das Grundgesetz der Rotation schreiben als

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Das Drehmoment liegt im rechten Winkel zur Kraft und erzeugt damit einen Drehimpuls senkrecht zur Kraft. Da das Drehmoment aus dem Vektorprodukt $\vec{r} \times \vec{F}$ besteht, verschwindet es, wenn die Kraft parallel zum Ortsvektor (d.h. radial) angreift; in diesem Fall würde eine Änderung des linearen Impulses erzeugt.

Wie beim Drehimpuls ist auch beim Drehmoment die Definition immer auf ein bestimmtes Koordinatensystem bezogen; Drehimpuls und Drehmoment ändern sich wenn man den Ursprung des Koordinatensystems verschiebt.

2.5.3 Pirouette



Abbildung 2.51: Pirouette

Eine bekannte Anwendung der Drehimpulserhaltung ist die Pirouette von Eiskunstläufern. Hier reduziert der Artist das Trägheitsmoment indem er die Arme

anzieht. Als Beispiel nehmen wir an, dass er sich zunächst mit einer Drehfrequenz von $\nu_0 = 1/s$ bewegt und, dass sein Trägheitsmoment zunächst bei $I_0 = 6 \text{ kg m}^2$ beträgt. Durch Anziehen der Arme reduziert er dieses auf $I_1 = 1.5 \text{ kg m}^2$. Wenn wir Reibungsverluste vernachlässigen muss der Drehimpuls dabei erhalten bleiben und damit die Drehfrequenz zunehmen auf

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{I_0}{I_1} = 4 \text{ s}^{-1}.$$

Die kinetische Energie bleibt dabei nicht erhalten; diese wird dem System über eine Arbeitsleistung zugeführt, indem die Arme gegen die Zentrifugalkraft angezogen werden müssen. Die mittlere Leistung, die dafür notwendig ist, können wir berechnen wenn wir annehmen, dass die Erhöhung der Geschwindigkeit während einer Sekunde abläuft. Sie beträgt dann

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{I_1 \omega_1^2 - I_0 \omega_0^2}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2} (1,5 \cdot 631 - 6 \cdot 39,5) \text{ W} = 592 \text{ W}. \end{aligned}$$

Exp. 39: Drehimpulserhaltung

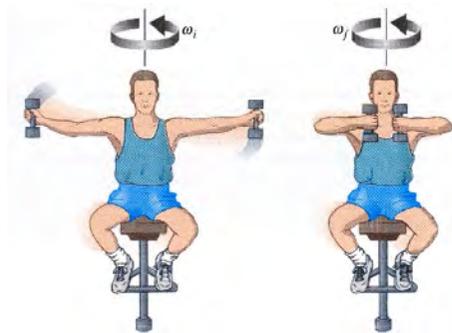


Abbildung 2.52: Experiment zur Drehimpulserhaltung.

Das Experiment kann auch im Hörsaal durchgeführt werden, wobei der Effekt durch Gewichte in den Händen verstärkt wird. Beim Anziehen der Arme wird das Trägheitsmoment reduziert und die Erhaltung des Drehimpulses führt zu einer Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit.

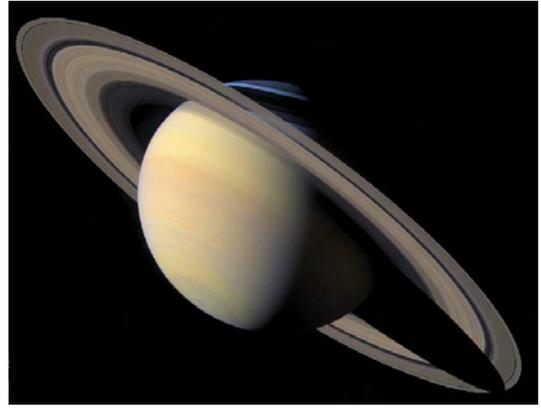


Abbildung 2.53: Ringe des Saturns

Die Erhaltung des Drehimpulses ist auch verantwortlich für die Rotation von Planeten im Sonnensystem, von Satelliten (Monden, Ringen) um Planeten, und der Sonnensysteme in der Galaxis: diese bildeten sich aus Wolken von Gas und Staub durch Kontraktion unter dem Einfluss der Schwerkraft. Die Erhaltung des Drehimpulses bei der Kontraktion führte zu einer Erhöhung der anfangs geringen Rotationsgeschwindigkeit und verhindert eine vollständige Kontraktion: ohne Drehimpulserhaltung würden die Planeten unter dem Einfluss der Schwerkraft in die Sonne fallen. Ähnliche Effekte führen zur Form der Galaxien.

2.5.4 Planetenbahnen: Die Kepler'schen Gesetze

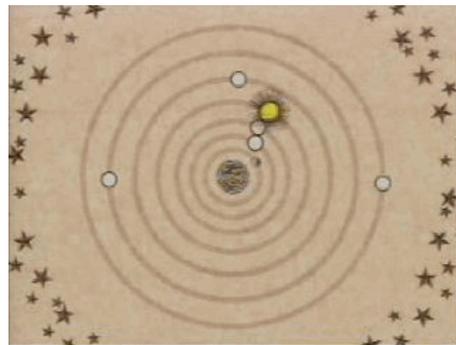


Abbildung 2.54: Das Ptolemäische Weltbild.

Die Planetenbahnen haben die Menschen seit Langem fasziniert. Ptolemäus fasste im 2. Jh. nach Chri-

stus den damaligen Wissenstand zusammen und erstellte ein Weltbild, welches mehr als tausend Jahre Bestand hatte.

Die wichtigste Neuerung wurde von Kopernikus (1473-1543) initiiert, welcher die Sonne ins Zentrum stellte. Der dänische Hofastronom Tycho Brahe (1546-1601) stellte umfangreiche Beobachtungen an, welche insgesamt weder mit dem kopernikanischen noch mit dem ptolemäischen Weltbild wirklich vereinbar waren.

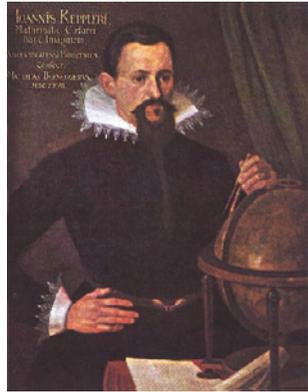


Abbildung 2.55: Johannes Kepler (1571-1630).

Die erste Theorie, welche die Beobachtungen anhand einiger weniger Gesetze erklären konnte stammt von Johannes Kepler (1571-1630). Er formulierte die ersten zwei seiner Gesetze 1609, das dritte 1619.

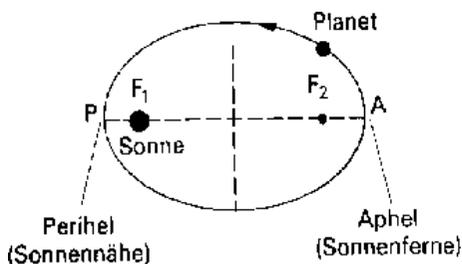


Abbildung 2.56: 1. Kepler'sches Gesetz.

1. Kepler'sches Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen. Die Sonne steht jeweils in einem der Brennpunkte. Genauer: Sonne und Planeten kreisen um den gemeinsamen Schwerpunkt: Dieser wird aber durch die Sonne dominiert.

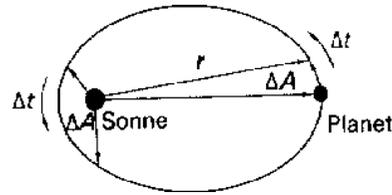


Abbildung 2.57: 2. Kepler'sches Gesetz.

2. Kepler'sches Gesetz: Der von der Sonne zum Planeten gezogene Radiusvektor r überstreicht in gleichen Zeiten Δt konstante Flächen ΔA : $\Delta t / \Delta A = \text{konstant}$. Dies ist eine direkte Konsequenz der Erhaltung des Drehimpulses.

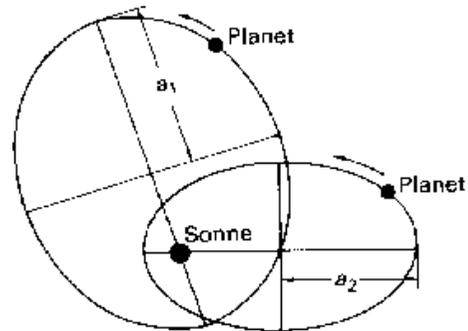


Abbildung 2.58: 3. Keplersches Gesetz.

3. Kepler'sches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten T_1, T_2 zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen a_1, a_2 :

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3.$$

Solche Potenzgesetze kann man am besten überprüfen indem man die vorhandenen Daten logarithmiert: Bildet man auf beiden Seiten den Logarithmus dann findet man

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 &= 2(\log T_1 - \log T_2) \\ &= \log\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = 3(\log a_1 - \log a_2) \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\log a_1 - \log a_2}{\log T_1 - \log T_2} = \frac{2}{3}.$$

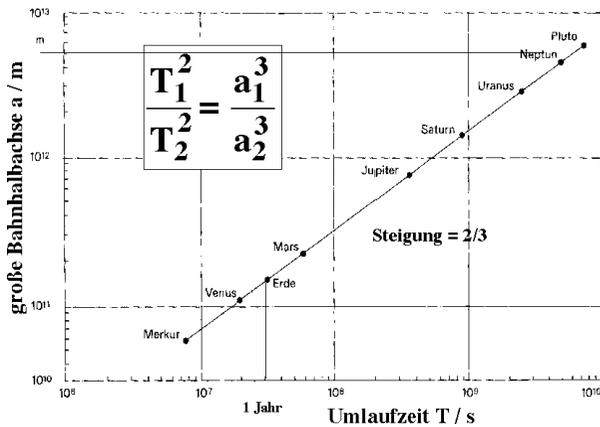


Abbildung 2.59: Vergleich des 3. Keplerschen Gesetzes mit Daten der Planetenbahnen.

Trägt man $\log a$ gegen $\log T$ auf, so erhält man somit eine Gerade mit Steigung $2/3$. Die experimentellen Daten passen sehr gut zu dieser Voraussage.

2.5.5 Theorie der Gravitation

Während es sich hierbei um ad-hoc Regeln handelte lieferte Newton (1642-1727) die physikalischen Gesetze die diesen Beobachtungen zugrunde lagen, insbesondere seine Axiome und das Gravitationsgesetz,

$$|F_G| = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}^2 \text{s}^2}.$$

Nachdem die Gravitationskonstante bestimmt ist kann man eine Messung der Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche dazu verwenden, die Erdmasse zu bestimmen. Mit dem mittleren Erdradius $r = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ erhält man $m_E = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Analog kann man aus dem Radius einer Planetenbahn und seiner Umlaufzeit die Masse der Sonne bestimmen: Aus dem Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und Gravitationskraft der Sonne

$$F_{ZP} = m_P r_P \omega_P^2 = F_G = G \frac{m_P m_S}{r_P^2}.$$

Die Sonnenmasse erhält man daraus als

$$m_S = r_P^3 \omega_P^2 / G \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

Dies beinhaltet gleichzeitig das dritte Kepler'sche Gesetz (für den Grenzfall eines Kreises, d.h. verschwindender Elliptizität).

Zu Beginn dieses Jahrhunderts erkannte Einstein, dass die Newton'sche Theorie als eine Näherungsform betrachtet werden muss. In dieser Theorie erfolgt die Wechselwirkung zwischen unterschiedlichen schweren Körpern nicht mehr über Kräfte, sondern indem jeder Massenpunkt den Raum in seiner Umgebung verzerrt. Die Theorie behandelt somit nicht Kräfte, sondern die Geometrie des vierdimensionalen Raum-Zeit Kontinuums.

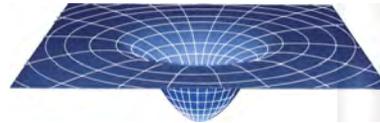


Abbildung 2.60: Krümmung des Raum-Zeit Kontinuums durch eine Masse.

Sie gibt in vielen Fällen die gleichen Voraussagen zu experimentell beobachtbaren Größen; in einigen wenigen Spezialfällen findet man Unterschiede. So kann sie z.B. die Präzessionsbewegung bei der Merkurbahn erklären, oder die Ablenkung von Sternenlicht beim Passieren der Sonne.

2.6 Mechanik in bewegten Bezugssystemen

2.6.1 Galilei'sche Relativität

Die Beschreibung einer Bewegung hängt ab vom verwendeten Bezugssystem: Wenn jemand in einem Eisenbahnwagen einen Ball aufwirft so hängt die Form der Bahnkurve davon ab ob der Betrachter ebenfalls in der Eisenbahn sitzt oder auf dem Bahnsteig steht.

Man ist grundsätzlich frei in der Wahl des Bezugssystems, d.h. man kann auswählen welches Bezugssystem man verwendet um die beobachteten Phänomene zu beschreiben. Im oben genannten Beispiel unterscheiden sich die beiden Bezugssysteme lediglich um die Anfangsgeschwindigkeit in der Bewegungsrichtung der Eisenbahn. Es gibt meist ein Bezugssy-

stem, welches eine besonders einfache Beschreibung ermöglicht. Vor allem aber ist nicht garantiert, dass in jedem Bezugssystem die Newton'schen Axiome erfüllt sind. Ist dies der Fall, so bezeichnet man das System als Inertialsystem. Es gibt beliebig viele unterschiedliche Inertialsysteme.

Zunächst kann man jedes Inertialsystem in ein anderes transformieren wenn man eine Translation oder Rotation vornimmt. Außerdem kann man das Bezugssystem immer mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber einem Inertialsystem verschieben und erhält ein weiteres Inertialsystem. Die Tatsache, dass alle diese Systeme gleichwertige Möglichkeiten für die Beschreibung der beobachteten Phänomene darstellen bedeutet, dass absolute Geschwindigkeit keine Bedeutung hat. Ähnlich bedeutet die Tatsache, dass der Ursprung des Koordinatensystems frei wählbar ist, dass absolute Position keine Bedeutung hat. Aus der (experimentell verifizierten) Tatsache, dass die physikalischen Gesetze gültig bleiben bei einer beliebigen (konstanten) Bewegung des Bezugssystems kann man u. a. die Erhaltung des linearen Impulses herleiten.

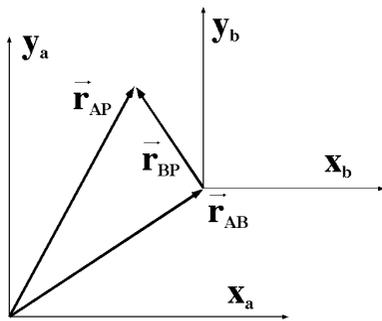


Abbildung 2.61: Ortsvektor \vec{r} in 2 unterschiedlichen Bezugssystemen A, B.

