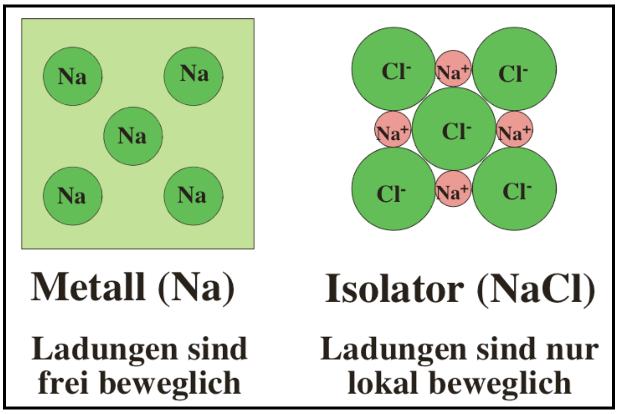
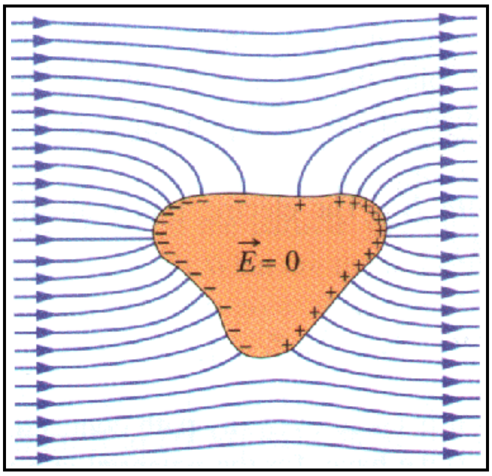
3.2 Materie im elektrischen Feld



Auch elektrisch neutrale Materie besteht aus geladenen Teilchen (Atomkerne, Elektronen), welche auf unterschiedliche Weise aneinander gebunden sind. Deshalb wirken in einem elektrischen Feld Kräfte auf diese Teilchen, welche sie verschieben. Sind die Teilchen über makroskopische Distanzen beweglich so spricht man von einem elektrischen Leiter; sind sie nur über mikroskopische Distanzen (< 1nm) beweglich so spricht man von einem Isolator. Wie leicht sie beweglich sind wird durch den elektrischen Widerstand quantifiziert, den wir im Kapitel „stationäre Ströme“ noch diskutieren werden.

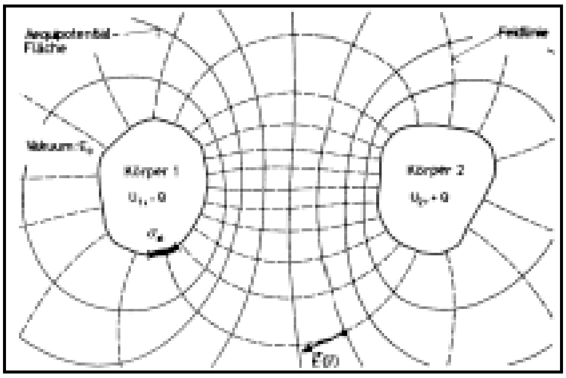
3.2.1 Felder und elektrische Leiter

Wir betrachten zunächst elektrische Leiter. Für die Diskussion statischer elektrischer Felder kann der Widerstand eines elektrischen Leiters zu Null angenommen werden. Die direkteste Konsequenz davon ist, dass im Inneren eines elektrischen Leiters alle elektrischen Felder verschwinden. Dies sieht man aus folgender Überlegung: Existiert in einem Leiter ein Feld so werden die frei beweglichen Ladungsträger (=Elektronen) verschoben. Dadurch werden positive und negative Ladungen erzeugt, welche ihrerseits ein Feld generieren. Dieses wird dem äußeren Feld überlagert und die Bewegung der Ladungsträger endet wenn die Summe der beiden Felder verschwindet.

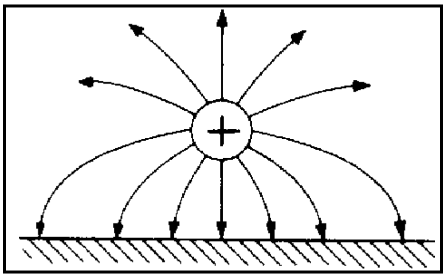


Das gleiche gilt an der Oberfläche für Feldkomponenten unmittelbar außerhalb des Leiters parallel zur Oberfläche: würden solche existieren so würden die Ladungsträger sich entlang der Oberfläche verschieben bis die Felder ausgeglichen wären. Es entstehen somit auf der Oberfläche von elektrischen Leitern Oberflächenladungen. Diese können quantitativ aus dem Gauß'schen Satz berechnet werden, da sie die Quelle (Senke) der elektrischen Feldlinien darstellen. Die Flächenladungsdichte entspricht der elektrischen Verschiebungsdichte,

$$D = \sigma = dQ/dA = \varepsilon_0 E .$$



Der Beweis, dass die Feldlinien senkrecht auf der Leiteroberfläche stehen, kann auch anders geführt werden: Da im Inneren keine elektrischen Felder existieren befindet sich der gesamte metallische Körper auf dem gleichen Potenzial. Die Oberfläche eines metallischen Körpers bildet somit eine Äquipotenzialfläche. Da Feldlinien senkrecht auf Äquipotenzialflächen stehen müssen sie senkrecht auf der Oberfläche stehen.



Bringt man eine Ladung vor einen elektrischen Leiter so verlaufen die Feldlinien genau so wie wenn sich hinter der Metalloberfläche eine entgegengesetzte Ladung befinden würde. Man nennt diese eine Spiegelladung. In Wirklichkeit wird sie durch eine Oberflächenladungsdichte „simuliert“.

