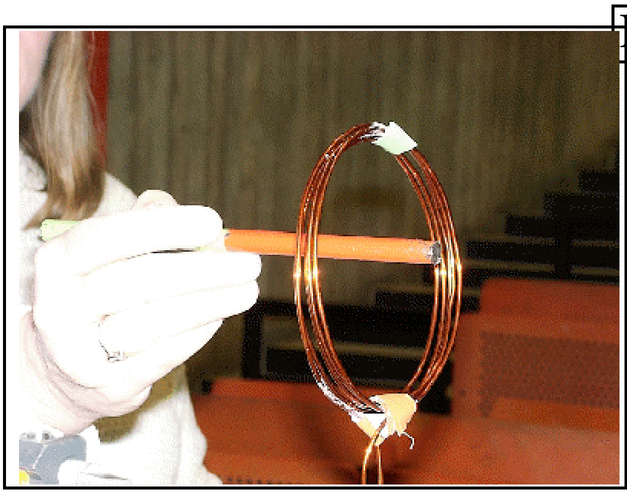
3.7 Zeitabhängige Felder und Ströme

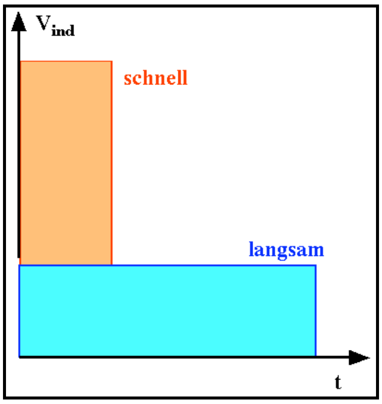
3.7.1 Magnetischer Fluss, magnetische Flussdichte



Exp. 54: Induktion einer Spannung

Hält man eine Leiterschleife in ein Magnetfeld und zieht sie heraus, so wird im Leiter ein Spannungsstoß induziert.

Wird die Bewegung schneller durchgeführt so wird der Spannungsstoß kürzer, aber intensiver; die Fläche



$$\int U(t)\,dt$$

bleibt konstant. Aus einer Reihe von Experimenten dieser Art findet man, dass dieses Integral gegeben ist durch die Änderung des magnetischen Flusses,

$$\int U(t)\,dt = \Delta\Phi \,. \qquad [\Phi] = \mathrm{Vs} = \mathrm{Wb} = \mathrm{Weber}$$

Die Einheit Weber bezieht sich auf Wilhelm Weber (1804-1891). Die magnetische Flussdichte B ist dementsprechend definiert als

$$B = d\Phi/dA \qquad [B] = \mathrm{Vs/m^2} = \mathrm{T} = \mathrm{Tesla}\,.$$

Die Einheit Tesla erinnert an Nikola Tesla (1856-1943).

Der magnetische Fluss durch eine Fläche A ist definiert als das Integral

Z: Fluss

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B\, dA \cos\theta\,,$$

d.h. nur die Komponente der Flussdichte senkrecht zur Fläche trägt bei. Bildlich kann man sich den Fluss als die Summe aller Feldlinien ausrechnen, welche die Fläche A durchstoßen.

Die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ und das Magnetfeld $\vec{H}$ sind im Vakuum direkt proportional:

$$\vec{B} = \mu_r\, \mu_0\, \vec{H}\,. \qquad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \approx 1.257 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\,.$$

Die Proportionalitätskonstante μ_0 wird als magnetische Feldkonstante oder Permeabilität des Vakuums bezeichnet. In einem Material wird die Permeabilität des Vakuums mit der relativen Permeabilität μ_r multipliziert.

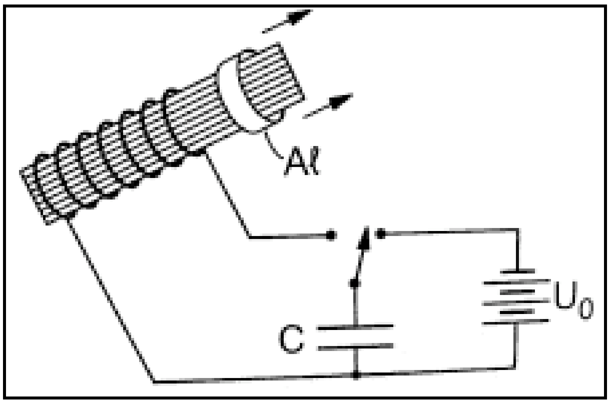
3.7.2 Lenz'sche Regel

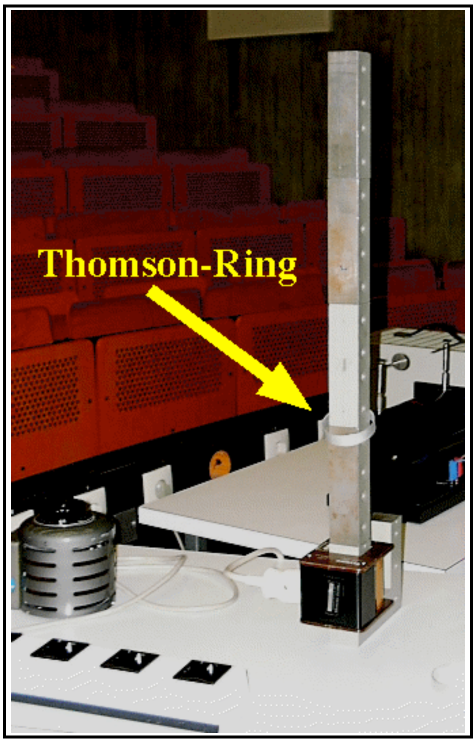
Z: Magnet, induzierter Dipol

Aus den bisher gezeigten Experimenten geht das Vorzeichen der induzierten Spannung nicht hervor. Aus der Messung der Spannung können wir lediglich erkennen, dass in der Leiterschleife ein Strom erzeugt wird, welcher entsprechend einen magnetischen Dipol erzeugt. Die Orientierung dieses Dipols ist aus den bisherigen Experimenten nicht hervorgegangen. Er könnte entweder gleich orientiert sein wie der Magnet, der ihn erzeugt, oder umgekehrt.

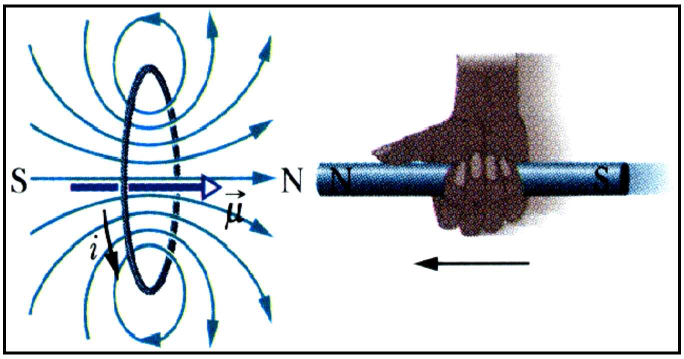
Exp. 69a Thomson Ring

Für die Klärung dieser Frage verwenden wir den Thomson-Ring:





Eine Leiterspule aus Aluminium wird um einen Eisenkern gelegt, in dem mit Hilfe einer Induktionsspule ein wechselndes Magnetfeld erzeugt wird. Man beobachtet, dass die Spule schwebt. Somit wird sie vom Magneten, der den Strom induziert, abgestoßen.