Wir betrachten zunächst zwei Bezugssysteme, welche gegeneinander in Ruhe sind, aber einen unterschiedlichen Ursprung besitzen. Ist der Ursprung des Systems B im System A am Ort \vec{r}_{AB} , und der Ortsvektor des Punktes P im System B \vec{r}_{BP} , so ist offenbar der Ortsvektor \vec{r}_{AP} im System A

$$\vec{r}_{AP} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP}.$$

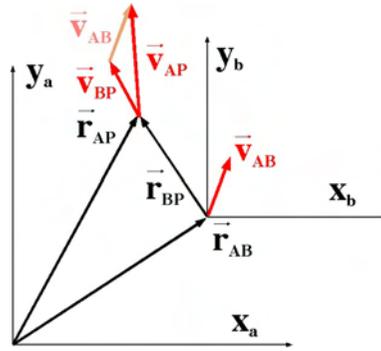


Abbildung 2.62: Bewegte Bezugssysteme.

2.6.2 Relativgeschwindigkeit

Bewegt sich das System B gegenüber dem System A mit der konstanten Geschwindigkeit \vec{v}_{AB} und ist die Position zum Zeitpunkt $t = 0$ $\vec{r}_{AB}(0)$, so gilt offenbar zur Zeit t

$$\vec{r}_{AB}(t) = \vec{r}_{AB}(0) + \vec{v}_{AB}t.$$

Für einen Punkt P, der sich gegenüber dem System B mit der konstanten Geschwindigkeit \vec{v}_{BP} bewegt,

$$\vec{r}_{BP}(t) = \vec{r}_{BP}(0) + \vec{v}_{BP}t$$

gilt somit

$$\vec{r}_{AP}(t) = \vec{r}_{AB}(t) + \vec{r}_{BP}(t) =$$

$$\vec{r}_{AB}(0) + \vec{r}_{BP}(0) + \vec{v}_{AB}t + \vec{v}_{BP}t = \vec{r}_{AP}(0) + \vec{v}_{AP}t,$$

wobei die Geschwindigkeit \vec{v}_{AP} des Punktes gegenüber dem System A durch die Vektorsumme

$$\vec{v}_{AP} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BP}$$

gegeben ist. Die Geschwindigkeit im Bezugssystem A ist somit gegeben durch die Summe aus der Geschwindigkeit im Bezugssystem B und der Relativgeschwindigkeit der beiden Bezugssysteme.

2.6.3 Gleichförmig beschleunigte Bezugssysteme

Die Behandlung von gleichförmig beschleunigten Bezugssystemen ist zunächst analog zur Behandlung von Bezugssystemen, die sich mit gleichförmiger

Geschwindigkeit bewegen. Wir betrachten hier nur den einfachen Fall, dass die beiden Systeme zum Zeitpunkt $t = 0$ identisch sind, das System B gegenüber dem System A jedoch gleichförmig beschleunigt wird mit \vec{a}_{AB} . In beiden Systemen gilt die übliche Kinematik. Für den Punkt P , der gegenüber System B mit \vec{a}_{BP} beschleunigt wird findet man im System A in Analogie zur obigen Herleitung für die Geschwindigkeiten die Beschleunigung

$$\vec{a}_{AP} = \vec{a}_{AB} + \vec{a}_{BP}.$$

Für Geschwindigkeit und Ort gilt mit bei $\vec{r}_{AB}(0) = 0$, $\vec{v}_{AB}(0) = 0$

$$\vec{v}_{AP} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BP} = \vec{a}_{AB}t + \vec{v}_{BP},$$

$$\vec{r}_{AP} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP} = \vec{a}_{AB}\frac{t^2}{2} + \vec{r}_{BP}.$$

Da die Beschleunigung in den beiden Bezugssystemen unterschiedlich ist können Newtons Axiome nicht in beiden Systemen gelten. Gelten sie z.B. im System A und ist die resultierende Kraft auf den Körper

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}_{AP}}{dt} = m\vec{a}_{AP} = m(\vec{a}_{AB} + \vec{a}_{BP}),$$

so können wir im Bezugssystem B schreiben

$$m\vec{a}_{BP} = m(\vec{a}_{AP} - \vec{a}_{AB}) = \vec{F} - m\vec{a}_{AB}.$$

Der zusätzliche Term $-m\vec{a}_{AB}$ in der Bewegungsgleichung kann als scheinbare Kraft, als Trägheitskraft interpretiert werden. Wir spüren sie z.B. beim Anfahren eines Aufzugs: beschleunigt der Aufzug nach oben, so drückt uns eine Kraft nach unten, welche proportional zur Beschleunigung und zu unserer Masse ist. Geht man weiter und verwendet ein Bezugssystem, welches mit der Erdbeschleunigung g nach unten beschleunigt wird, so verschwindet scheinbar die Schwerkraft.

2.6.4 Schwerelosigkeit

Dies wird z.B. im Fallturm Bremen ausgenutzt: dort werden Experimente in der Schwerelosigkeit durchgeführt, die sonst nur im Weltraum möglich sind.

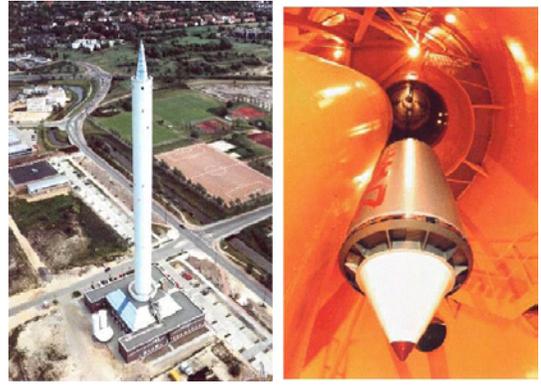


Abbildung 2.63: Links: Fallturm in Bremen ;Rechts: Kapsel im Fallturm.

So können für Kurzzeitexperimente die hohen Kosten einer Weltraumexpedition eingespart werden. In dem 110 m hohen Rohr des Turms wird eine Fallkapsel hochgezogen und losgelassen.

Während des freien Falls von knapp fünf Sekunden herrscht in der Kapsel Schwerelosigkeit. Das Fallrohr wird luftleer gepumpt, um Störungen durch Luftreibung zu vermeiden.

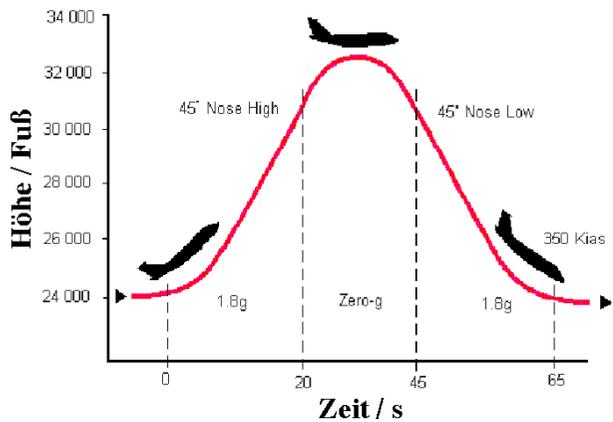


Abbildung 2.64: Prinzip des Parabelflugs.

Längere Zeiten von Schwerelosigkeit kann man in Spezialflugzeugen von NASA und ESA erleben, oder bei der Firma "Go Zero g". Diese Flugzeuge fliegen steil nach oben und folgen dann für ca. 25 s einer Parabel. Dieser Teil der Flugbahn entspricht einer Wurfparabel, d.h. das Flugzeug fliegt mit konstanter Horizontalgeschwindigkeit und einer vertikalen Beschleunigung nach unten von $9,81 \text{ ms}^{-2}$.



Abbildung 2.65: Schwerelosigkeit beim Parabelflug.

Während dieser Zeit sind die Passagiere praktisch schwerelos.

Während Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft von der Wahl des Bezugssystems abhängen gilt dies nicht für Abstände oder Geschwindigkeitsdifferenzen: diese sind im Rahmen der klassischen Mechanik nicht von der Wahl des Bezugssystems abhängig.

2.6.5 Kreisbewegung

Ein Spezialfall der Bewegung in zwei (oder drei) Dimensionen ist die Kreisbewegung. Bewegt sich ein Massenpunkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn, so kann sein Ort und seine Geschwindigkeit mit einem dreidimensionalen Vektor beschrieben werden. Häufig genügt es jedoch, wenn man seine Bewegung mit einer einzigen Koordinate beschreibt, dem Winkel ϕ bezüglich der x -Achse, gemessen vom Zentrum des Kreises. Die entsprechende Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\phi/dt$ entspricht dann ebenfalls einer skalaren Größe. In drei Dimensionen wird sie als Vektor dargestellt, der senkrecht auf dem Kreis steht und mit der Drehbewegung zusammen eine Rechtsschraube bildet.

Ein gleichförmig rotierendes Bezugssystem ist offensichtlich ein beschleunigtes System. In 2 Dimensionen kann der Ortsvektor eines Punktes, welcher im drehenden Koordinatensystem in Ruhe ist, geschrieben werden als

$$\vec{r} = r_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \phi_0) \\ \sin(\omega t + \phi_0) \end{pmatrix}.$$

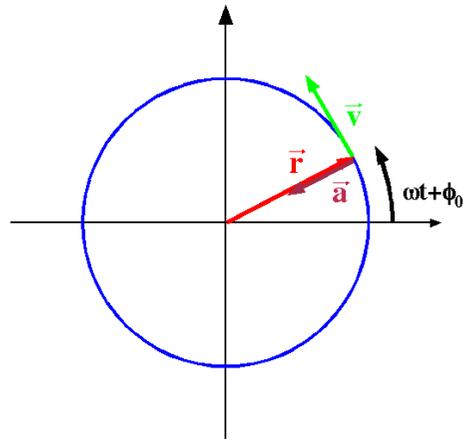


Abbildung 2.66: Kreisbewegung.

Somit beträgt die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \omega r_0 \begin{pmatrix} -\sin(\omega t + \phi_0) \\ \cos(\omega t + \phi_0) \end{pmatrix}$$

und die Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \omega^2 r_0 \begin{pmatrix} -\cos(\omega t + \phi_0) \\ -\sin(\omega t + \phi_0) \end{pmatrix},$$

d.h. sie wirkt in radialer Richtung nach innen.

Offenbar ist eine Kreisbewegung eine beschleunigte Bewegung. Wenn wir in die Bewegung von Objekten in einem rotierenden Koordinatensystem betrachten haben somit die Newtonschen Axiome keine Gültigkeit. Wir erwarten, dass zusätzliche Kräfte auftreten.

Exp 70a: Coriolis Drehstuhl

Wir betrachten als Beispiel eine sich drehende Scheibe, auf der ein Körper liegt. So lange sich dieser mit der Scheibe dreht führt er offenbar eine beschleunigte Bewegung durch. In einem Koordinatensystem, welches an die Scheibe gekoppelt ist, ist er jedoch in Ruhe, d.h. nach Newton's Axiom dürfte keine Kraft auf ihn wirken. Lässt man ihn los so dreht sich das Bild: im Ruhesystem ist er jetzt kräftefrei und führt deshalb eine gradlinige Bewegung durch (tangential zur Scheibe). Im rotierenden Koordinatensystem beginnt er sich zunächst radial nach außen zu bewegen und führt dann eine gekrümmte Bewegung aus; gemäß Newtons Axiom müssen somit Kräfte auf den Körper wirken.

2.6.6 Bewegungsgleichung im rotierenden Bezugssystem

Wir versuchen jetzt, die Bewegungsgleichungen für eine allgemeine Bewegung im rotierenden System herzuleiten. Wir beschränken uns auf eine Ebene, die senkrecht zur Rotationsachse steht. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da die Bewegung parallel zur Achse durch die Rotation nicht beeinflusst wird.

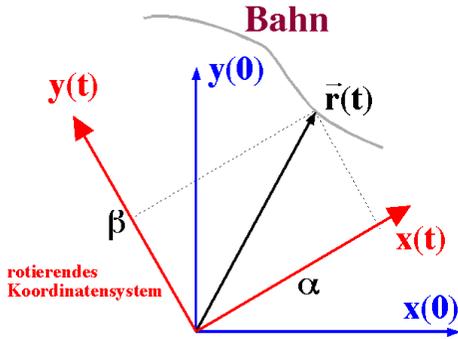


Abbildung 2.67: Bewegung in einem rotierenden Koordinatensystem.

In einem Koordinatensystem $\vec{x}(t), \vec{y}(t)$, welches sich um die z-Achse dreht, lautet der Ortsvektor

$$\vec{r} = \alpha \vec{x}(t) + \beta \vec{y}(t).$$

Die Geschwindigkeit erhält man wie üblich durch Ableiten:

$$\vec{v}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}(t) = \frac{\partial}{\partial t} [\alpha(t) \vec{x}(t) + \beta(t) \vec{y}(t)].$$

Die Koordinaten α, β , im rotierenden Koordinatensystem sind im Allgemeinen zeitabhängig. Die Rotation der Koordinatenachsen kann beschrieben werden als

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) \cos \omega t + \vec{y}(0) \sin \omega t$$

$$\vec{y}(t) = \vec{y}(0) \cos \omega t - \vec{x}(0) \sin \omega t.$$

Die Geschwindigkeit des Ortsvektors ist demnach

$$\vec{v}(t) = \dot{\alpha}(t) \vec{x}(t) + \dot{\beta}(t) \vec{y}(t) + \alpha(t) \dot{\vec{x}}(t) + \beta(t) \dot{\vec{y}}(t).$$

Die zeitlichen Ableitungen der Koordinatenachsen sind

$$\dot{\vec{x}}(t) = -\vec{x}(0) \omega \sin(\omega t) + \vec{y}(0) \omega \cos(\omega t) = \omega \vec{y}(t).$$

$$\dot{\vec{y}}(t) = -\vec{y}(0) \omega \sin(\omega t) - \vec{x}(0) \omega \cos(\omega t) = -\omega \vec{x}(t).$$

Demnach ist

$$\vec{v}(t) = \dot{\alpha}(t) \vec{x}(t) + \dot{\beta}(t) \vec{y}(t) + \omega [\alpha(t) \vec{y}(t) - \beta(t) \vec{x}(t)].$$

Der erste Term besitzt die gleiche Form wie in einem Inertialsystem. Der zusätzliche zweite Term berücksichtigt die Zeitabhängigkeit der Basisvektoren. Er tritt auch dann auf wenn $\alpha(t) = \alpha(0)$ und $\beta(t) = \beta(0)$, d.h. wenn sich der Punkt gegenüber dem rotierenden Koordinatensystem nicht bewegt.