Exp. 7a: Spiegelladungen

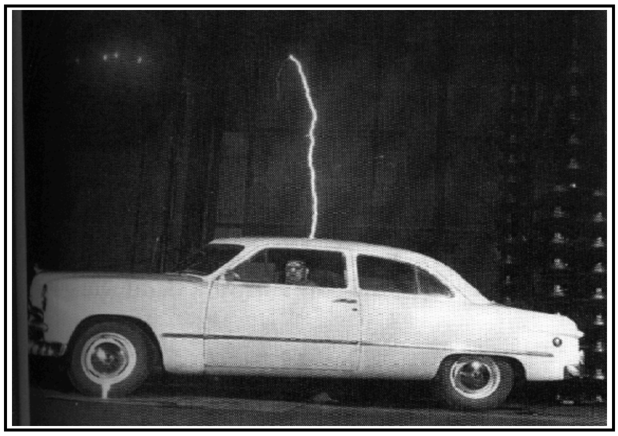
Im Experiment vergleichen wir die Kraft auf eine geladene Kugel für den Fall, dass sie einer entgegengesetzt geladenen Kugel ausgesetzt ist, mit der Kraft, welche durch eine geerdete Platte in halber Distanz erzeugt wird.

3.2.2 Feldfreie Räume

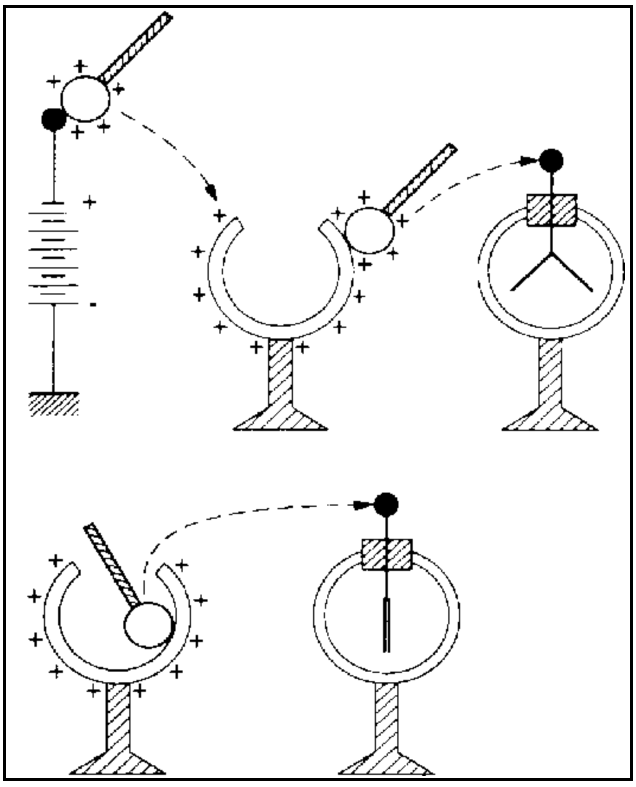
Genau so wie das Feld im Inneren eines Leiters verschwindet, verschwindet es auch in einem Hohlraum im Inneren eines Leiters, sofern dieser keine Ladungen enthält.

Exp. 51: Faraday Käfig

Wir können dies in einem Experiment nachweisen: Der Hohlraum wird hier durch einen Drahtkäfig angenähert. Eine Sonde misst das Potenzial im Inneren des Käfigs: Solange man den Rändern nicht zu nahe kommt bleibt es konstant. Hohlräume dieser Art werden als Faraday-Käfige bezeichnet.



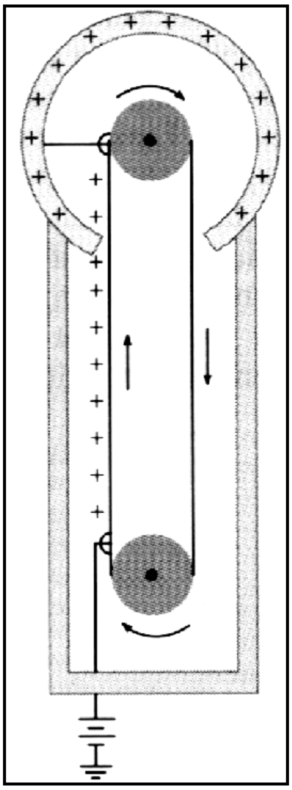
Faraday-Käfige ermöglichen es, äußere Felder von empfindlichen Apparaten fernzuhalten. Der gleiche Effekt schützt Insassen von Automobilen oder Seilbahnen vor dem Effekt eines Blitzes.



Wird eine Ladung auf einen elektrischen Leiter gebracht so wandert sie nach außen; das Feld im Innern bleibt Null.

Exp. 10a: Ladungsübertrag von einem Leiter

Im Experiment kann man zeigen, dass elektrische Ladungen auf der Außenfläche sitzen – unabhängig davon wo man sie deponiert. Von der Oberfläche können sie auch wieder entfernt werden, nicht aber aus dem Inneren.



Man verwendet dies in einem so genannten van-de-Graaff Generator um auf einfache Weise hohe Spannungen zu erzeugen: Einzelne Ladungen werden mit einer Hilfsspannung von einer Spitze auf ein Band aufgebracht; dieses transportiert sie in das Innere einer metallischen Kugel, wo sie auf die Außenseite abfließen. Dadurch sammeln sich die Ladungen auf der Außenseite an. Da das Innere der Kugel feldfrei bleibt können immer noch zusätzliche Ladungen eingebracht werden.