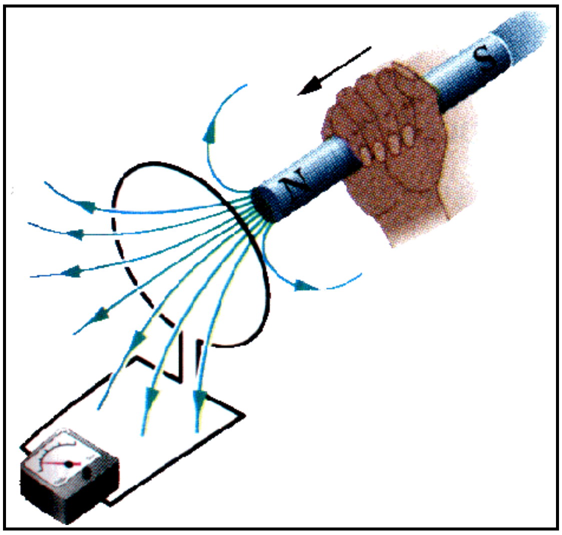
Daraus folgt, dass der induzierte Magnet dem erzeugenden Magneten entgegengerichtet ist. Dieses Resultat ist allgemein als "Lenz'sche Regel" bekannt: Die induzierte Spannung wirkt ihrer Ursache entgegen. Im Falle einer Leiterschleife erzeugt die Spannung einen Strom, welcher eine Änderung des Feldes verringert: Wird der Magnet in die Spule hineingeschoben so schwächt der induzierte Strom dieses Feld ab; wird er herausgezogen, so verstärkt der induzierte Strom das Feld, d.h. er versucht eine Abschwächung zu verringern. Der induzierte Dipol erzeugt in beiden Fällen eine Kraft, welche überwunden werden muss wenn der Magnet in die Leiterschleife hinein geschoben wird.

Das Vorzeichen kann in die Beziehung eingebracht werden indem man schreibt

$$\int U(t)\, dt = - \Delta\Phi \ .$$

Hier wird die Spannung entsprechend der "rechte Hand Regel" gemessen: zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung zunehmendem Potenzial, so zeigen die Finger in Richtung der Feldlinien des induzierenden Magneten.

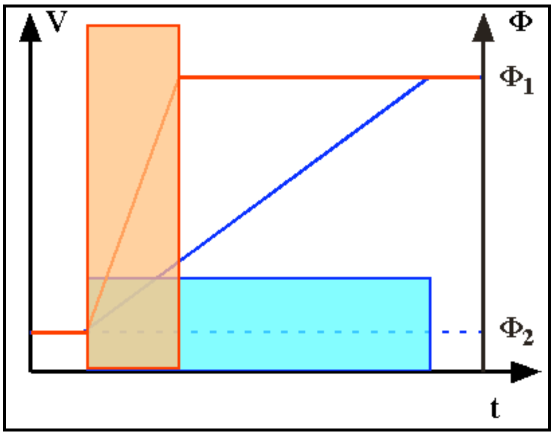
3.7.3 Induktionsgesetz



Eine nützlichere Schreibweise für die Beziehung zwischen Flussänderung und induzierter Spannung ist die differentielle Form

$$U_{ind} = - N \frac{d\Phi}{dt} \ ,$$

wobei N die Anzahl der Windungen darstellt. Die Änderung des Flusses kann sowohl durch eine Änderung der Flussdichte wie auch durch eine Änderung der Flächengröße oder der relativen Orientierung von Feld und Leiterschleife zustande kommen.



Steigt der Fluss durch die Leiterschleife linear mit der Zeit so misst man eine Spannung, die während dieser Zeit konstant ist. Je schneller das Magnetfeld steigt, desto höher ist die Spannung. Das Integral $\int U\, dt$, in diesem Fall $U\, \Delta t$, ist jedoch unabhängig von der Rate und nur durch die Flussdifferenz $\Delta\Phi$ zwischen Anfangs- und Endwert gegeben,

$$\int U\, dt = \Phi_2 - \Phi_1 \ .$$

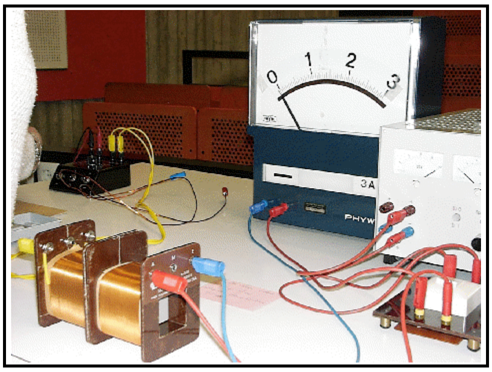
Dieser Ausdruck entspricht der Integralform der obigen Formel.

Die Änderung $d\Phi/dt$, resp. $\Phi_2 - \Phi_1$ des magnetischen Flusses kann auf unterschiedliche Weisen erhalten werden. Wir beschränken uns hier auf den einfachen Fall, dass das Magnetfeld homogen ist. Dann erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel

$$d\Phi/dt = d/dt(B\ A \cos\theta) = dB/dt\ A \cos\theta + dA/dt\ B \cos\theta - B\ A \sin\theta\ d\theta/dt \ .$$

Hier stellt A die Fläche der Leiterschleife und θ den Winkel zwischen Feldrichtung und Flächennormaler dar. Somit existieren drei Möglichkeiten um eine Spannung zu induzieren: Man kann

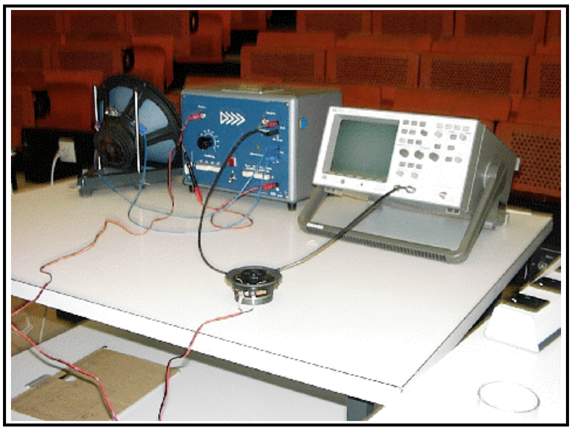
- die Flussdichte ändern. Dies wird typischerweise mit einem Elektromagneten erreicht. Das Prinzip wird vor allem im Transformators verwendet, der in Kapitel 3.6.9 im Detail behandelt wird. Anhand dieses Beispiels kann auch gezeigt werden, dass die induzierte Spannung durch die Änderung der magnetischen Flussdichte B und nicht durch die Änderung des magnetischen Feldes H bestimmt ist: wenn wir einen Eisenkern in die Primärspule einschieben steigt die Flussdichte und damit die induzierte Spannung um μ_r an.



Z: Lautsprecher / Mikrophon

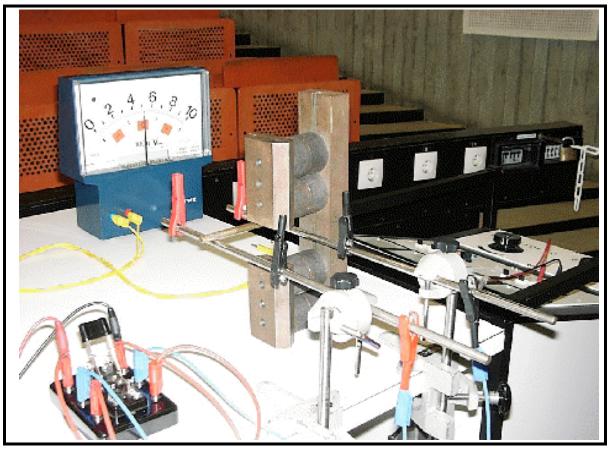
Eine etwas andere Möglichkeit, die Flussdichte zu ändern, basiert auf dem vorher gezeigten qualitativen Experiment, dass man einen Magneten mehr oder weniger weit in die Leiterschleife hinein schiebt.