2.6.7 Scheinkräfte im rotierenden Koordinatensystem

Nach dem gleichen Verfahren können wir die Beschleunigung berechnen:

$$\vec{a}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(t) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \dot{\alpha}(t) \vec{x}(t) + \dot{\beta}(t) \vec{y}(t) + \omega [\alpha(t) \vec{y}(t) - \beta(t) \vec{x}(t)] \right\} \\ &= \ddot{\alpha}(t) \vec{x}(t) + \omega \dot{\alpha}(t) \vec{y}(t) + \ddot{\beta}(t) \vec{y}(t) - \omega \dot{\beta}(t) \vec{x}(t) \\ &+ \omega [\dot{\alpha}(t) \vec{y}(t) - \dot{\beta}(t) \vec{x}(t)] + \omega^2 [-\alpha(t) \vec{x}(t) - \beta(t) \vec{y}(t)]. \\ &= \ddot{\alpha}(t) \vec{x}(t) + \ddot{\beta}(t) \vec{y}(t) + 2\omega [\dot{\alpha}(t) \vec{y}(t) - \dot{\beta}(t) \vec{x}(t)] \\ &+ \omega^2 [-\alpha(t) \vec{x}(t) - \beta(t) \vec{y}(t)]. \end{aligned}$$

Der gleiche Sachverhalt kann auch etwas kompakter geschrieben werden wenn wir die Vektoren

$$\vec{r}^r = (\alpha, \beta, 0),$$

$$\vec{v}^r = (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, 0),$$

$$\vec{a}^r = (\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, 0),$$

eingeführen, d.h. Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung im rotierenden Koordinatensystem, sowie den Winkelgeschwindigkeitsvektor

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega).$$

Damit wird

$$\vec{a} = \vec{a}^r + 2\vec{\omega} \times \vec{v}^r - \omega^2 \vec{r}^r.$$

Wir können diese Gleichung natürlich auch nach der Beschleunigung im rotierenden Koordinatensystem auflösen:

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \omega^2 \vec{r}'.$$

Der erste Term entspricht der Beschleunigung im Inertialsystem. Für ein kräftefreies System verschwindet er nach dem Grundgesetz der Mechanik. Die beiden anderen Terme erzeugen eine Beschleunigung im rotierenden Koordinatensystem, welche nicht von äußeren Kräften bestimmt wird; sie werden deshalb als Scheinkräfte bezeichnet. Der mittlere Term ist proportional zur Geschwindigkeit des Massenpunktes im rotierenden Koordinatensystem und zur Rotationsgeschwindigkeit des Systems. Der dritte Term ist proportional zum Quadrat der Winkelgeschwindigkeit, und zum Abstand von der Drehachse.

2.6.8 Zentrifugalkraft

Der letzte Term entspricht der Zentrifugalbeschleunigung (resp. Zentrifugalkraft). Sie muss durch eine gleich große Zentripetalkraft kompensiert werden wenn der Massenpunkt im rotierenden Koordinatensystem am Ort bleiben soll. Der Betrag ist

$$|F| = m|a| = m\omega^2 r = mv^2/r.$$

Exp. 41a: Zentrifugalkraft

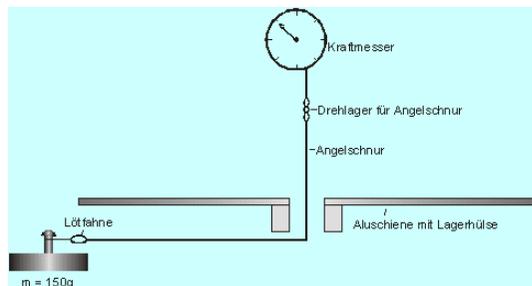


Abbildung 2.68: Messung der Zentrifugalkraft.

Die Zentrifugalkraft kann auch experimentell gemessen werden. Man lässt dazu ein Gewicht um einen Punkt rotieren und misst, über eine Umlenkung, die Kraft, mit der das Gewicht an der Schnur nach außen zieht.

Im Experiment wurden folgende Werte gefunden:

Radius cm	Kraft N	Periode s	$\frac{\omega}{s^{-1}}$	$\frac{m\omega^2 r}{ms^{-2}}$
31,5	0,15	3,6	1,75	0,14
33	0,3	2,7	2,33	0,27
38,8	0,75	1,7	3,7	0,8

Offenbar stimmen die gerechneten Werte in der letzten Kolonne im Rahmen der Messgenauigkeit mit den gemessenen Werten in der zweiten Kolonne überein.

Exp. 41: Zentrifugalküvette

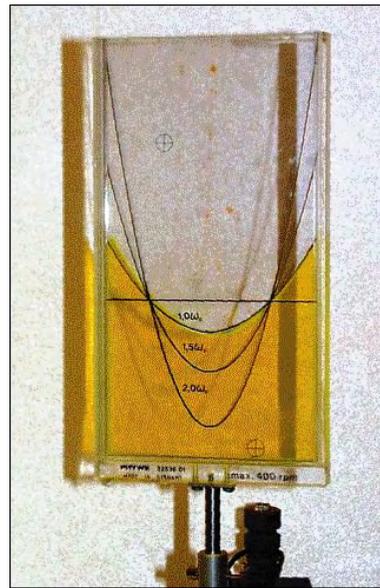


Abbildung 2.69: Zentrifugalküvette.

Die Beschleunigungskräfte können auch in Flüssigkeiten gemessen werden.

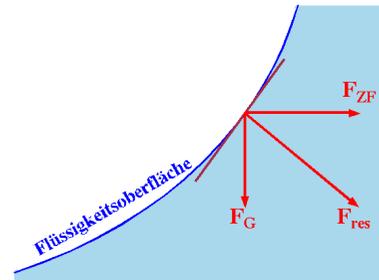


Abbildung 2.70: Kräftegleichgewicht an der Flüssigkeitsoberfläche.

Hier wird die Oberfläche der Flüssigkeit durch die Gleichgewichtsbedingung definiert, dass die Kraft auf die Moleküle an der Oberfläche senkrecht zur Oberfläche sein muss. Sie setzt sich zusammen aus der Gewichtskraft (unabhängig vom Abstand von der Rotationsachse) und der Zentrifugalkraft ($\sim r^2$). Somit ist die Steigung der Oberfläche proportional zur Zentrifugalkraft. Damit erhält man folgende Form für die Oberfläche:

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Offenbar bildet die Oberfläche eine Parabel. Dies kann im Experiment gut bestätigt werden. Außerdem können wir die Abhängigkeit von der Rotationsgeschwindigkeit semi-quantitativ verifizieren.

Die Zentrifugalkraft wirkt auf alle Körper proportional zu ihrer Masse. Sie wird u.a. dazu verwendet, um Suspensionen zu trennen, indem man diese in eine Zentrifuge lädt. Ultrazentrifugen erzeugen Kräfte bis zu 10^6 g.

In der Kernspinresonanz (NMR) verwendet man ebenfalls sehr schnelle Drehungen: Man rotiert Proben mit bis zu 50 kHz um ihre eigene Achse um ausgemittelte Spektren zu erhalten. Bei typischen Zahlen von $\nu_r = 12$ kHz, $d = 5$ mm erhält man

$$\begin{aligned} a_{ZF} &= (2\pi \cdot 1,2 \cdot 10^4)^2 s^{-2} 2mm = 1,1 \cdot 10^7 m/s^2 \\ &= 1,2 \cdot 10^6 g, \end{aligned}$$

also mehr als 1 Mio mal die Erdbeschleunigung.

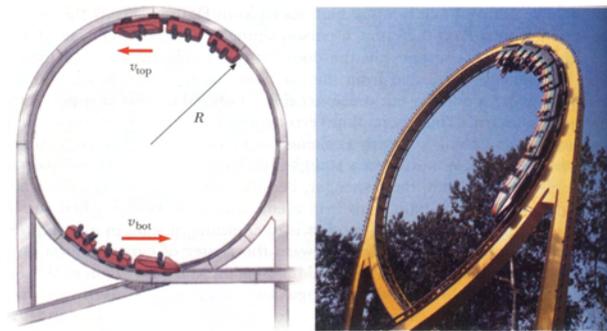


Abbildung 2.71: Loopingbahn.

Die Zentrifugalkraft wird auch in vielen spielerischen Anwendungen genutzt.

Exp. 43a: Loopingbahn

In diesem Experiment kann man messen, wie schnell ein Fahrzeug durch den Looping fahren muss um nicht herunterzufallen. Dabei muss am höchsten Punkt die Zentrifugalkraft gerade die Erdanziehung kompensieren. Die Zentrifugalkraft ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit und damit zur kinetischen Energie; diese wiederum ist gegeben durch die Differenz der potenziellen Energie des Fahrzeugs beim Start minus der potenziellen Energie an der Spitze des Loopings. Außerdem hängt die Zentrifugalkraft vom Radius der Bahn ab.



Abbildung 2.72: Eisschnellläufer in einer Kurve.

Die Zentrifugalbeschleunigung kann auch gemessen werden an der Neigung dieser Eisschnellläufer: Die Summe aus Gewichtskraft und Zentrifugalkraft muss entlang der Körperachse wirken, damit die Läufer stabil um die Kurve fahren.

2.6.9 Corioliskraft

Wenn ein Körper sich auf einer rotierenden Scheibe bewegt, so wird er durch die Zentrifugalkraft nach außen beschleunigt. Er folgt jedoch keiner geradlinigen Bahn, sondern diese ist gekrümmt. Verantwortlich dafür ist die zweite Scheinkraft, die als Corioliskraft bezeichnet wird, nach dem französischen Physiker Gaspard Gustave de Coriolis, (1792-1843). Die Corioliskraft kann geschrieben werden als

$$\vec{F}_C = 2\vec{p} \times \vec{\omega},$$

wobei der Impuls sich auf das rotierende Koordinatensystem bezieht. Er führt dazu, dass die Bewegung von reibungsfreien Körpern in einem rotierenden Koordinatensystem gekrümmt ist, falls die Bewegung eine Komponente senkrecht zur Rotationsachse aufweist.

Exp. 70a: Coriolis / Drehstuhl

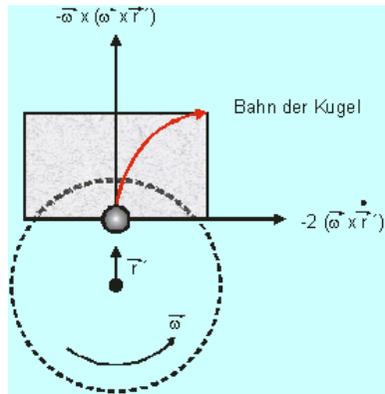


Abbildung 2.73: Messung der Corioliskraft im Drehstuhl.

Die Corioliskraft ist proportional zur Geschwindigkeit des bewegten Körpers und zur Winkelgeschwindigkeit des Systems, wobei nur die senkrechte Komponente beiträgt. Wenn der Körper aufgrund der Zentrifugalkraft nach außen beschleunigt wird, setzt auch die Corioliskraft ein, welche proportional zur Geschwindigkeit ist und senkrecht zur Geschwindigkeit wirkt, d.h. die Bahn biegt. Der Effekt der beiden Kräfte ist eine spiralförmige Bewegung nach außen.

Die gleichen Kräfte treten z.B. auch bei Bewegungen auf der Erdoberfläche auf. Hier ist die Corioliskraft z.B. für die Ablenkung der Windsysteme verantwortlich. Gäbe es keine Erdrotation, so würden die Winde direkt in Richtung des Zentrums eines Tiefdruckgebietes blasen. Aufgrund der Erdrotation wird bewegte Luft jedoch abgelenkt. Die Richtung wird durch das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{\omega}$ bestimmt. Der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ zeigt auf der Erde nach Norden. Auf der Nordhalbkugel werden die Winde nach rechts abgelenkt. Dies ist der Grund für die dominanten Westwinde in unseren Breitengra-

den: es handelt sich um Luft, die aus den Hochdruckgebieten im Bereich der Sahara nach Norden fließt und dabei durch die Corioliskraft nach Osten abgelenkt wird.

Gleichzeitig führt die Corioliskraft dazu, dass Luft nicht gerade in ein Tiefdruckgebiet hinein fließt, sondern sich im Gegenuhrzeigersinn darum dreht.

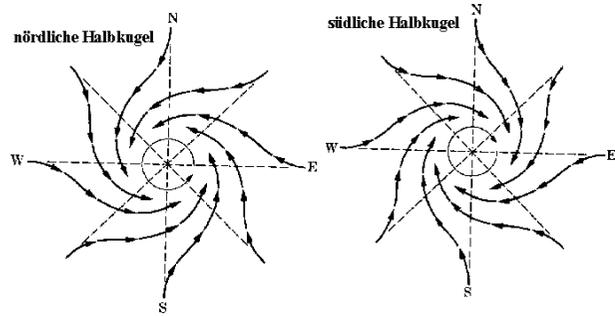


Abbildung 2.74: Windrichtung von Tiefdruckgebieten auf der nördlichen, resp. südlichen Halbkugel.

Auf der Südhalbkugel wechselt das Vorzeichen von $\vec{v} \times \vec{\omega}$, die Winde werden nach links abgelenkt und drehen sich im Uhrzeigersinn um die Tiefdruckgebiete.

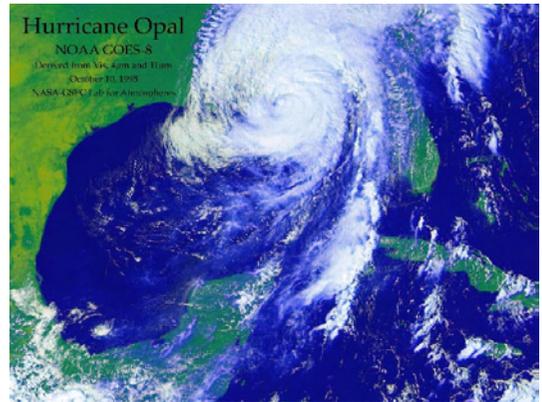


Abbildung 2.75: Hurrikan.

Die resultierende Drehung der Tiefdruckgebiete ist praktisch in jeder Wetterkarte sichtbar. Hier als Beispiel ein Hurrikan über dem Golf von Mexiko.

Ebenso kann die Drehung der Pendelebene beim Foucault'schen Pendel als Effekt der Corioliskraft verstanden werden. Sie verschwindet auf

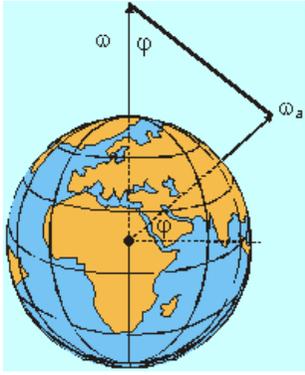


Abbildung 2.76: Das Foucault'sche Pendel.

dem Äquator, wo die Bewegung parallel zur Erd-Rotationsachse läuft, so dass das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{\omega}$ verschwindet. Zwischen Pol und Äquator variiert die Präzessionsgeschwindigkeit mit $\sin \phi$, wobei ϕ die geographische Breite darstellt. In Deutschland dauert eine Rotation gegenüber dem terrestrischen Bezugssystem rund 32 Stunden.