Exp.2: Bandgenerator

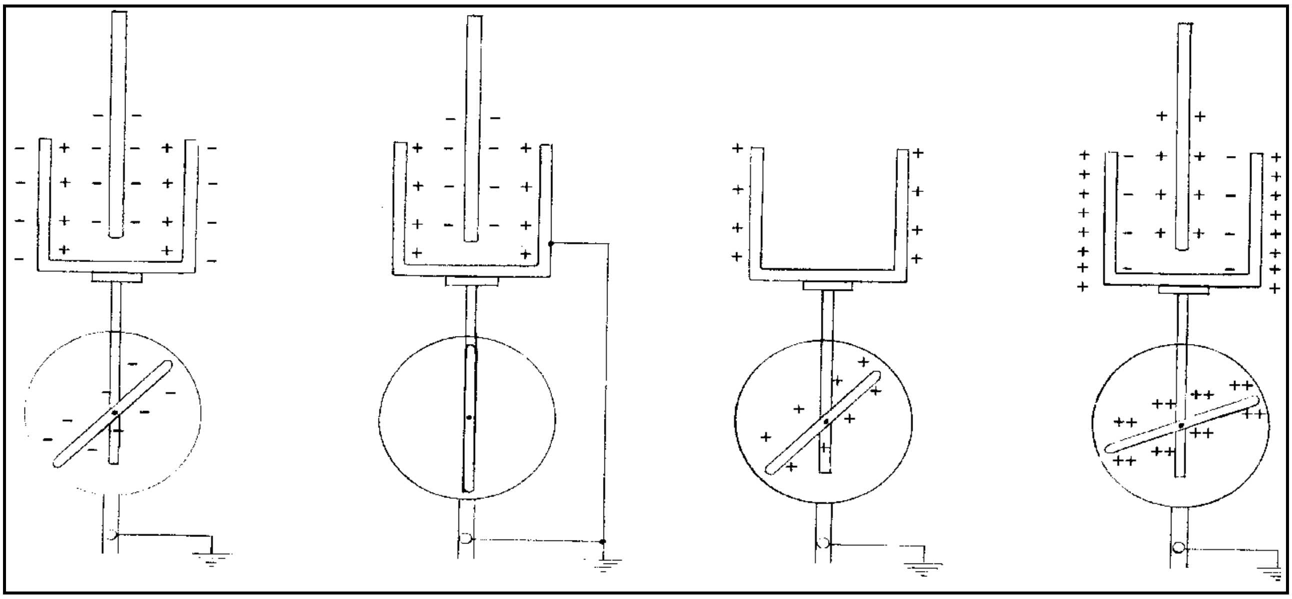
Mit einem einfachen Demonstrationsgerät können damit Spannungen bis zu einigen kV erzeugt werden. Mit weiter entwickelten Geräten erhält man Spannungen bis zu einigen MV.

3.2.3 Influenzladung

Befindet sich ein elektrisch leitender Körper im elektrischen Feld, so werden Ladungen auf die Oberfläche so verschoben, dass das Feld im inneren des Körpers verschwindet. Man erhält eine Oberflächenladung

$$\sigma = \Delta Q/\Delta A \qquad [\sigma] = C/m^2 .$$

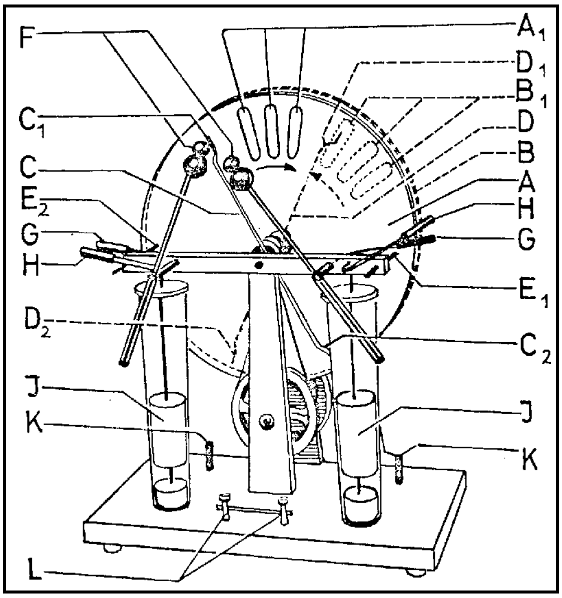
Die so erzeugten Oberflächenladungen werden auch als Influenzladungen bezeichnet.



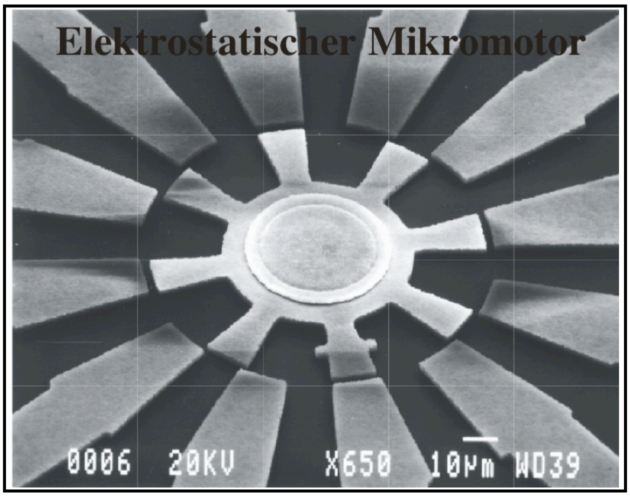
Exp. 18: Influenz

Man kann diese Influenzladungen z.B. nachweisen indem man sie mit einem Elektrometer misst. Das Elektrometer ist in diesem Versuch mit der äußeren Seite des Bechers verbunden. Bringt man einen geladenen Kunststoffstab in Innere des Bechers, so wird eine Oberflächenladung erzeugt, wobei die Innenseite des Bechers entgegengesetzt zur Ladung des Stabes geladen wird, die Außenseite gleich wie der Stab. Wird die Außenseite geerdet so wird die dort erzeugt Ladung entfernt und das Elektrometer zeigt keine Ladung mehr an. Entfernt man zuerst das Erdungskabel und anschließend den Stab so stellt man fest, dass die Dose jetzt geladen ist.