Exp. 60a Lautsprecher / Mikrofon

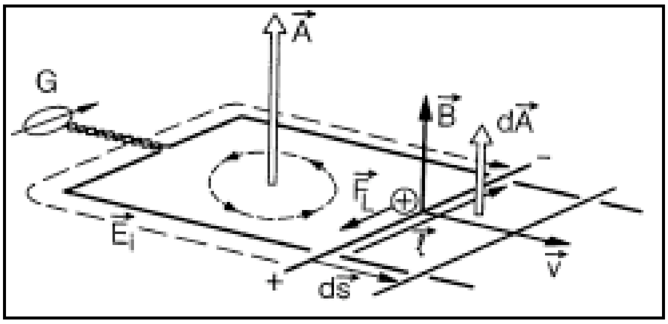


In einem Lautsprecher wird die Kraft, welche ein Elektromagnet auf einen darin enthaltenen Permanentmagneten ausübt, verwendet um eine mechanische Bewegung der Membran zu erzeugen. Man kann einen Lautsprecher aber auch umgekehrt verwenden: die Membran nimmt akustische Schwingungen auf, überträgt sie auf den Magneten, und wenn dieser weiter in die Leiterschleife hineingedrückt wird, induziert er eine Spannung.

- die Größe der Schleife ändern. Man kann dies natürlich durch Deformation einer Kupferschleife erreichen.

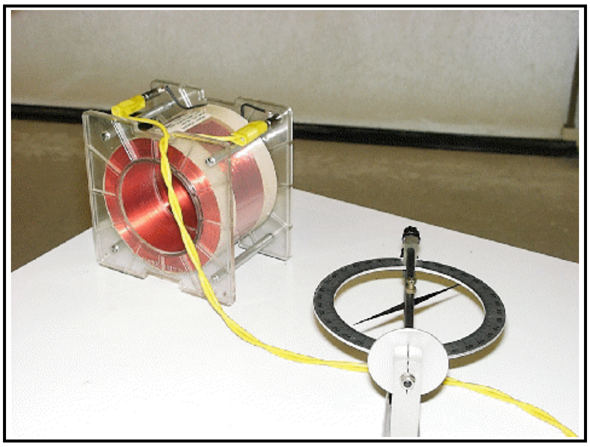


Eine andere Variante besteht darin, eine Leiterschleife zu verwenden, welche aus zwei festen und einem rollenden Kupferstab gebildet wird. Ein Permanentmagnet sorgt für den Fluss durch diese Spule.



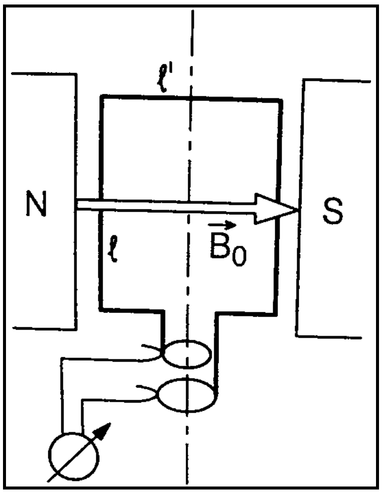
Dieses Experiment kann auch anders interpretiert werden: Man bewegt den Leiter der Länge ℓ durch das Magnetfeld; dabei werden die darin enthaltenen Ladungsträger durch die Lorentzkraft zur Seite gedrückt, so, dass eine Spannung entsteht, welche gerade die Lorentzkraft kompensiert.

- Als dritte Möglichkeit kann man die Orientierung der Schleife bezüglich dem Magnetfeld ändern. Im Experiment verwenden wir eine Spule, die eine große Anzahl Windungen aufweist. Damit ist es möglich, sogar im Erdmagnetfeld eine leicht messbare Induktionsspannung zu erzeugen. Dieser Fall entspricht dem eines Generators in einem Kraftwerk.



Den zweiten und dritten Fall kann man zusammenfassen als eine Änderung $d\vec{A}/dt$.

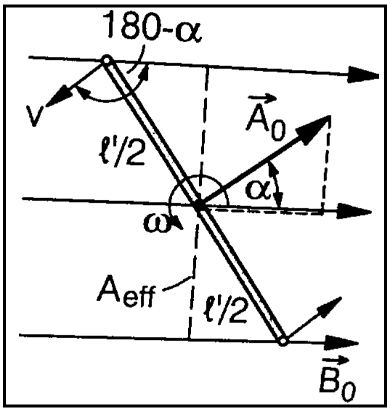
3.7.4 Wechselstromgenerator



Wir betrachten den dritten Fall etwas genauer; er stellt die Grundlage für die Erzeugung von Strom in Kraftwerken dar. Wir betrachten hier eine rechteckige Schleife mit Seitenlängen ℓ, ℓ', welche sich um eine Achse senkrecht zum Magnetfeld dreht. Die induzierte Spannung beträgt

$$U_{ind} = - d\Phi/dt = - d/dt\,(\vec{B}_0 \cdot \vec{A})\,.$$

Wir gehen davon aus, dass sowohl B_0 wie auch A konstant sind.



Hingegen soll die Orientierung von $\vec{A}$ sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω ändern. Damit wird

$$U_{ind} = - d/dt\,(B_0\, A \cos \omega t) = B_0\, A\, \omega\, \sin \omega t\,.$$

Man erhält also eine Spannung, die sinusförmig variiert. Dieser Effekt ist die Grundlage für elektrische Generatoren. Die elektrische Leistung, die dabei gewonnen wird, muss durch mechanische Arbeit kompensiert werden, welche nötig ist, um den induzierten Dipol im statischen Magnetfeld zu drehen. Dies gilt allgemein, für alle hier vorgestellten Varianten der Induktion: die induzierten Ströme erzeugen ein Magnetfeld, welches der Ursache entgegenwirkt (Lenz'sche Regel). Entsprechend kann man in alle gezeigten Anordnungen nicht nur als Generator, sondern auch umgekehrt als Motor betreiben.