2.7 Hydrostatik

2.7.1 Aggregatzustände

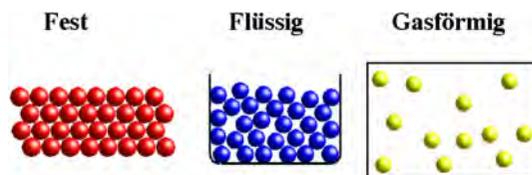


Abbildung 2.77: Die drei Aggregatzustände

Die drei wichtigsten Aggregatzustände sind Festkörper, Flüssigkeiten und Gase. Die wesentlichsten Unterscheidungsmerkmale sind, dass Festkörper eine Gestalt haben; diese kann unter dem Einfluss einer äußeren Kraft ändern, so lange diese Kraft nicht zu groß wird kehrt der Körper jedoch nach Nachlassen der äußeren Kraft in die ursprüngliche Form zurück; man nennt dies Formgedächtnis. Eine Flüssigkeit besitzt keine bestimmte Form, sie nimmt jedoch ein definiertes Volumen ein. Unter dem Einfluss einer äußeren Kraft kann dieses Volumen kleiner werden; nach Entfernen der Kraft dehnt sich die Flüssigkeit

wieder aus bis sie das ursprüngliche Volumen wieder einnimmt. Man bezeichnet dies als Volumengehächnis. Ein Gas füllt im Gegensatz dazu immer das gesamte verfügbare Volumen.

Man fasst Festkörper und Flüssigkeiten unter dem Begriff "kondensierte Materie" zusammen; Flüssigkeiten und Gase werden unter dem Begriff "Fluide" zusammengefasst.

Diese Eigenschaften sind jedoch nicht absolut scharf: Auch Eis, oder sogar Steine, die als Festkörper bezeichnet werden, haben die Tendenz, unter hohem Druck und über lange Zeiten zu fließen. Außerdem gibt es eine Reihe von Substanzen, die sich nur schlecht in dieses Schema einordnen lassen: Granulare Medien bestehen aus vielen festen Körpern, aber als gesamte Medien zeigen sie typisches Fließverhalten. Gläser sind unterkühlte Flüssigkeiten, die sich für viele Belange wie Festkörper verhalten.

2.7.2 Spannung

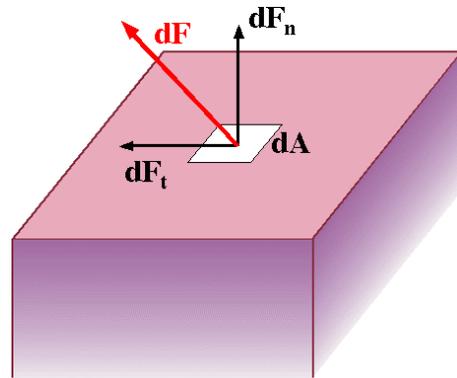


Abbildung 2.78: Definition der Spannung.

Spannung ist definiert als Kraft pro Fläche,

$$S = \frac{dF}{dA} \quad [S] = \frac{N}{m^2}.$$

Eine allgemeine Spannung kann zerlegt werden in eine Normalspannung und eine Tangential- (Schub-)spannung:

$$S = \sigma + \tau = \frac{dF_n}{dA} + \frac{dF_t}{dA}.$$

Mit Hilfe dieser Klassifizierung kann man den Unterschied zwischen Fluiden und Festkörpern so formulieren: Bei Fluiden verschwindet der Schermodul, es treten also (im statischen Grenzfall) keine Scherspannungen auf.

2.7.3 Hydrostatischer Druck und Kompressibilität

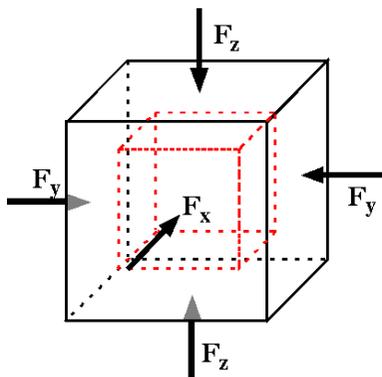


Abbildung 2.79: Hydrostatischer Druck.

Man spricht von hydrostatischem Druck wenn die Normalspannung aus allen Raumrichtungen gleich ist und die Scherspannung verschwindet. Spannungen sind deshalb reine Normalspannungen, werden als Druck p bezeichnet und sind skalare Größen.

Spannungen allgemein und Druck im Besonderen werden im SI System in Pascal = N/m^2 gemessen. Normaldruck, d.h. der mittlere Luftdruck auf Meereshöhe, (1 atm) entspricht ca. 10^5 N/m^2 .

Unter dem Einfluss des Druckes kommt es zu einer Volumenänderung ΔV , welche proportional ist zum Volumen V und zur Druckänderung Δp :

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \Delta p = \frac{\Delta p}{K}, \quad [\kappa] = \text{m}^2 \text{N}^{-1},$$

wobei die Proportionalitätskonstante κ als Kompressibilität bezeichnet wird. Sie ist das Inverse des Kompressionsmoduls K .

Die Dichte eines Mediums ist definiert als Masse pro Volumen; da das Volumen mit zunehmendem Druck abnimmt steigt somit die Dichte an. Für infinitesimale Änderungen gilt

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V} = \kappa \Delta p.$$

Diese Gleichungen gelten sowohl für Flüssigkeiten wie auch für Gase; bei Flüssigkeiten ist die Kompressibilität jedoch sehr viel geringer als bei Gasen. Typische Werte für die Kompressibilität von Flüssigkeiten sind rund zwei Größenordnungen höher als bei Festkörpern. Einige Beispiele sind (bei 20°C , 1 atm):

Flüssigkeit	κ
Quecksilber	$0,4 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$
Wasser	$5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$
Benzol	$10 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$
Äthanol	$10 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$

Für ein ideales Gas ist die Kompressibilität $\kappa_{ig} = 1/p$, bei Normaldruck also $10^{-5} \text{ m}^2/\text{N}$ und damit um rund 4 Größenordnungen über dem entsprechenden Wert für eine typische Flüssigkeit. Die Größenordnung der Kompressibilität ist somit, neben der Dichte, das wesentliche Kriterium, welches Flüssigkeiten von Gasen unterscheidet.

Man kann damit z.B. die Kompression von Wasser in einer Tiefe von 4000 m (=mittlere Meerestiefe) ausrechnen. Hier beträgt der Druck $4 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ und die entsprechende Volumenänderung etwa

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa p = -5 \cdot 10^{-10} \cdot 4 \cdot 10^7 = -0.02 = -2\%.$$

Eine Volumenänderung wird auch durch eine Temperaturänderung erzeugt:

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T \quad [\gamma] = \frac{1}{K}.$$

Die Proportionalitätskonstante wird als Volumenausdehnungskoeffizient bezeichnet. Wie bei der Kompressibilität ist der Volumenausdehnungskoeffizient für Flüssigkeiten sehr viel kleiner als für Gase. Für ideale Gase ist $\gamma = 1/T$ ($\sim 1/300\text{K}$ bei Raumtemperatur).

2.7.4 Hydraulische Kraftübertragung

Flüssigkeiten (= "Hydraulik") können für die Übertragung und Umwandlung von Kräften verwendet werden. Ist die vertikale Ausdehnung eines Systems von Rohren klein so herrscht innerhalb im Gleichgewicht überall derselbe Druck.

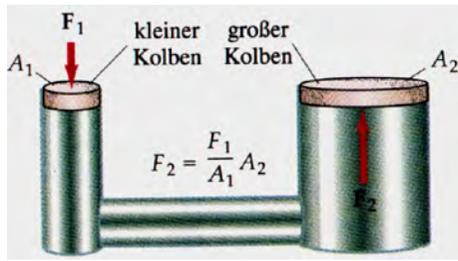


Abbildung 2.80: Hydraulische Presse.

Damit gilt für die beiden Kolben

$$\frac{F_1}{A_1} = p = \frac{F_2}{A_2}$$

oder

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}.$$

Somit lassen sich auch kleine Kräfte F_1 in sehr große Kräfte F_2 umwandeln, sofern die Flächenverhältnisse entsprechend gewählt werden. Die Wege, die dabei zurückgelegt werden, verhalten sich genau entgegengesetzt.

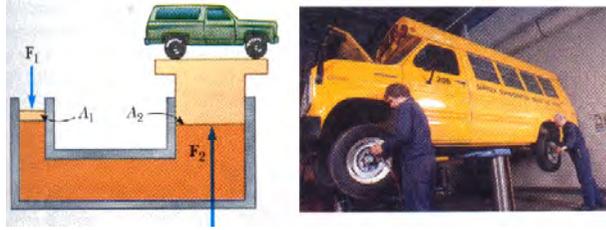


Abbildung 2.81: Hydraulischer Lift.

Auf diese Weise werden z.B. mit hydraulischen Pressen große Kräfte erzeugt.

2.7.5 Schweredruck

Bei tiefen Flüssigkeiten und Gasen tritt ein Schweredruck auf: zusätzlich zum Außendruck wirkt an jeder Stelle die Gewichtskraft der darüber liegenden Teilchen. Die Gewichtskraft einer Flüssigkeitssäule mit Querschnittsfläche A , Dichte ρ und Höhe $h = h_1 - h_2$ beträgt

$$F_S = mg = V \rho g = A h \rho g.$$

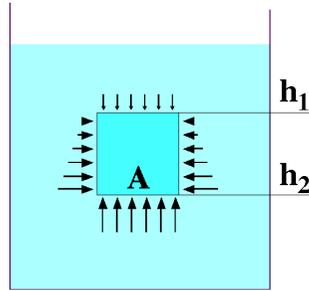


Abbildung 2.82: Schweredruck.

Wenn sich das markierte Volumenelement im Gleichgewicht befindet, muss diese Gewichtskraft durch eine größere Kraft auf der Unterseite kompensiert werden. Der Druckunterschied zwischen oben und unten muss somit

$$p_S = \frac{F_S}{A} = h \rho g$$

sein. Dieser Druckbeitrag wird als Schweredruck bezeichnet.

Der gesamte hydrostatische Druck ist demnach

$$p(z) = p_a + z \rho g,$$

wobei p_a den Außendruck darstellt und z die Distanz zur Oberfläche. Der Druck ist somit nur abhängig von der Dichte der Flüssigkeit und von der Höhe der Flüssigkeitssäule. Für den Fall von Wasser gilt

$$\begin{aligned} \rho_W g &= 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}^2} \\ &= 0,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N/m}^2}{\text{m}} = 0,1 \frac{\text{atm}}{\text{m}}, \end{aligned}$$

d.h. der Druck nimmt pro 10 m Tiefe um 1 atm ($=10^5 \text{ N/m}^2$) zu. Innerhalb des Systems ist der Druck nur von der Höhe abhängig, nicht vom (horizontalen) Ort. Dieses Prinzip gilt für alle unbewegten Fluide.

Exp. 76a: kommunizierende Röhren

Eine Konsequenz davon ist, dass die Flüssigkeit in einem System von verbundenen (= "kommunizierenden") Röhren überall bis zur gleichen Höhe aufsteigt, unabhängig vom Querschnitt und Form der Röhre.

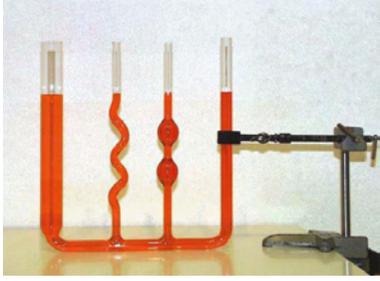


Abbildung 2.83: Kommunizierende Röhren.

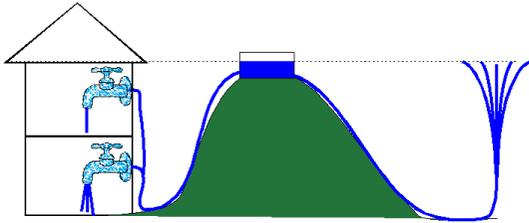


Abbildung 2.84: Druckverteilung im Wasserrohr-Netz.

Die gleichmäßige Verteilung des Drucks in einem System von Röhren wird verwendet um den Wasserdruck in der städtischen Wasserversorgung sicherzustellen: Das Reservoir muss mindestens so hoch liegen wie das höchste Haus. Eine Erweiterung dieses Prinzip ist, dass man - in einer gewissen Näherung - die Rohre auch weglassen darf: Eine Fontäne erreicht die Höhe des Wasserspiegels im Reservoir.

2.7.6 Hydrostatischer Druck in Gasen

Im Falle von Gasen ist die Dichte abhängig vom Druck. Die Druckzunahme ist deshalb nicht mehr proportional zur Höhe. Für eine dünne Schicht kann die Dichte als konstant angenommen werden, doch bei Druckänderungen in der Atmosphäre müssen die Dichteänderungen berücksichtigt werden.

Für die Berechnung der Höhenabhängigkeit des Druckes in der Atmosphäre betrachten wir zunächst eine Schicht, welche so dünn ist, dass die Dichte noch als konstant betrachtet werden kann. Die Druckänderung durch diese Schicht ist dann wie bei einer Flüssigkeit

$$dp = -\rho g dh,$$

wobei h nach oben zunimmt und somit der Druck abnimmt. Für ein ideales Gas gilt bei konstanter Temperatur (Boyle-Mariott Gesetz): $\rho = \rho_0 p/p_0$. Damit wird

$$dp = -\rho_0 \frac{p}{p_0} g dh.$$

Integration ergibt

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int_0^h dh = \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} gh$$

oder

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 gh}{p_0}\right),$$

d.h. der Druck nimmt mit zunehmender Höhe exponentiell ab.

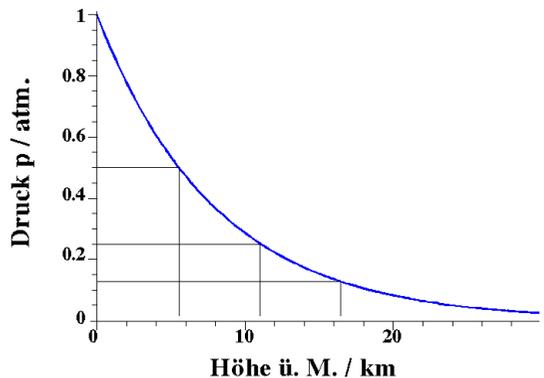


Abbildung 2.85: Atmosphärischer Druck als Funktion der Höhe.

Numerische Werte für diese Parameter sind für Normalatmosphäre ($T = 0^\circ\text{C}$, $p_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Pa) $\rho_0 = 1,293$ kg/m³. Damit hat das Produkt $\frac{\rho_0 g}{p_0}$ den numerischen Wert $1,254 \cdot 10^{-4}$ m⁻¹ oder

$$p = p_0 \exp(-h/8\text{km}).$$

Der Druck fällt pro 8 km Höhe auf $1/e$ oder pro 5,5 km auf die Hälfte ab. In Wirklichkeit variieren sowohl die Temperatur wie auch die Zusammensetzung der Erdatmosphäre mit der Höhe. Die obige Formel gibt aber eine gute Näherung für das tatsächliche Verhalten ab.

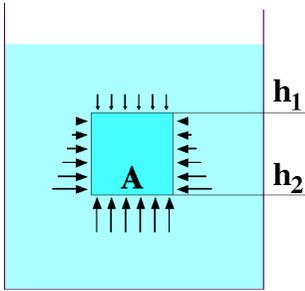


Abbildung 2.86: Auftrieb: der Druck auf die untere Fläche ist größer als auf die obere Fläche.