Exp. 20: Influenzmaschine

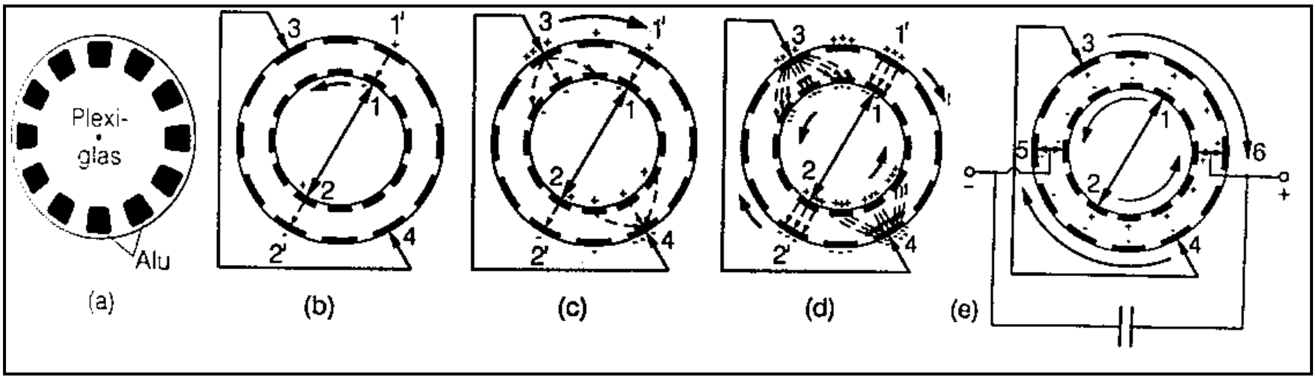


Auf dieser Basis kann man elektrische Maschinen herstellen. Solche elektrostatischen Motoren haben zwar bisher kaum eine Bedeutung.



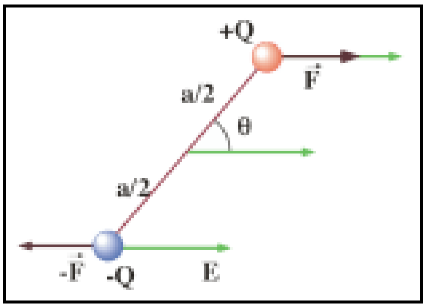
Sie werden jedoch in Mikromaschinen verwendet, da sie einfacher zu konstruieren sind als konventionelle elektromagnetische Maschinen.

Im Demonstrationsmodell liegen sich auf zwei Ringen / Zylindern Kondensatorplatten gegenüber, welche z. T. über Schleifkontakte miteinander verbunden sind. Die Ladungen werden in einem Feld getrennt und über die Schleifkontakte zu den bereits vorhandenen Ladungen akkumuliert.



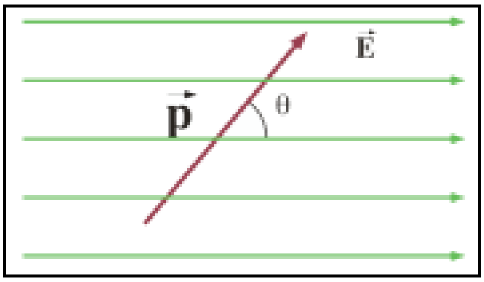
Die Bürsten sind so angebracht, dass sie die Ladungen am optimalen Ort abgreifen und auf die andere Seite der Scheibe fließen lassen.

3.2.4 Dipole in einem äußeren Feld



In einem homogenen elektrischen Feld erfährt ein Dipol keine Translationsbeschleunigung, da die beiden Kräfte auf die beiden Ladungen entgegengesetzt sind. Ist der Dipol nicht parallel zur Feldrichtung sind die beiden Kräfte jedoch seitlich gegeneinander versetzt. Sie bilden ein Kräftepaar, welches dann ein Drehmoment erzeugt,

$$\vec{M} = \vec{a} \times \vec{F} = \vec{a} \times (Q\,\vec{E}) = Q\,\vec{a} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}\,.$$



Das Drehmoment ist somit proportional zu Feldstärke und Dipolmoment. Es ist maximal wenn der Dipol senkrecht zum Feld orientiert ist und verschwindet bei paralleler Orientierung ($\theta = 0, \pi$). Die Winkelabhängigkeit ist

$$|M| = |p| \cdot |E| \sin\theta\,.$$

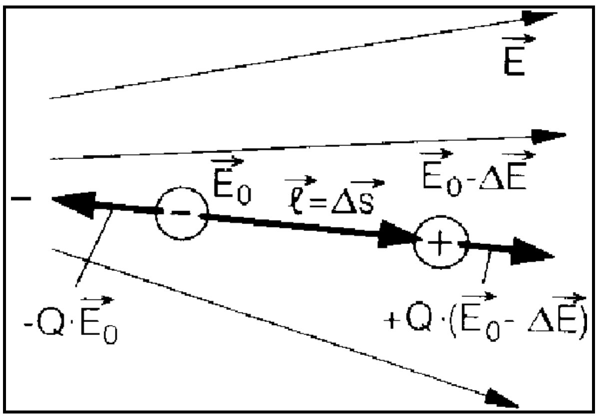
Der Dipol enthält somit potenzielle Energie als Funktion des Winkels zur Feldrichtung:

$$E_{pot} = \int M(\theta)\, d\theta = -\,|p| \cdot |E| \cos\theta = -\,\vec{p} \cdot \vec{E}\,.$$

Exp. 17/17a: Elektrischer Dipol im homogenen Feld

Wir verifizieren diesen Effekt indem wir einen Dipol erzeugen: Zwei Kugeln, die an einem Glasstab befestigt sind, werden mit entgegengesetzten Ladungen aufgeladen. Das elektrische Feld wird erzeugt indem zwei parallele metallische Platten auf beiden Seiten des Dipols aufgestellt und mit einer Hochspannungsquelle verbunden werden. Die positiv geladene Kugel wird von der negativ geladenen Platte angezogen; wechselt man die Polarität der Spannung an den beiden Platten so dreht sich der Dipol um 180 Grad.