Exp.: rollender Kupferstab

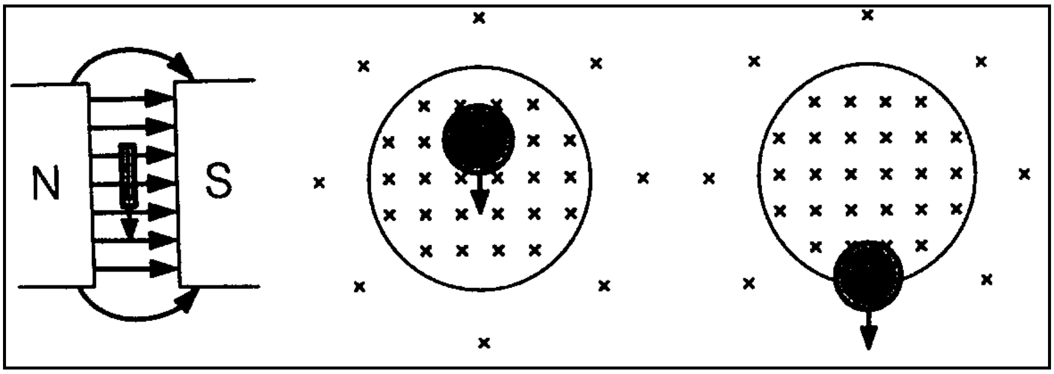
Dies können wir z.B. anhand des rollenden Kupferstabes verifizieren: wird durch die Leiterschleife aus Kupferstäben ein Strom geschickt, so rollt der Kupferstab im Magnetfeld aufgrund der Lorentzkraft. Genau so erzeugt ein Strom durch die deformierte Kupferschleife eine Kraft, welche sie zu einem Kreis biegt.

Im Allgemeinen wird die Leiterschleife mehr als eine Windung umfassen. Dann lautet der allgemeine Ausdruck für die induzierte Spannung

$$U_{ind} = - N \frac{d\Phi}{dt} = N B_0 A \omega \sin(\omega t) .$$

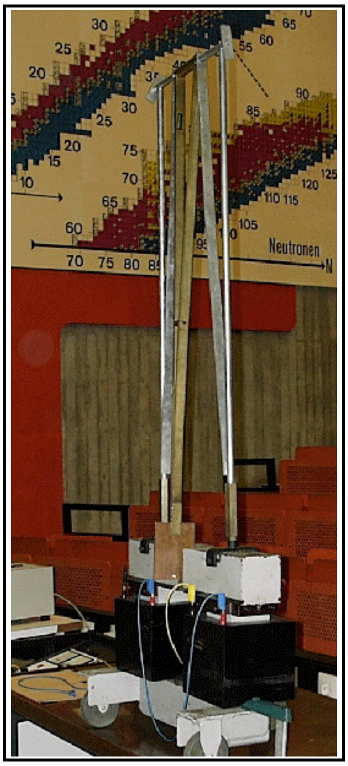
3.7.5 Wirbelströme

Zeitlich variable Magnetfelder, die in elektrische Leiter eindringen, erzeugen dort ebenfalls Ströme, welche Quelle von Magnetfeldern sind. Diese Ströme werden als Wirbelströme bezeichnet. Sie können schädlich sein, wie z.B. in Transformatoren, wo sie für einen Teil der Verluste verantwortlich sind, oder nützlich, wie z.B. in Wirbelstrombremsen, wo sie als verschleißfreie Bremsen dienen.

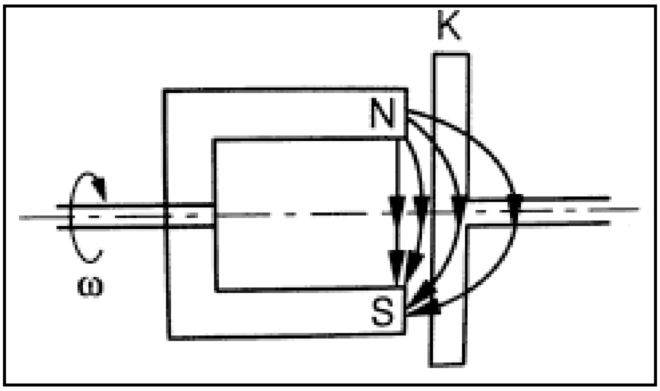


Man kann den Effekt auch zeigen indem man eine Münze durch ein Magnetfeld fallen lässt. Dabei findet man, dass es nur langsam in das Magnetfeld eindringt. Im Magnetfeld fällt sie mit normaler Geschwindigkeit. Am unteren Ende des Magnetfeldes wird es wieder stark verlangsamt. Der Effekt zeigt eine gewisse Analogie zum Meissner-Effekt: Auch hier verzögern die Wirbelströme das Eindringen des Magnetfeldes in das Leitermaterial. Allerdings kann dies für normal leitende Materialien nur eine Verzögerung bewirken, da die Verluste im Leiter ein Abklingen der Oberflächenströme bewirken.

Exp. 64 Waltenhofensches Pendel



Den Effekt der Wirbelstrombremse können wir hier anhand des Waltenhofenschen Pendels zeigen. Dabei schwingt ein Pendel mit einer Kupferplatte als Gewicht zwischen den Polschuhen eines Magneten. Je stärker das Magnetfeld ist, welche hier eingeschaltet wird, desto stärker ist die Bremswirkung. Dieser Effekt verschwindet praktisch völlig, wenn statt einer durchgehenden Kupferplatte eine Kupferplatte mit Schlitzen eingesetzt wird. Die Schlitze eliminieren einen Teil der Wirbelströme und damit die Bremswirkung. Dies wird. u.a. in Transformatoren genutzt: die Eisenkerne in Transformatoren enthalten Schlitze, um Wirbelströme und damit verbundene Verluste zu verringern.



Man kann Wirbelströme auch dazu verwenden, eine verschleißfreie Kupplung zu bauen. Der Hufeisenmagnet dreht sich so, dass die Feldlinien sich in der frei rotierenden Kupferscheibe K bewegen. Dabei werden Wirbelströme induziert, welche die Kupferscheibe in eine Drehbewegung versetzen. Wirbelstrombremsen werden nach dem Prinzip des Waltenhofenschen Pendels konstruiert.

3.7.6 <u>Selbstinduktion</u>

Wird ein elektrischer Leiter von einem variablen Strom durchflossen so erzeugt er ein zeitlich veränderliches Magnetfeld, welches auch im Leiter selbst eine Spannung erzeugt, die der zeitlichen Änderung entgegenwirkt. Dieser Effekt wird als Selbstinduktion bezeichnet. Die Stärke hängt von der Geometrie der Leiter ab. Der Effekt muss vor allem bei der Entwicklung von schnellen Schaltungen berücksichtigt werden, wo er wesentlich zur Beschränkung der Geschwindigkeit beiträgt.

Wir betrachten als Beispiel eine lange zylinderförmige Spule. Hier beträgt das Magnetfeld im Innern

$$H = I\,N/\ell\,.$$

Ändert man den Strom durch die Spule, so induziert die damit verbundene Flussänderung eine Spannung

$$U_{ind} = -\,N\,\frac{d\Phi}{dt} = -\,N\,(A\,\mu_0\,\mu_r)\,dH/dt = -\,N\,A\,\mu_0\,\mu_r\,N/\ell\,dI/dt$$

überwunden werden. Der Proportionalitätsfaktor

$$L = \mu_0\, \mu_r\, N^2\, A/\ell \qquad [L] = \text{Henry} = \text{Vs/A} = \Omega\ \text{s}\ .$$

wird als Induktivität der Spule bezeichnet. Die Einheit Henry bezieht sich auf Joseph Henry (1797-1878).