2.7.7 Auftrieb

Aufgrund des Schweredruckes erhält ein Körper in einer Flüssigkeit Auftrieb.

Dieser Effekt lässt sich relativ leicht am Beispiel eines Kubus in einer Flüssigkeit berechnen. Der Druck auf die beiden Seitenflächen ist der gleiche; in horizontaler Richtung heben sich die Druckkräfte somit auf. Der Druck auf den Boden ist aber aufgrund des Schweredruckes größer als auf die obere Fläche. Damit erhält man eine resultierende Druckkraft auf den Körper, die nach oben wirkt.

Exp. 75a: Hydrostatischer Druck

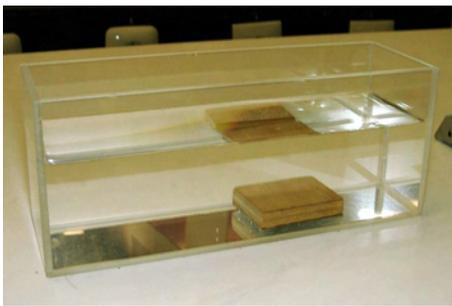


Abbildung 2.87: Der Holzblock klebt am Boden des Wassertanks.

Man kann die Kraft auf die Unterseite eliminieren indem man den Körper so auf dem Boden drückt, dass keine Flüssigkeit darunter bleibt. Erst nach einer gewissen Zeit gelangt Wasser wieder darunter und erzeugt Auftrieb.

Die resultierende Kraft kann direkt aus der Druckdifferenz berechnet werden, welche durch den Schweredruck erzeugt wird:

$$\begin{aligned}
 F_A &= F_2 - F_1 = A(p_2 - p_1) = \\
 &= A\rho_{fl}g(h_2 - h_1) = \rho_{fl}gV = m_{\text{verdraengt}}g \\
 &= F_{G,\text{verdraengt}}.
 \end{aligned}$$



Abbildung 2.88: Archimedes von Syrakus (287 - 212 v. Chr.).

Die Auftriebskraft entspricht somit der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit. Dieses Gesetz wurde zuerst von Archimedes formuliert und wird deshalb als Prinzip von Archimedes bezeichnet. Es ist eines der ältesten immer noch gültigen physikalischen Gesetze.

Für den Spezialfall, dass der Körper die gleiche Dichte besitzt wie die Flüssigkeit könnte man dieses Resultat noch einfacher erhalten: Ein Flüssigkeitsvolumen ist dann im Gleichgewicht wenn die Auftriebskraft gerade die Gewichtskraft kompensiert. Dieses Resultat wurde hier für einen Kubus hergeleitet, ist aber unabhängig von der Form gültig.

Exp. 78: Prinzip von Archimedes

Der Auftrieb kann experimentell gemessen werden indem man die Reduktion der Gewichtskraft misst, wenn der Körper in eine Flüssigkeit eingetaucht

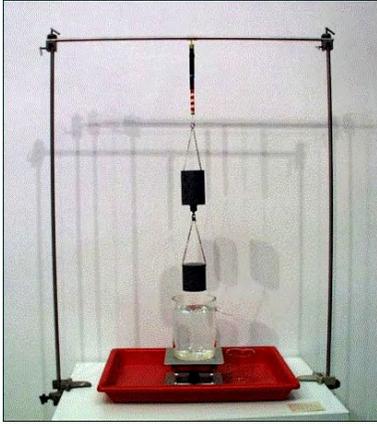


Abbildung 2.89: Messung des Auftriebs.

wird. Die verdrängte Flüssigkeitsmenge wird dadurch gemessen, dass sie in einem Becherglas aufgefangen wird. Wird sie anschließend in den Behälter gegossen, welche am gleichen Federkraftmesser hängt wie der Aluminiumblock so misst man wieder die gleiche Kraft wie zu Beginn.



Abbildung 2.90: Ballonflug

Nicht nur in Flüssigkeiten, sondern auch in Luft und anderen Gasen existiert dieser Auftrieb. Dies ist z.B. die Grundlage für den Ballonflug, kann aber auch anhand eines einfachen Laborexperimentes nachgewiesen werden.

Exp. 79: Auftriebswaage



Abbildung 2.91: Auftriebswaage.

Man kann den Effekt u.a. nachweisen indem man die Luft entfernt.

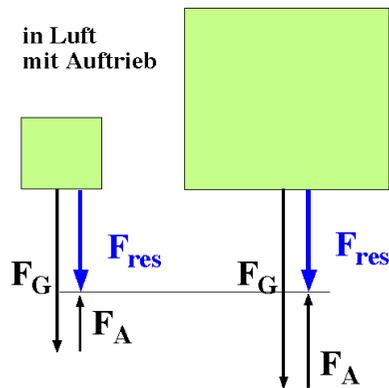


Abbildung 2.92: Gleichgewicht in Luft.

In Luft sind die beiden Körper im Gleichgewicht: die Summe F_{res} aus Schwerkraft F_G und Auftrieb F_A ist für beide gleich. Wird die Luft abgepumpt, so verschwindet der Auftrieb. Da dieser für den größeren Körper erheblich größer ist als für den kleinen Körper sinkt er ab.

Der Auftrieb für den eingetauchten Körper bedeutet umgekehrt, dass das Gefäß, welches die Flüssigkeit enthält, entsprechend schwerer wird. Man kann dies dadurch verstehen, dass die Flüssigkeitssäule, welche auf den Boden des Gefäßes drückt, entsprechend dem verdrängten Volumen höher geworden ist.

2.8 Grenzflächeneffekte

2.8.1 Oberflächenspannung

An Grenzflächen treten besondere Effekte auf, welche im Volumen nicht beobachtbar sind. Die molekulare Grundlage dafür sind Kohäsionskräfte, d.h. Kräfte zwischen gleichartigen Atomen / Molekülen. In den meisten Flüssigkeiten dominieren dabei van der Waals Kräfte. Sie erniedrigen die Energie des Moleküls gegenüber einem Molekül im Vakuum und sind damit die Ursache dafür, dass sich Flüssigkeiten überhaupt bilden. Eng verwandt damit sind Adhäsionskräfte: diese wirken zwischen Molekülen verschiedener Stoffe, also z.B. zwischen einem Molekül in der Flüssigkeit und einer festen Oberfläche.

Befindet sich ein Molekül an der Oberfläche einer Flüssigkeit so ist es weniger Kohäsionskräften ausgesetzt und seine Energie ist höher als im Innern der Flüssigkeit. Auf solche Moleküle wirkt deshalb eine Kraft $\vec{F}_{\text{resultierend}}$ nach innen. Mit einer Oberfläche ist deshalb eine potenzielle Energie verbunden, die "Oberflächenenergie".

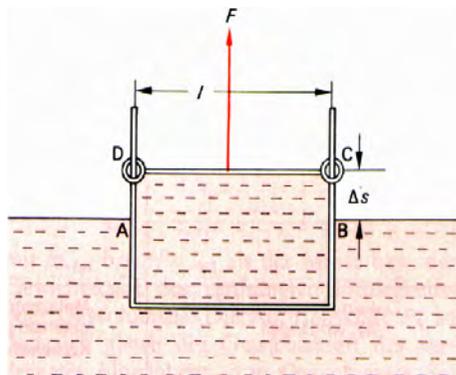


Abbildung 2.93: Oberflächenspannung.

Damit verbunden ist die Oberflächenspannung: Da für die Erzeugung und Vergrößerung einer Oberfläche Arbeit geleistet werden muss wirkt eine Kraft, welche sie zu verkleinern sucht. Die spezifische Oberflächenenergie ist

$$\sigma_A = \frac{dW}{dA} \quad [\sigma_A] = \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Diese Größe wird auch als Oberflächenspannung bezeichnet. Dabei stellt dW die geleistete Arbeit dar,

dA die zusätzliche Fläche. Im Gegensatz zu Spannungen im Volumen handelt es sich hier aber um eine Kraft pro Längeneinheit.

Exp. 87a: Grenzflächenspannung



Abbildung 2.94: Experiment Oberflächenspannung.

Die Grenzflächenspannung kann gemessen werden indem man an einem Bügel zieht, an den eine Lamelle anschließt. Die Oberfläche S der Lamelle wird um ΔS vergrößert, wobei der Oberflächenzuwachs auf beiden Seiten der Lamelle erfolgt. Bei einem Radius r des Kreises wird die Oberfläche der Lamelle um den Betrag

$$\Delta A = 2 \Delta h l = 2 \Delta h 2\pi r$$

vergrößert, wobei $l = 2\pi r$ den Umfang des Bügels darstellt und Δh die Höhenänderung. Der Faktor 2 berücksichtigt, dass die Flüssigkeitslamelle zwei Oberflächen besitzt. Die Kraft, welche für die Vergrößerung der Oberfläche benötigt wird, lässt sich berechnen aus der Änderung der Oberflächenenergie W_S pro Wegelement Δh :

$$F = \frac{W_S}{\Delta h} = \sigma_A \frac{\Delta A}{\Delta h} = 4\pi r \sigma_A.$$

Im Experiment hat der Ring einen Radius von 1 cm; für eine Oberflächenspannung von 0.072 N/m (Wasser bei 20 °C) erwartet man eine Kraft von 9 mN.

Ein analoges Experiment wird häufig von Wasserläufern durchgeführt: Sie können auf dem Wasser gehen weil Ihre Körpergewicht so klein ist, dass die Kraft auf die Wasseroberfläche kleiner ist als die Kraft, welche benötigt würde, um ein Loch in der



Abbildung 2.95: Wasserläufer

Wasseroberfläche zu drücken und damit die Oberfläche zu vergrößern.

Oberflächenspannungen kann es sowohl zwischen festen Körpern und Gasen wie zwischen Flüssigkeiten und Gasen oder zwischen zwei Flüssigkeiten geben.

Am größten sind die Oberflächenspannungen bei Metallen. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die Metallatome eine sehr starke Wechselwirkung untereinander besitzen. Wasser besitzt im Vergleich mit anderen Flüssigkeiten ebenfalls eine relativ hohe Oberflächenspannung. Dies ist ein Hinweis auf die relativ starken intermolekularen Kräfte in Wasser, welche auch für den relativ hohen Siedepunkt (im Vergleich zu gleich schweren Molekülen) verantwortlich sind.

2.8.2 Minimalflächen

Im Gleichgewicht besitzt ein System die niedrigste mögliche Energie. Dazu gehört offenbar, dass die Oberflächen möglichst klein sind. Oberflächen sind deshalb Minimalflächen.

In der Figur wird dies anhand von Einzelbildern beim Abfallen eines Wassertropfens gezeigt: Zunächst findet man ein Gleichgewicht von Oberflächenspannung und Schwerkraft; erst wenn die Flüssigkeitsmenge groß genug wird überwiegt die Schwerkraft und der Tropfen reißt ab. Der Tropfen nimmt darauf Kugelform (eine Minimalfläche) an, wobei transiente Schwingungen um die Gleichgewichtsform beobachtet werden können.

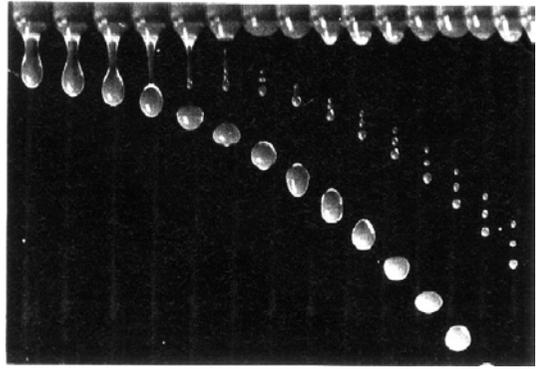


Abbildung 2.96: Entstehung eines Wassertropfens.

Exp. 88: Minimalflächen

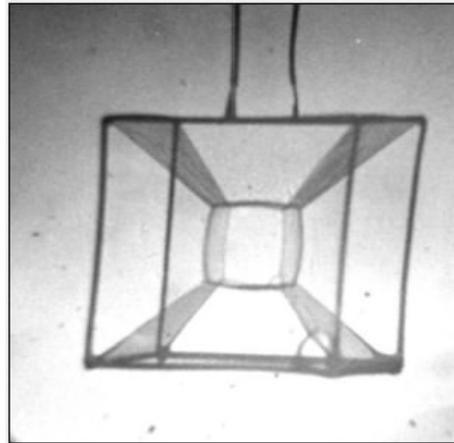


Abbildung 2.97: Minimalfläche in einem Würfel.

Minimalflächen kann man z.B. erzeugen indem man Seifenlamellen aufspannt. Je nach Randbedingung (Drähte) erzeugen die Seifenlamellen diejenigen Oberflächen, welche die Größe der Lamelle minimieren.

Ein Beispiel wo keine Drähte benötigt werden, ist die Seifenblase. Hier ist das Volumen durch die eingeschlossene Gasmenge vorgegeben. Die Minimalfläche bei gegebenem Volumen ist eine Kugel. Die Oberflächenspannung des Seifenfilmes beträgt = $30 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$. Wir untersuchen folgende Fragen:

- wie hoch ist der Druck im Innern der Seifenblase im Vergleich zum Außendruck?
- was passiert wenn eine große und eine kleine Seifenblase zusammenkommen?

Wir berechnen zunächst die Arbeit, welche benötigt wird, um den Radius der Kugel von r auf $r + dr$ zu vergrößern. Die Kraft ist gegeben durch das Produkt aus Druckdifferenz p und Oberfläche A , und der Weg ist dr . Damit wird die Arbeit

$$dW = F dr = p A dr = p 4\pi r^2 dr,$$

Diese Arbeit wird benötigt um die Oberflächenenergie zu vergrößern,

$$dW = \sigma dA = \sigma [4\pi(r + dr)^2 - 4\pi r^2] =$$

$$\sigma [4\pi r^2 + 8\pi r dr - 4\pi r^2] = \sigma 8\pi r dr,$$

wobei wie üblich der Term $\propto dr^2$ (quadratisch in einer infinitesimalen Größe) weggelassen wurde. Damit erhalten wir

$$p 4\pi r^2 dr = \sigma 8\pi r dr \rightarrow p = 2 \frac{\sigma}{r}.$$

Für eine Seifenblase mit einem Radius von $r = 1.8$ cm erhält man z.B. $p = 3.33 \text{ N/m}^2$.

Exp. 86: Oberflächenspannung

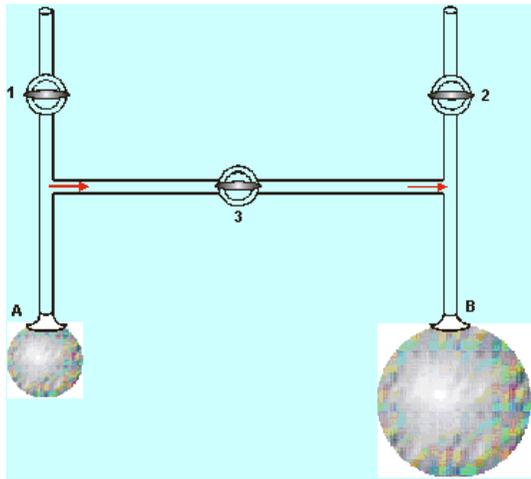


Abbildung 2.98: Durckausgleich zwischen Seifenblasen.