3.2.5 Dipol im inhomogenen Feld



In einem inhomogenen Feld wirkt zusätzlich auch eine Translationskraft auf einen elektrischen Dipol. Diese kommt dadurch zustande, dass die Kräfte auf die beiden Ladungen ungleich groß sind. Wir betrachten nur den Fall wo der Dipol parallel zum Feld orientiert ist, wo also das Drehmoment verschwindet. Dann beträgt die gesamte Kraft

$$F_{\parallel} = F_1 + F_2 = -\,Q\,E_0 + Q(E_0 - \Delta E) = -\,Q\,\Delta E\,,$$

d.h. sie ist proportional zur Ladung und zur Änderung der Feldstärke. Wir können dies auch schreiben als

$$F_{\parallel} = - Q\, a\, \Delta E/a = - p\, dE/dr .$$

Die Kraft ist somit proportional zur Stärke des Dipols und zum Gradienten des elektrischen Feldes. Sie wirkt in Richtung des stärkeren Feldes, wo die potenzielle Energie des Dipols niedriger ist.

$$\vec{F} = - \vec{\nabla} E_{pot} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = |p|\, \vec{\nabla}\, |E| ,$$

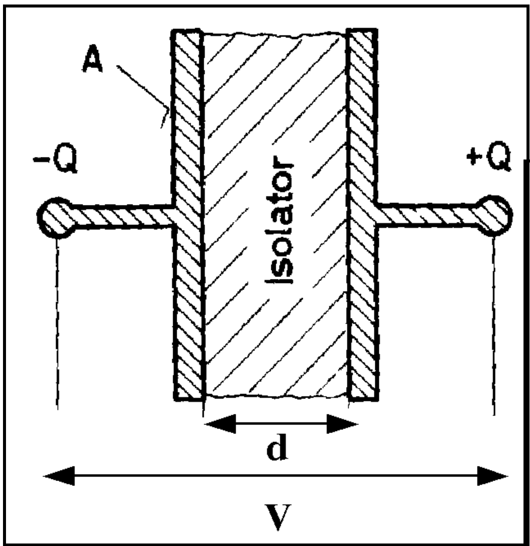
wobei wir angenommen haben, dass der Dipol in Feldrichtung orientiert bleibt. Die Kraft ist somit proportional zur Änderung der Feldstärke.

Im Experiment findet man, dass der Dipol in die Region des stärkeren Feldes gezogen wird.

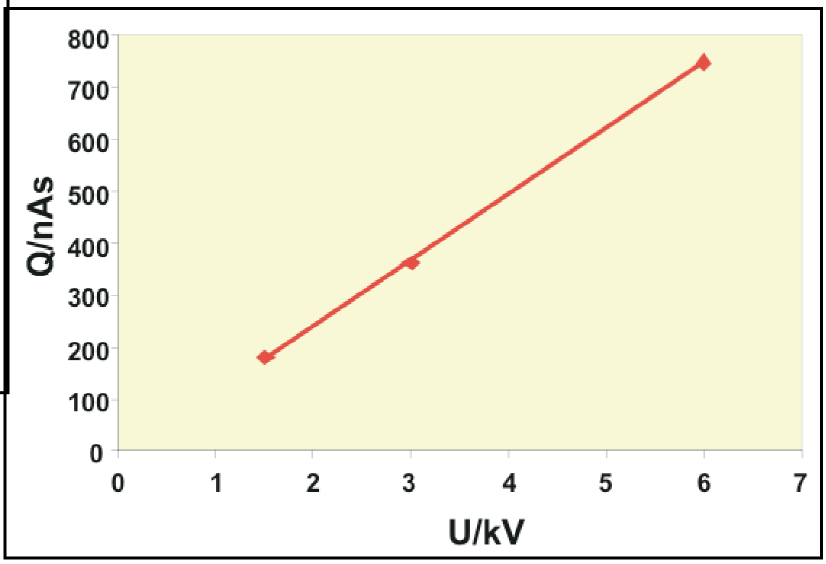
Exp.: Dipol im inhomgenen Feld

3.2.6 Kondensatoren

Kondensatoren sind einfache Speicher für elektrische Ladungen. Offenbar sind alle Anordnungen elektrischer Leiter Ladungsspeicher, da sich auf der Oberfläche Ladungen ansammeln können.



Ein besonders einfaches Beispiel ist der Plattenkondensator: hier werden elektrische Ladungen auf zwei Metallplatten gespeichert, die durch einen Isolator (z. B. Luft) getrennt sind.



Die auf einem Kondensator gespeicherte Ladung ist in guter Näherung proportional zur angelegten Spannung. Die Steigung dieser Geraden, also das Verhältnis

$$C = Q / V$$

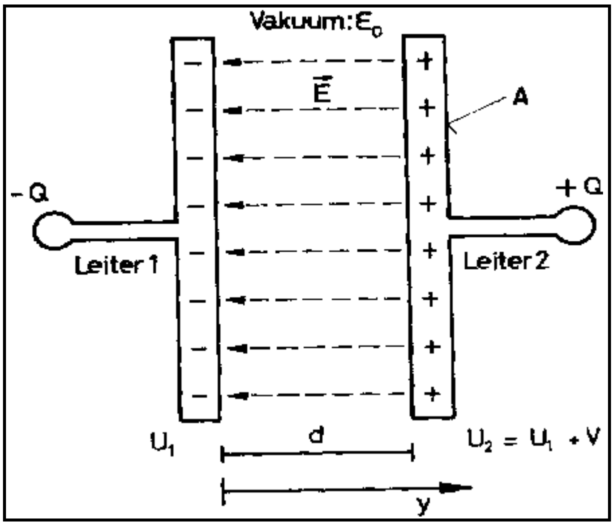
$$[C] = C/V = F = Farad .$$

misst die Speicherfähigkeit des Kondensators und wird als Kapazität bezeichnet.