Die Induktivität eines allgemeinen Schaltelementes ist durch das Verhältnis aus Stromänderung und induzierter Spannung definiert,

$$U_{ind} = -\, L\, dI/dt\ .$$

Dies ist wiederum eine Analogie zum Kondensator, wo die Kapazität als Verhältnis aus gespeicherter Ladung (d.h. Integral des Stroms) und Spannung definiert ist. Bei der Induktivität erzeugt nicht das Integral, sondern die Änderung des Stroms eine Spannung. Induktivitäten sind, neben Widerständen und Kapazitäten die dritte Form von passiven, linearen elektronischen Bauelementen. Wie bei Widerständen addieren sich Induktivitäten bei Serienschaltung, während bei Parallelschaltungen die Kehrwerte addiert werden. Die Induktivität kann auch gemessen werden als Integral über eine Stromänderung:

$$L = \frac{\int U_{ind}\, dt}{\Delta I}\ .$$

Das Integral umfaßt den Zeitbereich während dem der Strom von I_1 auf $I_2 = I_1 + \Delta I$ geändert wird.

Exp. 66: Selbstinduktion

Mit Hilfe der Selbstinduktion kann für eine lange dünne Zylinderspule der Energieinhalt des magnetischen Feldes hergeleitet werden: Damit der Strom I durch die Spule fließen kann muss die Arbeit

$$W = \int U\, I\, dt = \int L\, dI/dt\, I\, dt = \int L\, I\, dI = \frac{1}{2}\, L\, I^2$$

geleistet werden. Wir schreiben den Strom als Funktion der magnetischen Feldstärke $H = I\, N/\ell$ und erhalten

$$W = \frac{1}{2}\, L\, H^2\, \ell^2/N^2 = \frac{1}{2}\, H^2\, \ell^2/N^2\, \mu_0\, \mu_r\, N^2\, A/\ell = \frac{1}{2}\, H^2\, \mu_0\, \mu_r\, \ell\, A.$$

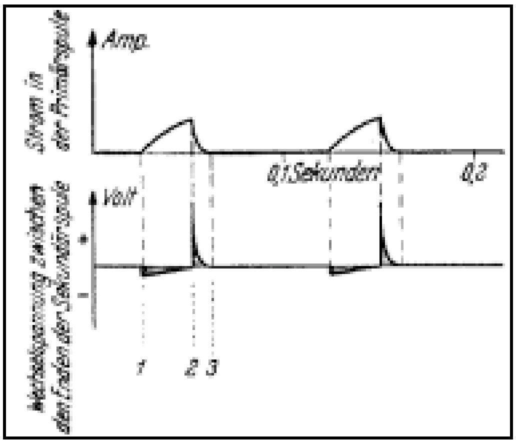
Bezogen auf das Volumen ℓA erhalten wir die Energiedichte

$$w_{magn} = \frac{1}{2}\, H^2\, \mu_0\, \mu_r = \frac{1}{2}\, H\, B\ .$$

Dies gilt für eine lineare Beziehung zwischen H und B; für nichtlineare Abhängigkeiten muss die Energie durch Integration bestimmt werden.

Exp. 68 / 69: Funkeninduktor / Hochspannung

Man kann damit auch sehr hohe Spannungen erzeugen. Verwendet man eine Spule mit hoher Induktivität, so kann sie z.B. eine hohe Spannung erzeugen, wenn der Strom plötzlich unterbrochen wird.



Die wird z.B. beim Funkeninduktor verwendet, wo man zunächst einen Strom durch die Spule fließen läßt, der dann plötzlich unterbrochen wird. Im Magnetfeld in der Spule ist jedoch eine erhebliche Energie gespeichert, die nach außen abgeführt werden muss. Dies geschieht in diesem Beispiel über eine Funkenstrecke. Dieses Prinzip wird z.B. in Benzinmotoren zur Erzeugung des Zündfunkens im Zylinder verwendet.

3.7.7 <u>Periodische Ströme und Felder</u>

Periodische Spannungen, Ströme und Felder spielen eine besonders wichtige Rolle. Sie werden beschrieben durch harmonische Funktionen

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) .$$

Hier stellt U_0 die Amplitude, ω die Kreisfrequenz und φ_u die Phase dar. In einem linearen System fließt dann ein Strom I(t) mit der gleichen Frequenz:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) .$$

Z: U(t), I(t)

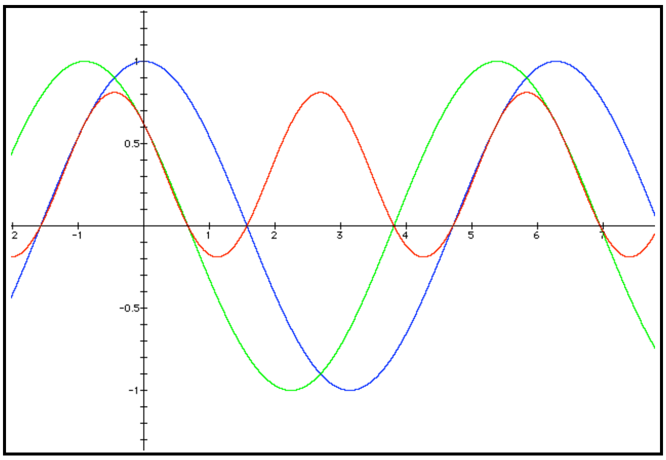
Die beiden Phasen unterscheiden sich wenn die Schaltung Induktivitäten und / oder Kapazitäten enthält (was in realen Schaltungen immer der Fall ist).

Da Spannungen und Ströme zeitabhängig sind muss man sich einigen wie man die Größen bezeichnet. Eine Möglichkeit sind Effektivwerte, z.B.

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2 dt} = I_0 \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2 \omega t \, dt} = I_0 / \sqrt{2} .$$

Die Leistung, welche bei einem Wechselstrom über einer Impedanz abfällt ändert sich als Funktion der Zeit. Die mittlere Leistung eines Wechselstroms hängt deshalb nicht nur von der Amplitude oder vom Effektivwert von Strom und Spannung ab, sondern auch von der relativen Phase. Sie kann berechnet werden als

$$\bar{P} = 1/T \int I(t)\, U(t)\, dt =$$
$$= I_0 U_0 /2 \cos(\varphi_U - \varphi_I) ,$$

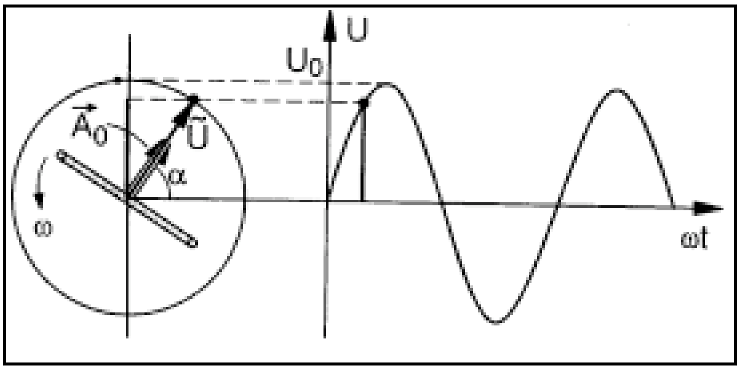


d.h. sie oszilliert mit der relativen Phase zwischen Strom und Spannung.