Der Druck ist indirekt proportional zum Radius, d.h. in größeren Seifenblasen ist der Druck kleiner. Treffen zwei Seifenblasen zusammen so pumpt die kleinere die größere auf. Die resultierende gemeinsame Seifenblase besitzt wiederum eine minimale Oberfläche.

2.8.3 Benetzung

Befinden sich Flüssigkeiten auf Oberflächen so kommt es zu einem Wettbewerb zwischen Kohäsionskräften und Adhäsionskräften.

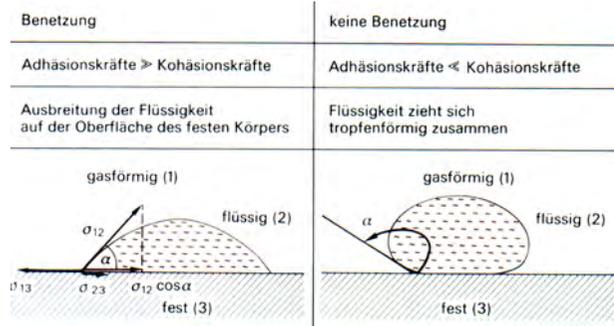


Abbildung 2.99: Benetzung

Ist die Adhäsion stärker als die Kohäsion wird die Kontaktfläche zwischen Flüssigkeit und Oberfläche vergrößert. Dies ist z.B. für Wasser auf Glas der Fall. Man quantifiziert das Verhältnis von Kohäsion zu Adhäsion über den Randwinkel θ . Dieser stellt sich als Gleichgewichtswert dadurch ein, dass die drei Grenzflächenspannungen (fest-flüssig, fest-gasförmig und flüssig-gasförmig) gleichzeitig minimiert werden müssen. Ist der Benetzungswinkel kleiner als 90° so spricht man von Benetzung; liegt er bei 0° so handelt es sich um vollständige Benetzung. Bei $\theta > 90^\circ$ liegt eine nicht benetzende Flüssigkeit vor.

Einige Beispiele für Benetzungswinkel:

Grenzfläche	θ
Wasser auf fettfreiem Glas	$\approx 0^\circ$
Wasser auf Parafin	105-110
Quecksilber auf Glas	140
Quecksilber auf Stahl	154

Quecksilber ist ein typisches Beispiel einer nicht benetzenden Flüssigkeit. In diesem Fall sind die Kohäsionskräfte stärker als die Adhäsionskräfte. Das System verkleinert deshalb die Kontaktfläche. Diese Eigenschaft ist eine Folge der hohen Oberflächenspannung von Quecksilber.

2.8.4 Kapillarkräfte

Grenzflächeneffekte erzeugen auch die so genannten Kapillarkräfte: Die Energie, welche ein System durch die Vergrößerung der Kontaktfläche gewinnt, kann dazu verwendet werden, um die Flüssigkeit auf eine größere Höhe anzuheben.

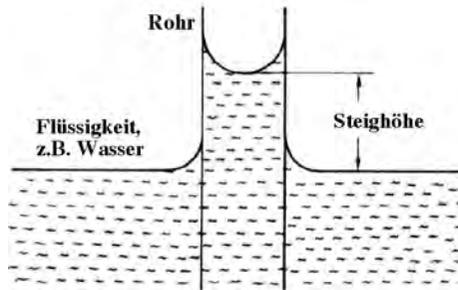


Abbildung 2.100: Kapillarkräfte

Die Kraft, welche die Flüssigkeit in der Kapillare nach oben zieht, ist

$$F_{\uparrow} = A \frac{2\sigma_A}{R},$$

wobei A die Querschnittsfläche der Kapillare und R den Krümmungsradius der Oberfläche bezeichnet. Wird die Kapillare vollständig benetzt (Kontaktwinkel $\theta \approx 0$) so ist dieser Krümmungsradius gerade gleich dem Radius r der Kapillare. Diese Kraft muss gerade die Gewichtskraft der Flüssigkeit in der Kapillare kompensieren, welche

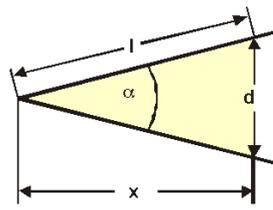
$$F_G = mg = \rho Ahg$$

beträgt. Offenbar ist das Gleichgewicht erreicht wenn die beiden Kräfte gleich sind, $F_{\uparrow} = F_G$. Dies wird bei der Höhe

$$h = \frac{2\sigma_A}{\rho rg}$$

erreicht. Die Steighöhe ist somit proportional zur Oberflächenspannung und invers proportional zum Radius der Kapillare. Für Wasser ($\sigma_A = 0.072 \text{ N/m}$) in einer Kapillare von 0.1 mm Radius erhält man somit eine Steighöhe von $0.144 \text{ m} \sim 14 \text{ cm}$.

Anordnung der Platten



Flüssigkeitspiegel

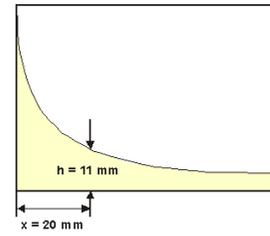


Abbildung 2.101: Kapillarkräfte zwischen 2 Glasplatten.

Exp. 89a: Kapillarkräfte

Man kann dies auch mit Hilfe von Glasplatten zeigen: in diesem Versuch stehen zwei Glasplatten unter einem spitzen Winkel, so dass der keilförmige Bereich dazwischen unterschiedliche Kapillardurchmesser darstellt.

Man findet eine hyperbolische Abhängigkeit der Steighöhe von der Position und damit vom Abstand der Platten.

Ist die Benetzung nicht vollständig (d.h. der Kontaktwinkel $\theta > 0^\circ$), so fällt der Effekt entsprechend geringer aus.

$$h = \frac{2\sigma_A}{\rho rg} \cos \theta.$$

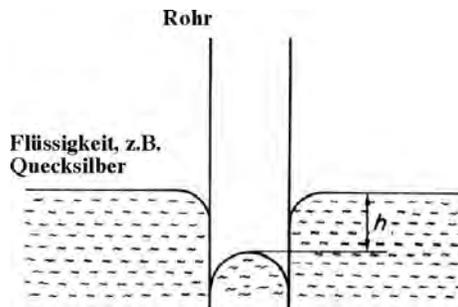


Abbildung 2.102: Kapillardepression

Auch hier kann der umgekehrte Fall eintreten, dass die Kohäsionskräfte stärker sind. In diesem Fall ist $\theta > 90^\circ$ und $\cos \theta < 0$: es kommt es zu einer Kapillardepression, d.h. die Flüssigkeitsoberfläche im Innern der Kapillare ist tiefer als außen.

2.9 Hydrodynamik und Aerodynamik

In diesem Kapitel werden ebenfalls Fluide diskutiert, wobei wir jetzt bewegte Medien betrachten. Durch die Bewegung kommen 2 Aspekte dazu, welche bei der Hydrostatik nicht diskutiert wurden:

- In bewegten Fluiden existieren Scherspannungen auf Grund der endlichen Viskosität. Diese innere Reibung ist proportional zum Geschwindigkeitsgradienten.
- Bewegte Fluide besitzen kinetische Energie. Es findet deshalb eine Umwandlung von potenzieller (Höhe, Druck) in kinetische Energie (und umgekehrt) statt.

Der wichtigste Unterschied zwischen strömenden Flüssigkeiten und strömenden Gasen ist, dass man bei Flüssigkeiten meist davon ausgehen kann, dass die Volumenänderungen der Flüssigkeit gering sind, d.h., dass es sich um ein inkompressibles Medium handelt. Im Falle der Ärodynamik (bei Gasen) muss die Kompressibilität berücksichtigt werden.

2.9.1 Stromlinien und Geschwindigkeitsfelder

Um ein strömendes Medium zu beschreiben gibt es verschiedene Methoden. Die Lagrange-Methode entspricht einer zeitlichen Verfolgung der Masselemente δm . Einfacher ist die Euler-Methode bei der zu einem beliebigen Zeitpunkt die Geschwindigkeitsvektoren der einzelnen Masselemente betrachtet werden.

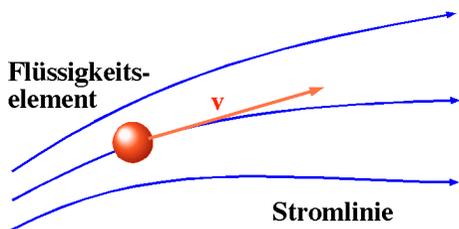


Abbildung 2.103: Flusslinien

Die Gesamtheit dieser Geschwindigkeitsvektoren wird als Geschwindigkeitsfeld bezeichnet. Zur Dar-

stellung verwendet man meist Stromlinien. Dabei handelt es sich um orientierte Kurven, welche den Weg der Flüssigkeitselemente verfolgen. Die momentane Tangente an diese Kurven ergibt jeweils die lokale Richtung der Strömungsgeschwindigkeit.

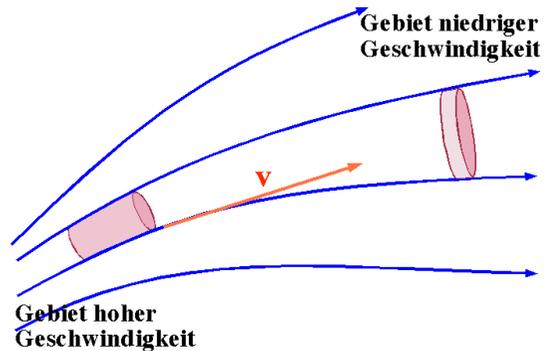


Abbildung 2.104: Stromliniendichte als Maß für die lokale Geschwindigkeit.

Die Dichte der Stromlinien ist ein Maß für den Betrag der Geschwindigkeit: Je größer die Anzahl der Stromlinien durch eine Fläche sind, desto größer ist die Stromdichte und damit die lokale Geschwindigkeit.

Exp. 81: Stromlinien

Diese Stromlinien können auch sichtbar gemacht werden; sie sind nicht nur ein theoretisches Konzept. Man injiziert dafür z.B. gefärbtes Wasser oder kleine Partikel in das fließende Medium.

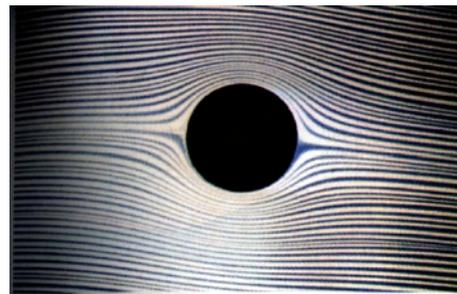


Abbildung 2.105: Laminare Strömung um einen Zylinder.

In diesem Beispiel werden die Stromlinien beim Umfließen eines Zylinders dargestellt. Sie zeigen,

dass auf der Vorder- und Hinterseite ein Stau entsteht, also eine Region geringer Geschwindigkeit, und auf beiden Seiten eine Region hoher Geschwindigkeit.

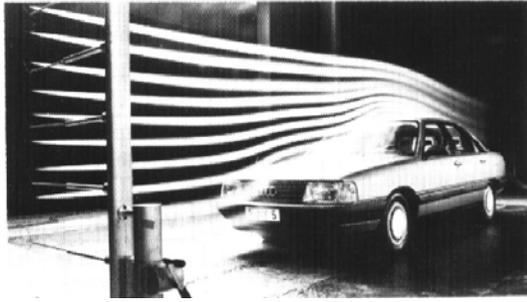


Abbildung 2.106: Automobil im Windkanal.

Figur 2.106 stellt entsprechende Untersuchungen an einem Automobil in einem Windkanal dar. Die Strömungslinien werden sichtbar gemacht, indem Rauch in den Gasstrom geblasen wird. Solche Experimente spielen z.B. für den Entwurf von Fahrzeugen und Flugzeugen eine wichtige Rolle.

Strömungen werden als stationär bezeichnet, wenn die Stromlinien zeitlich konstant sind. Es gibt laminare und turbulente Strömungen.

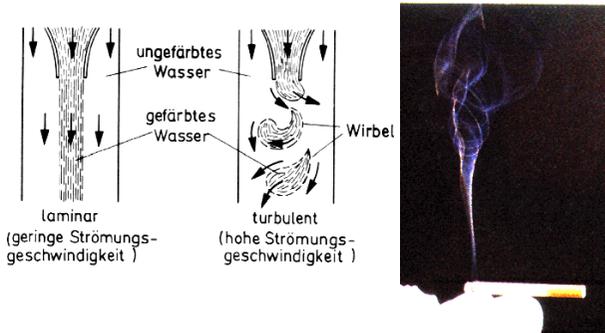


Abbildung 2.107: Laminare und turbulente Strömungen.

In diesem Beispiel geht die Strömung von laminar nach turbulent über.

Dies geschieht z.B. bei höherer Geschwindigkeit. Die Charakterisierung von turbulenten Strömungen gehört ins Gebiet der nichtlinearen Dynamik und kann in diesem Zusammenhang nicht diskutiert werden.

2.9.2 Kontinuitätsgleichung

Geschwindigkeiten in bewegten Flüssigkeiten beschreiben den Transport von Materie. Lokal kann dieser Transport durch die Massenstromdichte

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

quantifiziert werden.

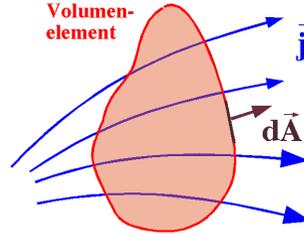


Abbildung 2.108: Massenbilanz für ein Volumenelement.

Wir betrachten die Änderung der Masse in einem Volumen V aufgrund der Zu- und Abflüsse. Der Anteil des Massenstroms dm/dt durch ein kleines Flächenelement $d\vec{A}$ ist

$$\frac{d\delta m}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{A} = |\vec{j}| dA \cos \alpha,$$

wobei α den Winkel zwischen der Fließrichtung und der Oberflächennormalen darstellt. Durch Integration über die geschlossene Oberfläche ergibt die gesamte Änderung der Masse im Volumen pro Zeiteinheit als

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \int_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0,$$

da Masse weder erzeugt noch vernichtet wird. Die Gleichung besagt einfach, dass die Summe der Zu- und Abflüsse verschwinden muss. Sie kann über den Satz von Gauß

$$\iint_O \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \text{div} \vec{v}.$$

(die Integralgrenzen sind $O =$ Oberfläche und $V =$ Volumen) auch geschrieben werden als

$$\text{div} \vec{v} = 0,$$

da die Gleichung für beliebige Volumina V gelten muss. Dies ist eine Bedingung für das Geschwindigkeitsfeld: es enthält weder Quellen noch Senken.