Aus der Definition der elektrischen Verschiebung folgt

$$D = Q / A \quad \Rightarrow \quad Q = D\, A .$$

Die Spannung ist gegeben als das Integral des elektrischen Feldes,



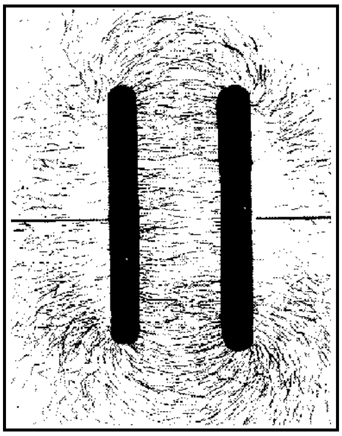
$$V = E\, d .$$

Im Vakuum gilt gleichzeitig $D = \varepsilon_0 E$, so dass die Kapazität des Plattenkondensators als

$$C = Q/V = D\, A/(E\, d) = \varepsilon_0\, A/d$$

gegeben ist.

Diese Abhängigkeit ist direkt aus der Definition der beiden Größen E und D hergeleitet worden: Die gesamte Ladung ist durch das Produkt aus Verschiebungsdichte D und Fläche A gegeben, während die Spannung proportional zum Feld und zum Abstand der Platten ist. Bei konstanter Feldstärke nimmt somit die Spannung mit dem Abstand der Platten zu.

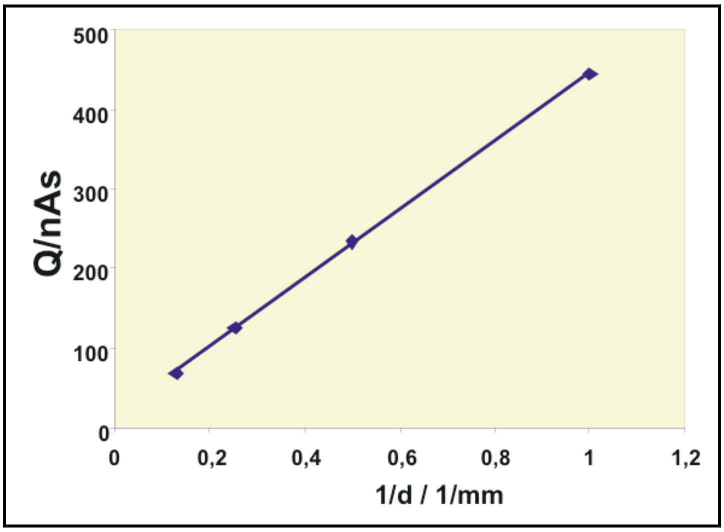


Die Feldlinien verlaufen zwischen den beiden Platten in guter Näherung parallel zueinander und senkrecht zu den Platten. Ein wichtiger Aspekt des Plattenkondensators ist, dass das Feld zwischen den Platten sehr homogen ist. Außerhalb ist der Verlauf komplizierter, soll aber hier nicht diskutiert werden.

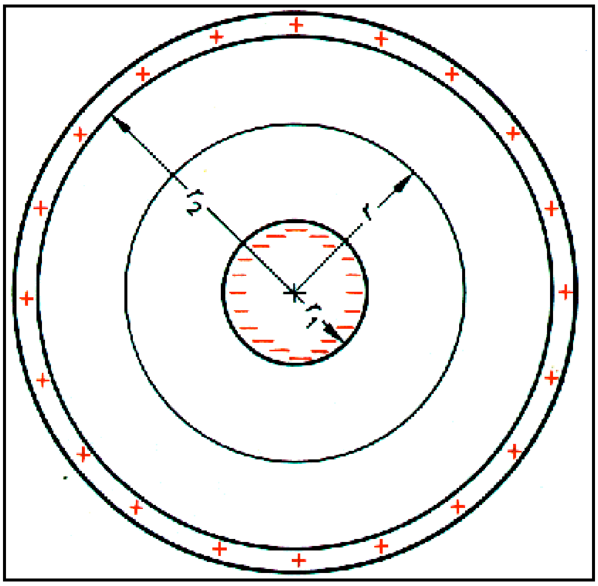
Als typisches Beispiel betrachten wir einen Plattenkondensator mit einer Fläche von $A = 1\ cm^2 = 10^{-4}\ m^2$ und einem Plattenabstand von $d = 1$ mm. Damit beträgt die Kapazität $C = \varepsilon_0\, A/d = 8.85 \cdot 10^{-13}\ F \sim 1$ pF. Auf einem solchen Kondensator kann somit bei einer Spannung von U = 1 kV eine Ladung Q = 1 nC gespeichert werden.

Man kann dies experimentell verifizieren **Exp. 43: Feld und Spannung am Plattenkondensator** indem man Feld und Spannung unabhängig voneinander misst.

Exp. 45: Feld und Plattenabstand



Vergrößert man den Abstand zwischen den Platten, so nimmt die Kapazität ab. Man kann dabei die Spannung konstant halten (indem man den Kondensator an eine Spannungsquelle anschließt) ; dann nimmt die Ladung auf den Platten ab. Oder man kann die Ladung konstant halten indem man den Kondensator von der Spannungsversorgung trennt. Dann steigt die Spannung, während das E-Feld konstant bleibt.