3.7.8 Komplexe Schreibweise

Exp. 68a: Scheitelspannung / Effektivspannung

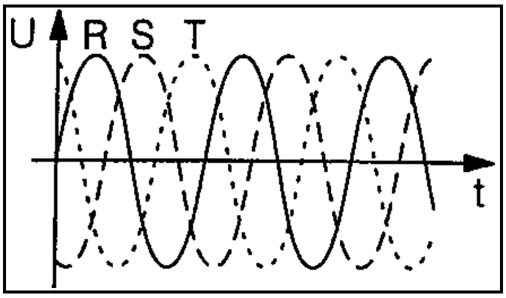
Wechselströme und Wechselspannungen können auch gut als komplexe Größen dargestellt werden, d.h. als Absolutbetrag und Phase. Die physikalischen Größen entsprechen dem reellen Anteil. Eine Wechselspannung der Kreisfrequenz ω wird dann als



$$U(t) = U_0\, e^{i(\omega t+\varphi_0)}$$

dargestellt. Meist rechnet man nur mit der komplexen Amplitude $U_0\, e^{i\varphi_0}$. Die Realteile werden auch als Wirkanteile, die Imaginärteile als Blindanteile bezeichnet.

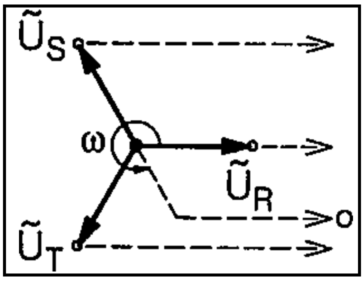
Beim 3-Phasen Wechselstrom verwendet man drei Leiter (zusätzlich zum Nulleiter), in denen die Phase der Spannung jeweils um 120 Grad verschoben ist:



$$U_R = U_0 \sin(\omega t)$$

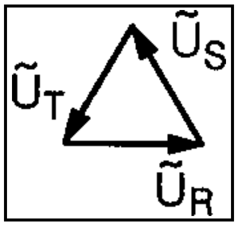
$$U_S = U_0 \sin(\omega t - 2\pi/3) \qquad U_T = U_0 \sin(\omega t - 4\pi/3)$$

.



Diese drei Phasen können als komplexe Amplituden dargestellt werden. In Europa ist die Frequenz $\nu = \omega/2\pi = 50$ Hz, die Amplitude $U_0 = 340$ V.

Man sieht leicht, dass die Summe der drei Amplituden verschwindet.



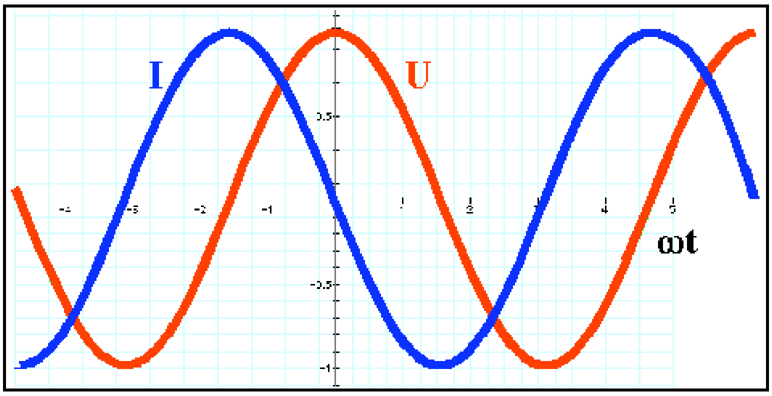
3.7.9 Impedanz

Diese Notation hat den großen Vorteil, dass Kapazitäten (Kondensatoren) und Induktivitäten (Spulen) einfach als komplexe Widerstände behandelt werden können. Die Berechnung von zeitabhängigen Problemen in elektrischen Schaltungen reduziert sich von der Lösung von Differentialgleichungen auf die Lösung von einfachen lineare algebraischen Gleichungen. Der Preis, den man dafür bezahlt, ist, dass das Verhältnis zwischen Spannungen und Strömen von der Frequenz des Wechselstroms abhängt.

Exp.: Strom durch Widerstand, Kondensator, Spule

Ein idealer Ohm'scher Widerstand ist für Gleich- und Wechselströme identisch, d.h. das Verhältnis von Spannung und Strom ist konstant. Ein Kondensator ist für Gleichströme undurchlässig, stellt aber für hohe Frequenzen einen Kurzschluss dar; die entsprechende Impedanz ist indirekt proportional zur Frequenz.

Strom und Spannung sind jedoch nicht in Phase: die Spannung erreicht dann ihr Maximum wenn das Integral des Stroms maximal ist, d.h. beim Nulldurchgang des Stroms. Die Phasenverzögerung um 90 Grad entspricht in der komplexen Darstellung einer Multiplikation mit $e^{i\pi/2} = i$. Die Impedanz einer Kapazität C ist deshalb



$$Z(C) = \frac{1}{i\omega C} .$$

Eine Spule ist für hohe Frequenzen undurchlässig, stellt aber für Gleichströme einen Kurzschluss dar. Hier ist die Spannung proportional zur Ableitung des Stroms, sie eilt dem Strom um eine Viertelperiode voraus. Die Impedanz ist deshalb

$$Z(L) = i\,\omega\,L$$

Zusammengefasst sind die Impedanzen $Z_\omega = U_\omega/I_\omega$ für

Ohm'schen Widerstand	$Z(R) = R$
Induktionsspule	$Z(L) = i\,\omega\,L$
Kondensator	$Z(C) = \frac{1}{i\omega C}$

Die Rechenregeln für komplexe Impedanzen sind die gleichen wie für Widerstände. So kann die Knotenregel ersetzt werden durch die Regel, dass die Summe aller Ladungen, welche durch einen Knoten fließt, verschwindet.

Für die Parallel-, resp. Serienschaltung von Impedanzen gelten die gleichen Rechenregeln wie für Widerstände. Daraus folgt z.B., dass für eine Serienschaltung von Kapazitäten die Kehrwerte addiert werden,

$$1/C = 1/C_1 + 1/C_2 .$$

Z: Kapazitäten in Serie

Die komplexe Schreibweise eignet sich auch, um die Leistung zu berechnen. Man erhält den Effektivwert der Leistung für einen Wechselstrom als

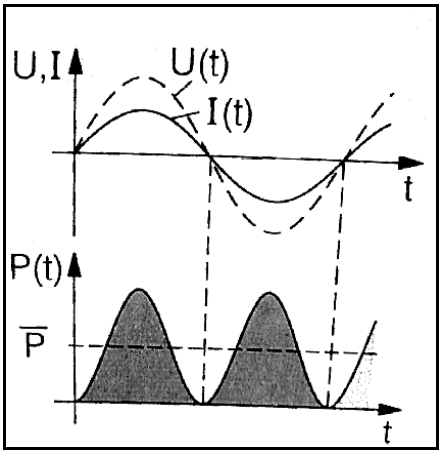
$$P = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{UI^*\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{U^*I\} .$$

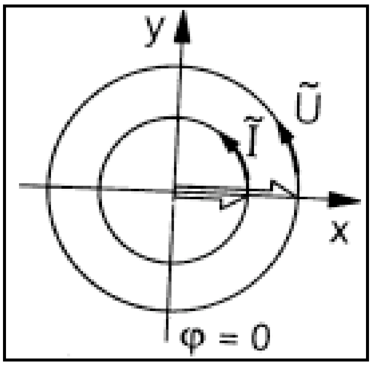
Der Faktor

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{T} \int_{0,T} \cos^2\omega t \; dt$$

enthält die Mittelung über eine Periode der Oszillation.