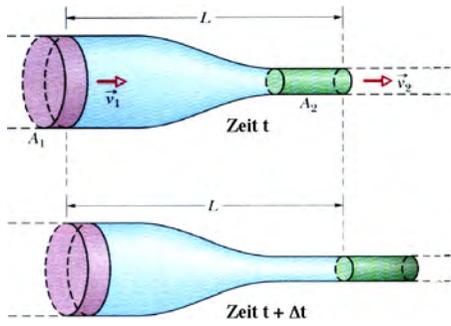


Abbildung 2.109: Transport eines Volumenelementes in einer laminaren Strömung.

Diese Aussage gilt für beliebige Körper. Wir können z.B. einen Flusslauch betrachten, der auf der Außenseite von Flusslinien begrenzt wird ($\vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$) und an den Stirnflächen von zwei Scheiben mit Flächen A_1 und A_2 . Da die Seitenwände durch Flusslinien gebildet werden, fließt kein Material durch diesen Teil der Oberfläche. Damit sind Ein- und Ausfluss gegeben durch die Durchflussmenge durch die beiden Flächen links und rechts.

Die Flüssigkeitsmenge, welche pro Zeiteinheit durch eine Stirnfläche fließt, ist proportional zum Produkt aus Querschnittsfläche und Fließgeschwindigkeit $v dm = \rho A v$, da die Geschwindigkeit senkrecht auf der Fläche steht. Bei konstanter Dichte kann die Massenbilanz somit geschrieben werden als

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

oder

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}.$$

Dies entspricht der Quantifizierung der oben gemachten Aussage, dass nahe beieinander liegende Stromlinien hohe Geschwindigkeiten markieren und geringe Stromliniendichte einer langsamen Geschwindigkeit entspricht.

Für kompressible Flüssigkeiten muss die Gleichung um die Dichte erweitert werden:

$$v_1 \rho_1 A_1 = v_2 \rho_2 A_2.$$

Für wirbelfreie Strömungen kann man das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r})$ als Gradient eines Geschwindigkeitspotenzials $\phi(\vec{r})$ schreiben:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \text{grad } \phi(\vec{r}).$$

Solche Strömungen werden deshalb auch als Potenzialströmungen bezeichnet.

2.9.3 Bernoullische Gleichung

Wir betrachten eine Strömung in einem Rohr, das sich verengt. Die Zunahme der Geschwindigkeit aufgrund der Verengung bedeutet für die Flüssigkeitselemente eine Beschleunigung. Die dafür notwendige Kraft stammt aus einer Druckdifferenz.

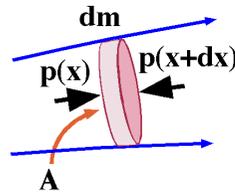


Abbildung 2.110: Druckkraft auf dünne Flüssigkeitsscheibe.

Wir betrachten eine dünne Scheibe der Flüssigkeit. Die Masse des Zylinders mit Querschnittsfläche A und Dicke dx beträgt

$$dm = \rho A dx.$$

Das Newton'sche Axiom für dieses Flüssigkeitselement lautet

$$dF = -A dp = a dm = (\rho A dx) \frac{dv}{dt}.$$

Hier bezeichnet $dp = p(x+dx) - p(x)$ die (infinitesimale) Druckdifferenz, a die Beschleunigung und ρ die Dichte der Flüssigkeit. Offenbar ist die Beziehung unabhängig von der Querschnittsfläche

$$-dp = \rho v dv.$$

Integration zwischen zwei Punkten 1 und 2 ergibt

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

oder

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

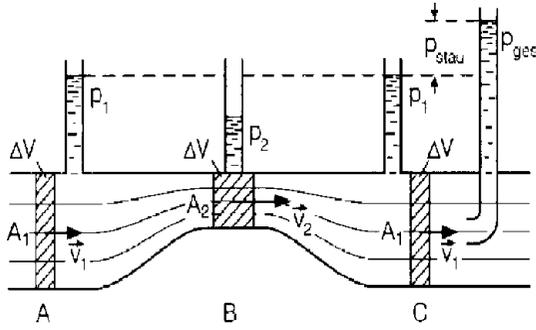


Abbildung 2.111: Herleitung der Bernoulli-Gleichung.

Offenbar wird eine Zunahme der Geschwindigkeit (Zunahme der kinetischen Energie) durch eine Abnahme des Druckes (Reduzierung der potenziellen Energie) kompensiert.

Die Größe $\frac{1}{2}\rho v^2$ hat die Dimension eines Druckes und wird als Staudruck bezeichnet. Offenbar ist die Summe aus statischem Druck und Staudruck für eine reibungsfreie Flüssigkeit konstant. Man bezeichnet dies als Gesamtdruck und schreibt

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_{ges}$$

für eine reibungsfreie Flüssigkeit.



Abbildung 2.112: Daniel Bernoulli (1700-1782)

Dies wird als die Bernoullische Gleichung bezeichnet (nach Daniel Bernoulli, 1700-1782).

2.9.4 Druckänderung in einer Strömung

Geeignete Druckmessgeräte können diese unterschiedlichen Beiträge messen. Die Drucksonde

Bezeichnung	Drucksonde	Pitot-Rohr	Prandtl'sches Staurohr
Skizze			
Meßgröße	statischer Druck	statischer Druck und Staudruck	Staudruck, Strömungsgeschwindigkeit
Berechnungsformel	$p = p_{stat}$	$p_{ges} = p_{stat} + \frac{\rho v^2}{2}$	$p_{ges} = \frac{\rho v^2}{2}$ $v = \sqrt{\frac{2p_{stau}}{\rho}}$

Abbildung 2.113: Druckmessung

misst den statischen Druck, während das Pitot-Rohr den Gesamtdruck misst. Das Prandtl'sche Staurohr besitzt zwei Öffnungen für den statischen und den Gesamtdruck, welche auf unterschiedlichen Seiten der Flüssigkeit angeordnet sind. Die Höhendifferenz ist dann direkt proportional zum Staudruck.

Exp. 82: Bernoulli

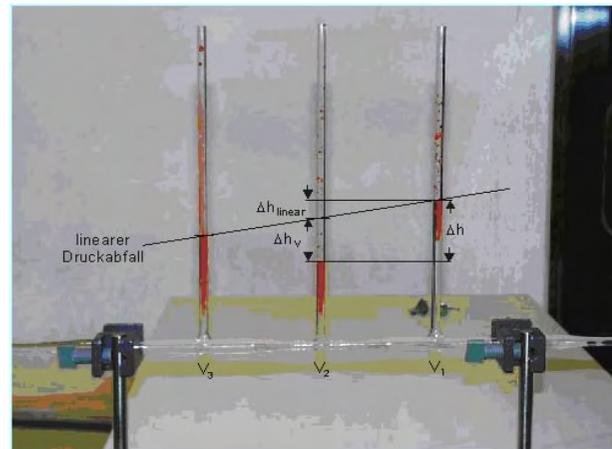


Abbildung 2.114: Experimentelle Verifizierung der Bernoulli-Gleichung.

Die Voraussagen der Bernoulli Gleichung können experimentell leicht überprüft werden. Wir verwenden dafür ein Rohr, das in der Mitte verengt ist, an beiden Enden aber den gleichen (größeren) Querschnitt zeigt. In den beiden äußeren Röhren steigt

das Wasser höher; an dieser Stelle ist offenbar der statische Druck höher als in der Mitte, wo das Wasser schneller fließt. Da die Strömung im Experiment nicht reibungsfrei ist findet man zusätzlich zum Staudruck auch einen linearen Druckabfall, welcher die Reibungsverluste enthält.

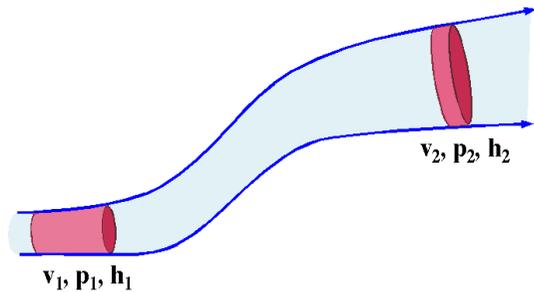


Abbildung 2.115: Beitrag des Schweredrucks zur Bernoulli-Gleichung.

Eine etwas allgemeinere Form erhält man, wenn man zusätzlich den Schweredruck berücksichtigt. Dann ist der Gesamtdruck zusätzlich von der Höhe abhängig; er beträgt dann

$$p_0 + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_{ges}.$$

Insgesamt sind beide Formen der Bernoulli-Gleichung Ausdrücke der Energieerhaltung: jeder Term stellt eine Energiedichte, d.h. Energie pro Volumen dar; der erste enthält die elastische Energie, der zweite die potenzielle Energie der Gravitation, der dritte die kinetische Energiedichte.

2.9.5 Demonstrationen zur Bernoulli-Gleichung

Einige interessante Konsequenzen können leicht demonstriert werden.

Exp. 83: Bernoulli Anwendungen

Bläst man durch ein Loch in einer Platte auf eine zweite Platte so dass das Gas zwischen den beiden Platten entweichen muss, so erzeugt die hohe Geschwindigkeit des Gases zwischen den beiden Platten einen Unterdruck, welcher stark genug ist, das

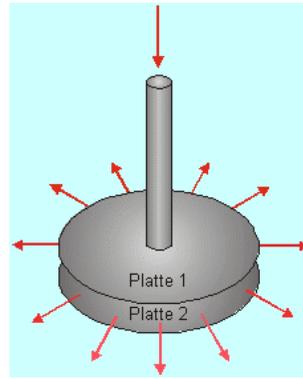


Abbildung 2.116: Strömung zieht Platte an.

Gewicht der Platte zu halten und die Kraft zu überwinden, welche durch die Impulsänderung des strömenden Gases auf die freie Platte ausgeübt wird.

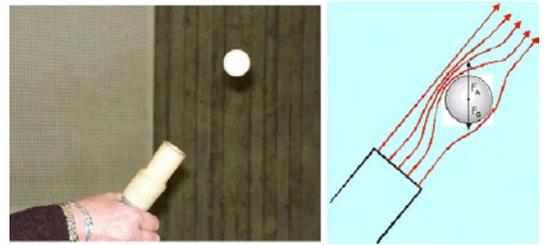


Abbildung 2.117: Tanzender Pin-Pong Ball.

Bläst man auf einen Pingpong Ball schräg nach oben, so fällt er nicht zu Boden sondern gelangt in eine Gleichgewichtsposition etwas unterhalb der Mitte des Luftstrahls: an dieser Stelle ist die Geschwindigkeit des Gases oberhalb etwas größer als unterhalb, so dass eine Auftriebskraft wirkt, welche groß genug ist, die Gewichtskraft zu kompensieren.

Verwendet man einen Trichter so kann man sogar nach unten auf den Ball blasen; da die Luft sich oberhalb des Balls schneller bewegt als unten fällt er nicht zu Boden.

2.9.6 Viskosität

Eine Flüssigkeit bewegt sich nie widerstandsfrei.

Der Strömungswiderstand kommt aufgrund von Reibungswiderstand und Druckwiderstand zustande. Der zweite Effekt kann vor allem auf Verwirbelungen zurückgeführt werden.

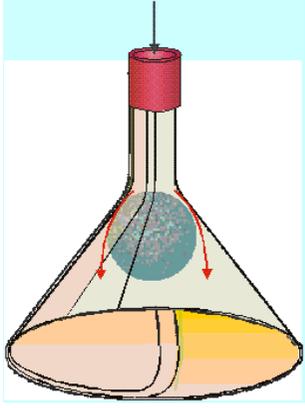


Abbildung 2.118: Ping-Pong Ball in einem Trichter.

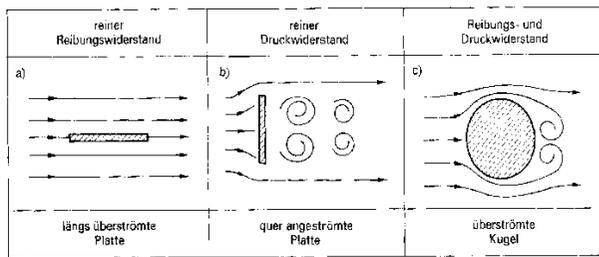


Abbildung 2.119: Widerstand in einer Flüssigkeit.

Der Reibungswiderstand ist in jeder Flüssigkeit vorhanden. Für viele Substanzen kann er beschrieben werden als eine Kraft

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dx}. \quad [\eta] = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$$

Diese ist proportional zur Fläche A auf der die Reibung stattfindet, und zur Änderung dv/dx der Geschwindigkeit mit der Entfernung x von der Oberfläche. Gilt diese Beziehung nicht, so spricht man von nicht-Newton'schen Flüssigkeiten. Während statische Scherkräfte in Flüssigkeiten verschwinden treten sie in der Form dynamischer Kräfte bei nicht verschwindender Viskosität auf. Diese quantifiziert somit die Scherkräfte in einem fluiden Medium. Bei sehr hoher Viskosität (Glas) verhält sich eine Flüssigkeit praktisch wie ein Festkörper.

Die Proportionalitätskonstante η zwischen Kraft und Fläche mal Geschwindigkeitsgradient wird als Viskosität oder Zähigkeit bezeichnet. Neben der SI-Einheit $\text{N s} / \text{m}^2$ wird häufig auch noch die ältere Einheit Poise ($= 0.1 \text{ N s} / \text{m}^2$) verwendet. Sie stellt

eine Materialeigenschaft dar, welche stark von der Temperatur abhängt.

Die Viskosität von Wasser und ähnlichen Flüssigkeiten liegt bei etwa $10^{-3} \text{ N s m}^{-2}$, die Werte für Gase etwa hundertmal niedriger; da die Dichte von Luft etwa 1000 mal niedriger ist als die von Wasser, ist aber die Viskosität pro Masse bei Luft größer als bei Wasser.

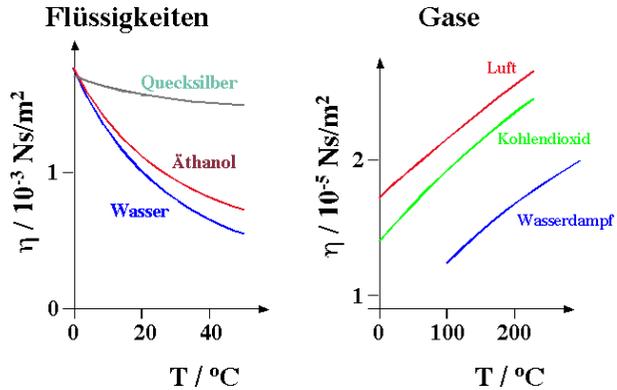


Abbildung 2.120: Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Flüssigkeiten und Gasen.

Die Viskosität von Flüssigkeiten nimmt mit steigender Temperatur ab, da dann die molekularen Bindungen gegenüber der Bewegung der Moleküle an Bedeutung verlieren. Das Extrembeispiel dafür ist Glas, wo die Viskosität beim Abkühlen kontinuierlich um viele Größenordnungen zunimmt.