Ein weiterer wichtiger Spezialfall ist der Kugelkondensator. Man kann sich die beiden Platten zu konzentrischen Kugeln gebogen vorstellen. Wir betrachten dafür zwei konzentrische Kugeln, welche entgegengesetzte Gesamtladungen tragen. Für die Berechnung der Kapazität C = Q/U benötigen wir die Spannungsdifferenz zwischen den beiden Platten, die wir am einfachsten aus dem Potenzial bestimmen. Wie in Kapitel 3.1 gezeigt erzeugt die Ladung Q auf der inneren Kugel ein Potenzial

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} .$$

Die Potenzialdifferenz beträgt somit

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

und die Kapazität

$$C = Q/U = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} .$$

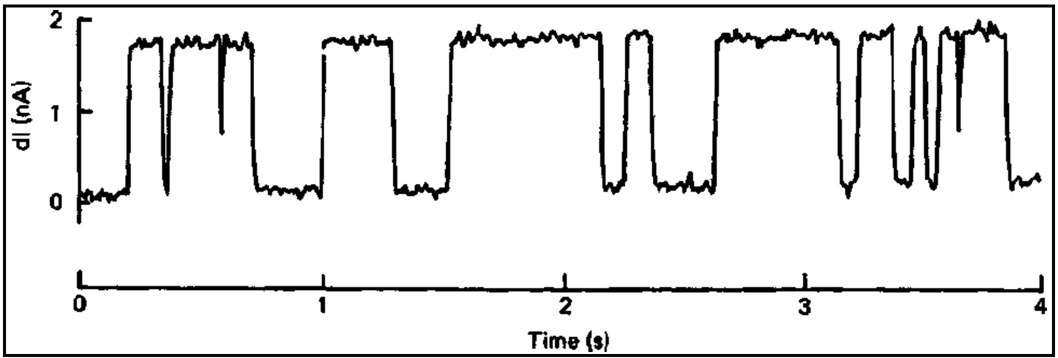
Ist die äußere Kugelschale nicht vorhanden (d.h. im Unendlichen), so beträgt die Kapazität

$$C = 4\pi\varepsilon_0 r .$$

Dies ist insbesondere für die Abschätzung der Kapazität von beliebigen Leiterelementen nützlich. Man erhält z.B. folgende typische Kapazitäten

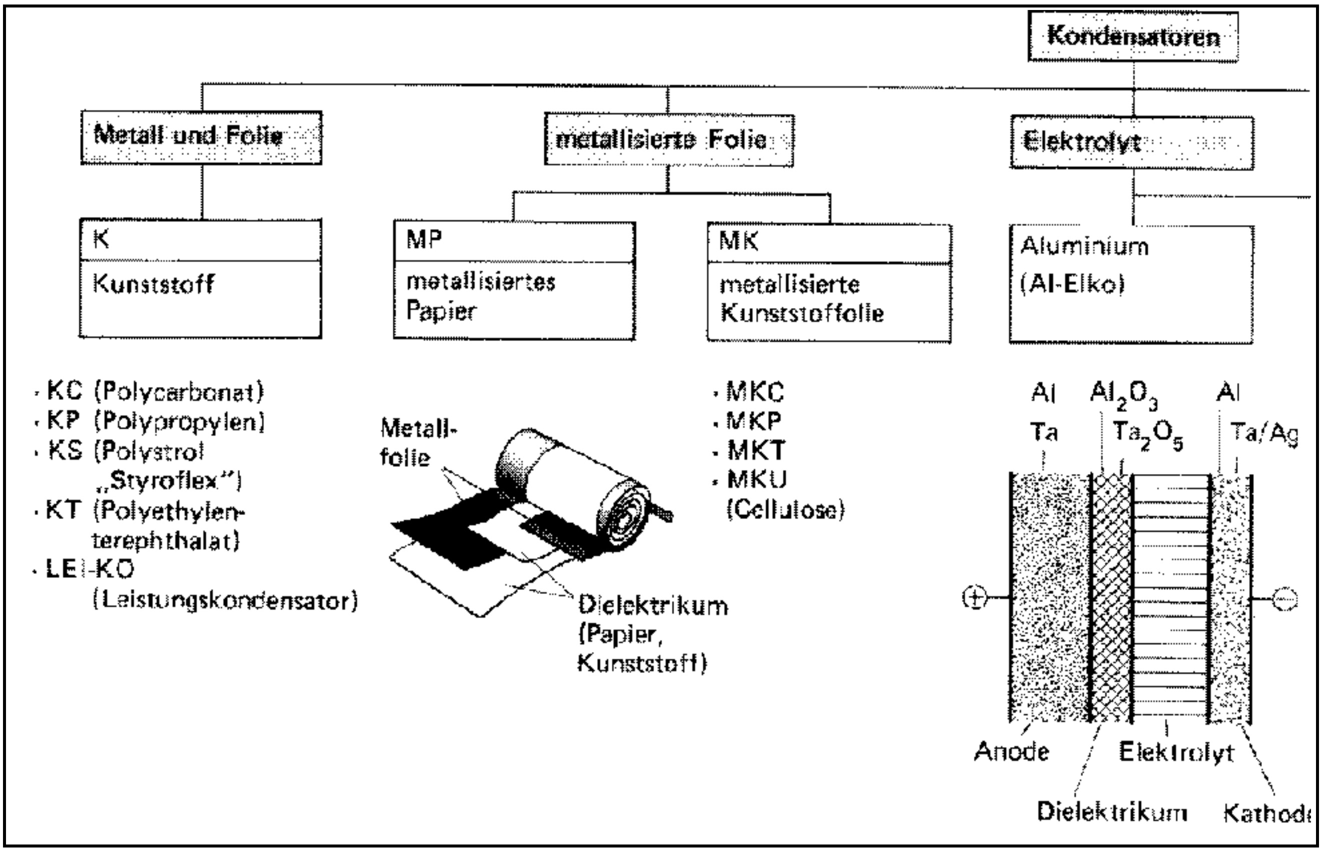
mikroelektronisches Schaltelement	r ~ 0.2 μm	C ~ $2\cdot 10^{-17}$ F .
Kugel im Vorlesungsexperiment	r ~ 2 cm	C ~ $2\cdot 10^{-12}$ F = 2 pF.
Erde	r ~ $6.4\cdot 10^{6}$ m	C ~ $7\cdot 10^{-4}$ F = 700 μF.