Für einen Ohm'schen Widerstand sind Strom und Spannung immer in Phase, d.h.





$$U = U_0 \, e^{i(\omega t-\varphi)} ,$$

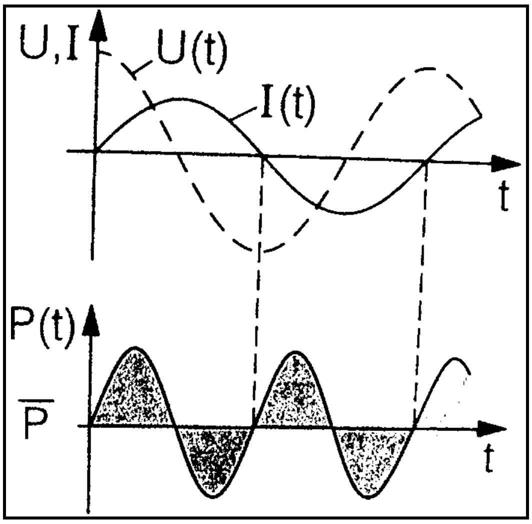
$$I = I_0 \, e^{i(\omega t-\varphi)} .$$

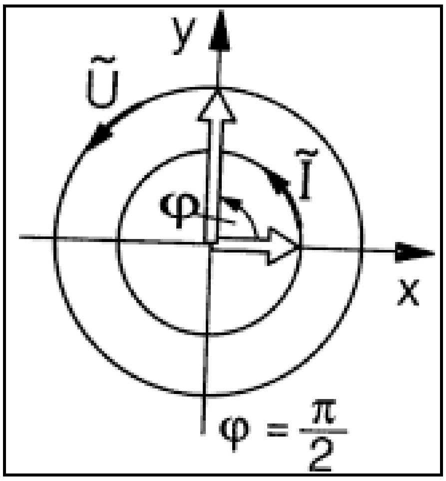
Im Zeigerdiagramm sind die beiden komplexen Amplituden parallel.

Somit ist

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{U_0 \, e^{i(\omega t-\varphi)} \, I_0 \, e^{-i(\omega t-\varphi)}\} = \frac{1}{2} U_0 I_0 .$$

Für eine rein imaginäre Impedanz (Spule oder Kondensator) sind Spannung und Strom 90^{o} außer Phase,





$$U = U_0 \, e^{i(\omega t-\varphi)} ,$$

$$I = I_0 \, e^{i(\omega t-\varphi-\pi/2)} .$$

Die Effektivleistung ist dann

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{U_0 \, e^{i(\omega t-\varphi)} \, I_0 \, e^{-i(\omega t-\varphi-\pi/2)}\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{U_0 I_0 \, e^{i(\pi/2)}\} = 0 ,$$

d.h. es wird keine mittlere Arbeit geleistet. Die momentane Leistung P(t) ist während einer Periode gleich lang positiv wie negativ. Ein idealer Transformator z.B., der im Leerlauf betrieben wird, zieht keine Leistung. Allerdings sind in den Zuleitungen Strom und (Verlust-)Spannung nicht notwendigerweise außer Phase, so, dass trotzdem Verluste auftreten.

Exp. 88b: Schein / Wirkleistung

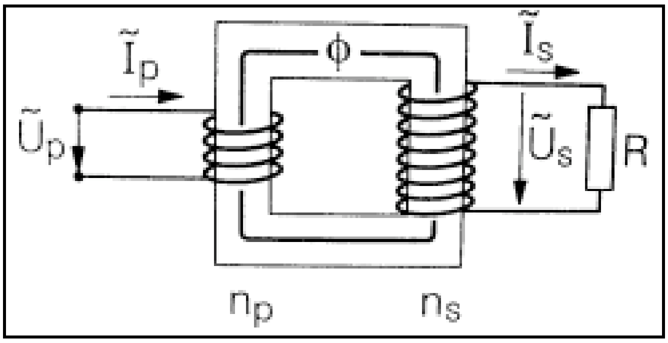
Man bemüht sich deshalb, die sogenannte Blindleistung $\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\{UI^*\}$ gering zu halten.
Das gleiche gilt für einen idealen Kondensator. Diesen Effekt verwendet man z.B. in einem "Dimmer", welcher die Leistung über einer Glühbirne steuert.

In einer allgemeinen elektrischen Schaltung findet man sowohl reelle wie auch imaginäre Impedanzen. Die Gesamtimpedanz erhält man bei Serienschaltung durch Addition, bei Parallelschaltungen durch Addition der Kehrwerte. Mit den resultierenden komplexen Impedanzen kann anschließend wie gewohnt gerechnet werden.

3.7.10 <u>Transformatoren</u>

Exp. 62 Induktion

Transformatoren sind eine Möglichkeit, Spannungen auf einen anderen benötigten Wert zu bringen.



Man bringt dazu einen Eisenkern in eine Spule, durch die ein Wechselstrom fließt. Der dadurch induzierte magnetische Fluss kann über das Induktionsgesetz berechnet werden:

$$U_1 = - N_1\, d\Box/dt\,,$$

wobei N_1 die Zahl der Windungen auf der Eingangsseite (= der Primärseite) angibt. Dieser Fluss wird durch den Eisenkern zu einer anderen Spule gebracht, wo er als zeitlich veränderliches Magnetfeld eine Wechselspannung

$$U_2 = - N_2\, d\Box/dt\,,$$

induziert. Das Verhältnis der beiden Spannungen ist somit

$$U_2 = U_1\, N_2/N_1\,,$$

d.h. die beiden Spannungen an einem Transformator verhalten sich (im Leerlauf) wie das Verhältnis der beiden Windungszahlen. Wird ein Verbraucher angeschlossen, d.h. fließt auf der Sekundärseite ein Strom, so muss die dadurch induzierte Spannung ebenfalls berücksichtigt werden. Das Übertragungsverhältnis hängt außerdem von den Verlusten im Transformator ab, also z.B. davon ob die gesamte Flussdichte auf die Sekundärseite übertragen wird.

Exp. 55: Induktion

Transformatoren werden u.a. verwendet um die Spannung bei der Übertragung über große Distanzen zu erhöhen und sie anschließend wieder zu erniedrigen. Dies ist deshalb nützlich weil dadurch die Verluste gering gehalten werden. Dies kann man anhand eines einfachen Rechenbeispiels zeigen: Wir nehmen an, dass eine Leistung von 2 kW vom Erzeuger zum Verbraucher übertragen werden soll und, dass die Übertragungsleitung einen Widerstand von R = 10 □ aufweise.

Bei einer Spannung von 200 V wird ein Strom von 10 A benötigt. Die Spannung sinkt dann bis zum Verbraucher auf 100 V, so, dass nur noch 1 kW (=50%) zur Verfügung stehen. Wird die gleiche Leistung bei 20 kV übertragen so wird ein Strom von 0.1 A benötigt; die Spannung sinkt um 1 V auf 19999 V, d.h. die Verluste sind auf 1/20000 reduziert worden.

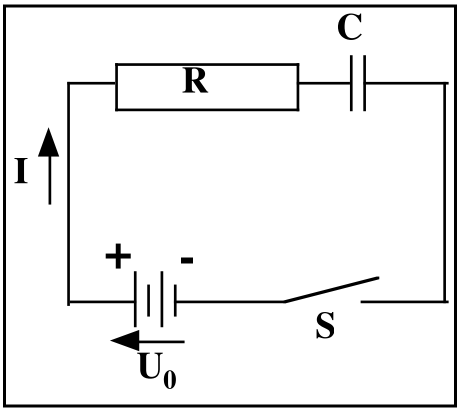
3.7.11 Aperiodische Ströme

Exp. 46 / 46a: Kondensator laden / entladen.