Die Viskosität von Gasen nimmt dagegen mit steigender Temperatur zu, da sie auf der Bewegung von Molekülen beruht, welche mit der Temperatur steigt.

2.9.7 Die Reynolds-Zahl

Die Viskosität spielt auch eine wichtige Rolle bei der Charakterisierung von Strömungen. So wird der Übergang von laminaren zu turbulenten Strömungen oder die Art des Strömungswiderstandes durch das Verhältnis aus kinetischer Energie zu Reibungsenergie beeinflusst. Ist dieses Verhältnis gleich so spricht man von ähnlichen Strömungen.

Ob zwei Strömungen ähnlich sind kann man einfach anhand der dimensionslosen Reynolds-Zahl (nach

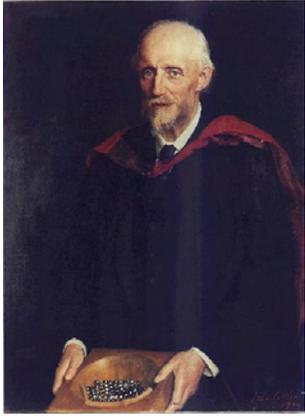


Abbildung 2.121: Osborne Reynolds (1842 - 1912)

Osborne Reynolds, 1842-1912) bestimmen:

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta}. \quad [Re] = 1$$

Hier stellen ρ und η die Dichte und Viskosität des Mediums, v die Strömungsgeschwindigkeit und d eine typische Dimension des Körpers dar.

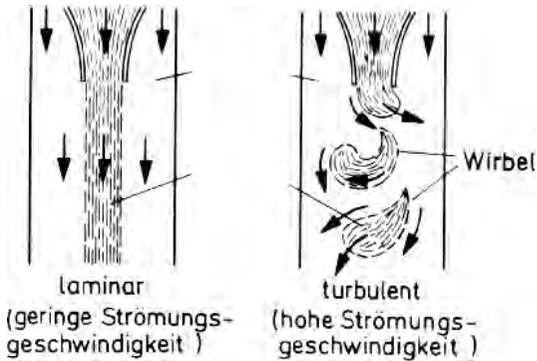


Abbildung 2.122: Einsetzen von Turbulenz.

Bei kleinen Geschwindigkeiten (und damit kleinen Reynolds-Zahlen) sind Strömungen laminar, bei großen Reynolds-Zahlen werden sie turbulent.

2.9.8 Strömungswiderstand

Die viskose Reibungskraft wirkt als Bremskraft für die Flüssigkeit und führt gleichzeitig dazu, dass strömende Flüssigkeiten eine Kraft auf den Behälter oder den umströmten Körper ausüben. Man schreibt

diese geschwindigkeitsproportionale Kraft als

$$F_R = -kv. \quad [k] = \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

Die Proportionalitätskonstante k wird als Widerstandsbeiwert bezeichnet. Sie beträgt z.B. für eine Kugel mit Radius r

$$k_K = 6\pi\eta r.$$

Dies wird als Stokes'sches Reibungsgesetz bezeichnet.

Fällt eine Kugel durch ein viskoses Medium, so erreicht sie eine gleichförmige Geschwindigkeit wenn sich die Schwerkraft und die Reibung aufheben:

$$F_G = g(\rho_k - \rho_{fl}) \frac{4\pi}{3} r^3 = 6\pi\eta r v = F_R.$$

Dies ist offenbar der Fall wenn

$$v = g(\rho_k - \rho_{fl}) \frac{4\pi r^3}{6\pi\eta r} = \frac{2}{9} \frac{r^2 g}{\eta} (\rho_k - \rho_{fl}).$$

Die Bestimmung der Sinkgeschwindigkeit einer Kugel ist deshalb eine der Möglichkeiten, die Viskosität einer Flüssigkeit zu bestimmen.

2.9.9 Rohrdurchfluss

In einem Rohr führt der Strömungswiderstand dazu, dass der Druck in einem System nicht gleichmäßig verteilt ist, sondern abfällt in Richtung der Strömung. Der Strömungswiderstand beschränkt deshalb auch den Durchfluss durch ein Rohr.

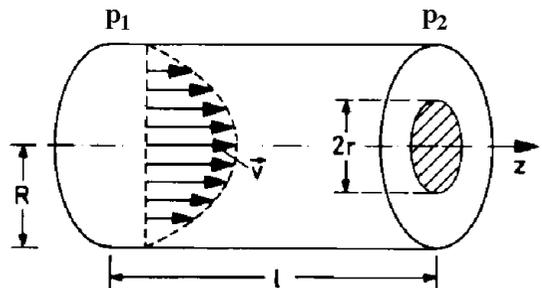


Abbildung 2.123: Rohrdurchfluss

Um den Durchfluss zu berechnen teilt man das Flüssigkeitsvolumen in konzentrische Zylinder ein. Die

Flüssigkeitskomponenten in der Nähe der Rohroberfläche werden durch die Reibung am stärksten gebremst und bewegen sich deshalb am langsamsten; die Komponenten in der Mitte werden am wenigsten gebremst und bewegen sich am schnellsten. Auf einen Flüssigkeitszylinder mit Radius r wirkt die Reibungskraft an seiner Außenwand

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dr} = \eta 2\pi r l \frac{dv}{dr}.$$

Diese muss kompensiert werden durch eine Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_1$, welche von außen erzeugt werden muss, um die Strömung aufrecht zu erhalten. Die Druckkraft auf diesen Zylinder beträgt

$$F_p = -\Delta p \pi r^2.$$

Im dynamischen Gleichgewicht sind die beiden Kräfte entgegengesetzt und gleich groß, so dass

$$\eta 2\pi r l dv = \Delta p \pi r^2 dr$$

oder

$$dv = \frac{\Delta p}{2\eta l} r dr.$$

Die Randbedingung ist, dass die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Rohrs verschwindet, $v(r = R) = 0$. Damit ergibt die Integration

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (r^2 - R^2).$$

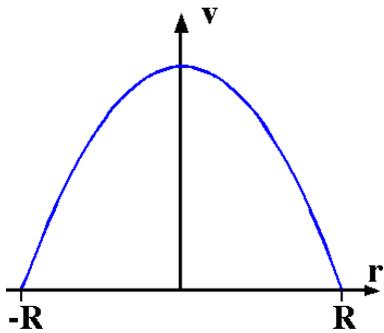


Abbildung 2.124: Geschwindigkeitsprofil.

Δp beschreibt die Druckänderung; da der Druck in Fließrichtung abfällt ist die Druckänderung $\Delta p < 0$. Die Geschwindigkeit wird deshalb bei $r = 0$ maximal und fällt mit dem Abstand vom Zentrum des Rohrs parabolisch ab.

2.9.10 Das Gesetz von Hagen-Poiseuille

Der Maximalwert der Geschwindigkeit beträgt (in der Mitte des Rohrs)

$$v_{max} = v(0) = -\frac{\Delta p}{4\eta l} R^2.$$

Sie ist somit positiv wenn Δp negativ ist, d.h. der Druck abfällt.

Die mittlere Geschwindigkeit erhält man als

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \frac{\Delta p}{4\eta l} \int_0^R (r^2 - R^2) 2\pi r dr = \\ &= \frac{\Delta p}{2R^2 \eta l} \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^2 R^2}{2} \right]_0^R = \\ &= -\frac{\Delta p}{2R^2 \eta l} \frac{R^4}{4} = -\frac{\Delta p R^2}{8\eta l} = \frac{v_{max}}{2}. \end{aligned}$$

Der gesamte Durchfluss durch das Rohr beträgt demnach

$$I = \bar{v} A = -\frac{\Delta p \pi R^4}{8\eta l}.$$

Dies ist bekannt als das Gesetz von Hagen-Poiseuille: Der Durchfluss durch ein gerades Rohr ist proportional zur vierten Potenz des Rohrradius, zum Druckabfall $\Delta p/l$ und invers proportional zur Viskosität η .

Exp. 84: Hagen-Poiseuille

Im Experiment wird der konstante Wasserdruck dadurch erzeugt, dass bei sinkender Flüssigkeitssäule ein abnehmender Luftdruck über der Flüssigkeit steht: es wird nur soviel Luft nachgezogen, dass am unteren Ende des Rohres gerade der Druck p_0 , d.h. der atmosphärische Außendruck entsteht. Es wird die Flüssigkeitsmenge gemessen, welche in 30 Sekunden durch jeweils ein Rohr mit gegebenem Querschnitt fließt. Das Verhältnis der beiden Rohrinne Durchmesser beträgt 0.8 / 1.5 mm; wir erwarten somit ein Verhältnis der Flüssigkeitsmengen von

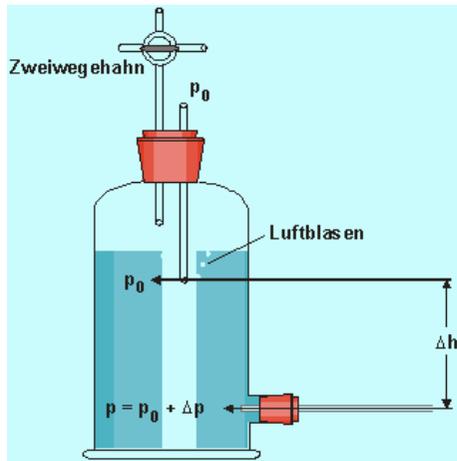


Abbildung 2.125: Flussmenge vs. Druck.

$(1.5/0.8)^4 = 12.4$. Experimentell finden wir ein Verhältnis von ca. 12.

Die Druckdifferenz, welche benötigt wird, um eine mittlere Geschwindigkeit durch das Rohr zu erzielen, beträgt

$$\Delta p = -\bar{v} \frac{8\eta l}{R^2},$$

d.h. sie sinkt mit der Querschnittsfläche des Rohrs, während die Durchflussmenge ansteigt. Im statischen Grenzfall ($v \rightarrow 0$) verschwindet der Druckabfall, wir erhalten das hydrostatische Gleichgewicht.

Daraus können wir auch den Widerstandsbeiwert für die Strömung durch das Rohr berechnen als

$$k = \frac{F}{\bar{v}} = \Delta p \pi \frac{R^2}{\bar{v}} = 8\eta l \pi.$$

Er hängt somit nur von der Viskosität des Mediums und der Länge der Rohres ab. Die zunehmende Oberfläche wird gerade kompensiert durch den kleineren Gradienten der Geschwindigkeit.

2.9.11 Strömende Gase (Ärodynamik)

Bei der Diskussion der Strömung von Gasen muss zusätzlich die Kompressibilität berücksichtigt werden. Qualitativ bleiben die bisher diskutierten Ergebnisse jedoch erhalten. Quantitative Ergebnisse sollen hier auch nicht erhalten werden.

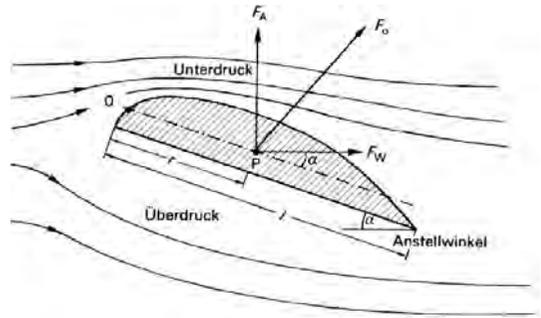


Abbildung 2.126: Auftrieb an einem Flugzeugflügel.

So kann z.B. der Auftrieb eines Flugzeugflügels mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung diskutiert werden: Auf der Oberseite ist die Geschwindigkeit höher und darum der Druck geringer als auf der Unterseite. Die gesamte am Flügel angreifende Kraft besteht aus der Auftriebskraft und der Widerstandskraft, welche mit Hilfe eines Motors überwunden wird.

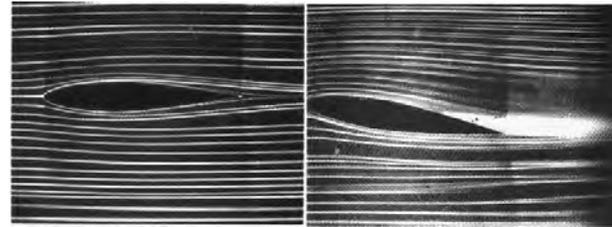


Abbildung 2.127: Strömungsabriss.

Voraussetzung für diesen Effekt ist eine laminare Strömung. Macht man den Anstellwinkel zu groß so wird die Strömung am hinteren Ende des Flügels turbulent. Damit wird die Geschwindigkeit geringer und der Druck höher, so dass der Auftrieb "abbricht". Man spricht vom Strömungsabriss.

Simulationen

Da es auf diesem Gebiet häufig nicht mehr möglich ist, analytische Lösungen zu erhalten, haben numerische Simulationen große Bedeutung erhalten.

Ähnliche Strömungsprofile findet man auch bei Segelbooten oder Windsurfern.

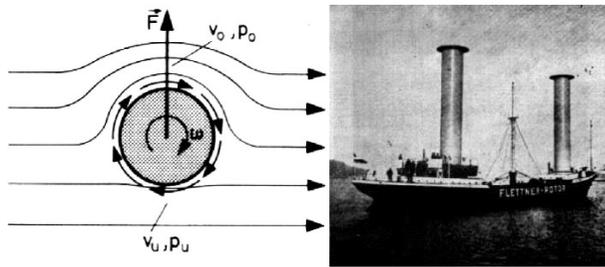


Abbildung 2.128: Der Flettner Rotor

Eine etwas andere Anwendung des Bernoulli'schen Prinzips verwendet der Flettner-Rotor, der z.T. für Segelschiffe verwendet wurde. Das zu Grunde liegende Prinzip wird als Magnus Effekt bezeichnet. Das Schiff verwendet senkrecht stehende Zylinder, welche um ihre Achse rotieren.

Von der Seite anströmende Luft fließt dann aufgrund der Oberflächenreibung bevorzugt in Drehrichtung im den Zylinder. Auf der Vorderseite ist deshalb die Strömungsgeschwindigkeit größer und der statische Druck geringer. Das Schiff erhält damit eine Kraft in Vorwärtsrichtung.

Exp. 83b: Flettner-Rotor

Im Experiment wird dazu eine Kunststoffrolle wie ein Jojo an einer Schnur fallengelassen, so dass sie sich dabei dreht. Dadurch erhält man die Kombination von Drehung und Relativgeschwindigkeit, welche für den Magnus-Effekt benötigt werden: die Rolle fällt in einem Bogen.

Bei der Behandlung von Strömungen in Gasen muss außerdem auch die endliche Schallgeschwindigkeit berücksichtigt werden. Diese liegt in Gasen niedriger und kann (aufgrund des geringeren Widerstandes) leichter erreicht werden. In der Nähe und oberhalb der Schallgeschwindigkeit verhalten sich Fluide qualitativ anders als unterhalb. Das Verhältnis von Geschwindigkeit v zu Schallgeschwindigkeit v_S wird durch die dimensionslose Mach'sche Zahl

$$M = \frac{v}{v_S}$$

gemessen.