Je größer der Kondensator desto mehr Zeit benötigt man um ihn zu laden.

Man kann die komplexe Schreibweise auch für aperiodische Ströme verwenden.

Wir betrachten einen Schaltkreis der eine Spannungsquelle U_0 enthält, einen Widerstand R, einen Kondensator C, und einen Schalter S. Unmittelbar nach dem Schließen des Schalters S findet man die Spannungen



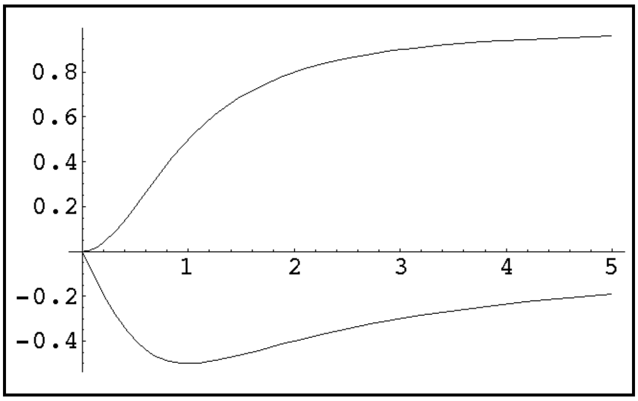
$$V_R = I\,R \qquad\qquad V_C = I\,\frac{1}{i\omega C}\ .$$

Mit $V_R + V_C = U_0$ findet man

$$I\,R + I\,\frac{1}{i\omega C} = U_0\ ,$$

oder

$$I = U_0/(R+1/i\omega C) \ = U_0/R\ 1/(1+1/i\omega RC)\ .$$



Dieser Ausdruck beschreibt das Verhalten des Stroms im Frequenzbereich: für kleine Frequenzen fließt kein Strom, für große Frequenzen beträgt der Strom

$$I_0 = U_0 / R\ .$$

Dieses Resultat kann qualitativ leicht nachvollzogen werden: Ein Gleichstrom kann nicht durch den Kondensator fließen, für hohe Frequenzen wirkt der Kondensator dagegen wie ein Kurzschluss.

Um das zeitliche Verhalten zu bestimmen müssen wir diese Funktion Fouriertransformieren. Wir erhalten

$$I(t) = I_0\ e^{-t/RC}$$

Z: exp.

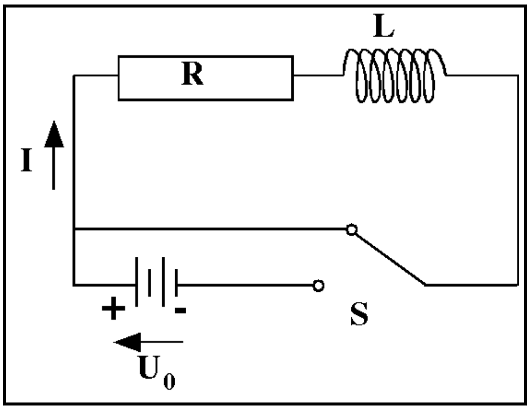
Der Strom setzt somit zunächst mit dem Maximalwert ein, der ohne den Kondensator fließen würde, und nimmt exponentiell auf Null ab. Die Zeitkonstante ist gegeben durch das Produkt aus Widerstand und Kapazität.

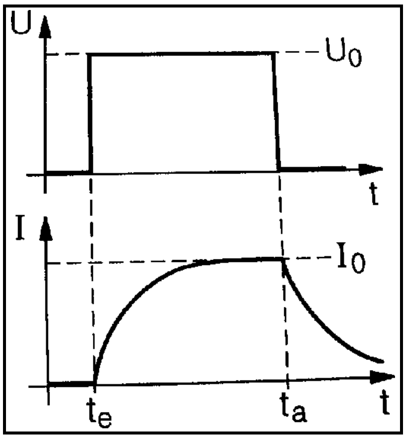
Exp. 82 / 83.1 / 83.2 / 84 / 91a: RC Kreis

Um schnelle Schaltungen zu erhalten benötigt man somit kleine Kapazitäten und Widerstände.

Exp. 89.1, 89.2: RC Tiefpassfilter

Umgekehrt kann man RC-Kreise als Tiefpassfilter verwenden.





Legt man an eine Spule eine Spannung an so folgt der Strom verzögert. Wir berechnen hier das Ausschaltverhalten: Wenn die Batterie überbrückt ist muss die Summe der Spannung über der Spule und der Spannung über dem Widerstand gleich sein:

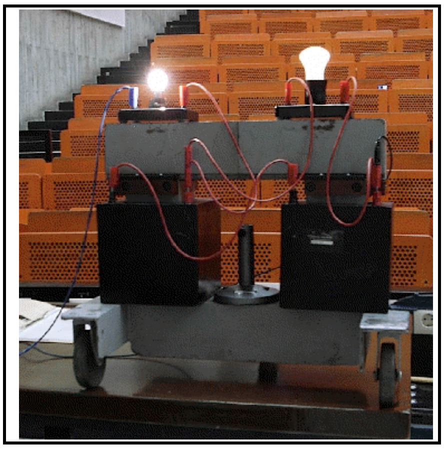
$$I\,R = -\,L\,dI/dt\ .$$

Die Lösung dieser Bewegungsgleichung ist

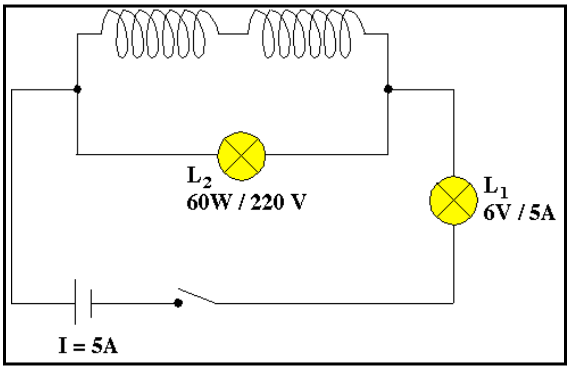
$$I(t) = I(0)\,e^{-tR/L}\ .$$

Der Strom fällt somit exponentiell auf Null ab, wobei die Zeitkonstante τ= L/R ist.

Der Einschaltvorgang unterscheidet sich lediglich durch die zusätzliche Spannungsquelle. Der Strom steigt deshalb vom Anfangswert Null exponentiell auf den Langzeitwert I = U/R an. Bei langen Zeiten hat die Spule also keinen Einfluss auf das Verhalten der Schaltung; sie verzögern jedoch die Zeit, bis der stationäre Zustand erreicht wird. Schnelle Schaltungen erhält man somit mit kleinen Induktivitäten und großen Widerständen in Serie zur Induktivität.



Exp. 66: Selbstinduktion



Das Einschaltverhalten einer Induktivität kann im Experiment sichtbar gemacht werden indem man die entsprechenden Ströme über Glühlampen sichtbar macht. In diesem Experiment fließt durch die

Spule L_1 nach Durchschalten des Schalters ein konstanter Strom von 5 A. Unmittelbar nach Einschalten wächst der Strom durch die Spule, während der Strom durch die Lampe L_2 abnimmt. Beim Öffnen des Schalters löscht L_1 aus, während die Lampe L_2 noch brennt: die im Magnetfeld der Spule enthaltene Energie wird durch diese Lampe entladen.