Die Kapazität eines Schaltelements ist u. A. ein wichtiger Beitrag zur Schaltgeschwindigkeit. Man versucht deshalb, bei schnellen Schaltungen die Kapazitäten gering zu halten.

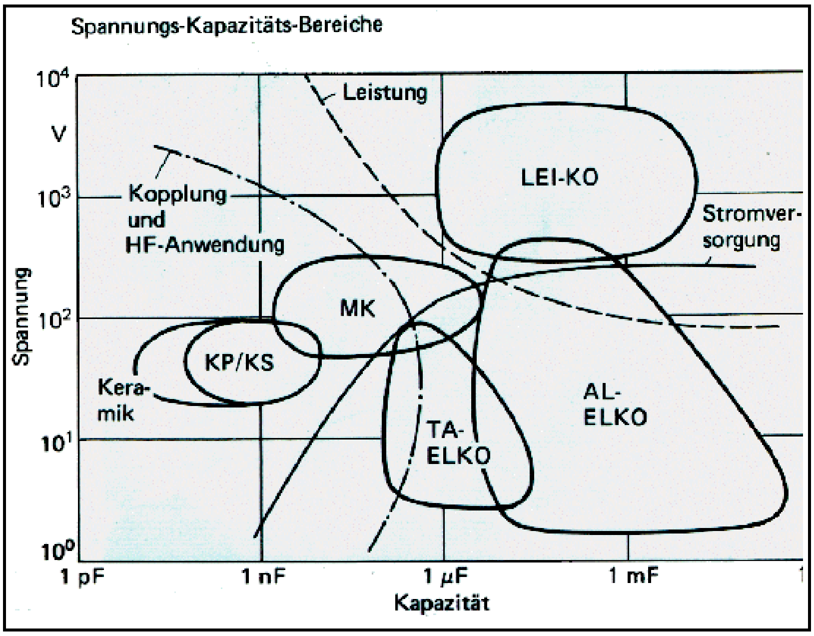


Bei den genannten Größenordnungen kann man beobachten wie Elektronen einzeln auf die Kondensatoren gelangen. (R. Vrijen, E. Yablonovitch, K. Wang, H.W. Jiang, A. Balandin, V. Roychowdhury, T. Mor, and D. DiVincenzo, '*Electron-spin-resonance transistors for quantum computing in silicon-germanium heterostructures*', Phys. Rev. A 62, 012306-1 (2000).)

Diese Größenordnungen sind auch interessant für den Vergleich mit modernen Hochleistungskondensatoren, welche Kapazitäten bis zu 1 F aufweisen. Man erhält solche Kapzitäten durch eine Kombination von großer Oberfläche (viele m^2), kleinem Abstand (~μm) und großer Dielektrizitätskonstante (< 1000).



Neben der Kapazität ist auch die (maximale) Betriebsspannung eines Kondensators eine wesentliche Größe, sowie (nur für kleine Kapazitäten) das Verhalten bei hohen Frequenzen. Kommerzielle Kondensatoren sind jeweils auf einen Bereich (Kapazität / Spannung / Frequenz) optimiert.



3.2.7 Elektrisches Feld und Verschiebungsdichte im Plattenkondensator

Man kann die Berechnung der Kapazität überprüfen indem man Ladung und Spannung unabhängig misst. Dies ist ein Hinweis darauf, dass Feld und Verschiebungsdichte unabhängige Größen sind.

Exp. 44 / 45: Plattenkondensator

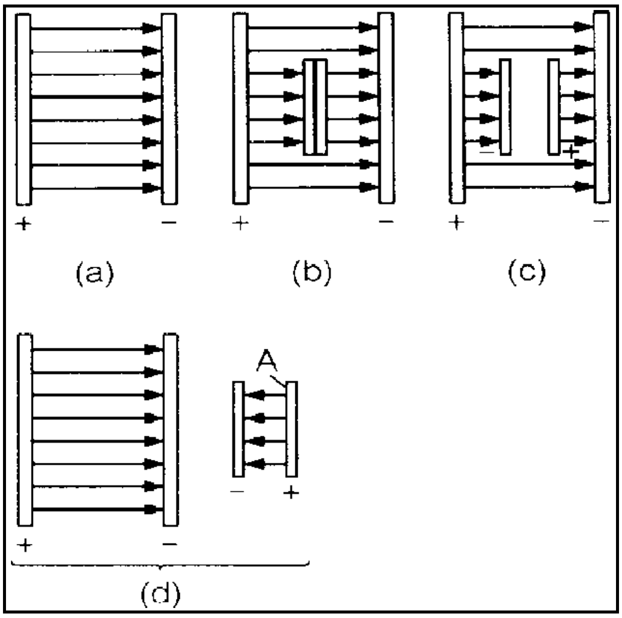
Die Influenz kann man über die Kapazitätsänderung nachweisen: es werden Ladungen in den Metallplatten im Kondensator induziert, welche das Feld abschirmen.

Exp. 18a): Influenz / Kondensator / Exp. 46c: Leiter im elektrischen Feld

Man kann damit Ladungen „erzeugen“ indem man sie trennt.

Exp. 19: Influenz / elektrostat. Löffel

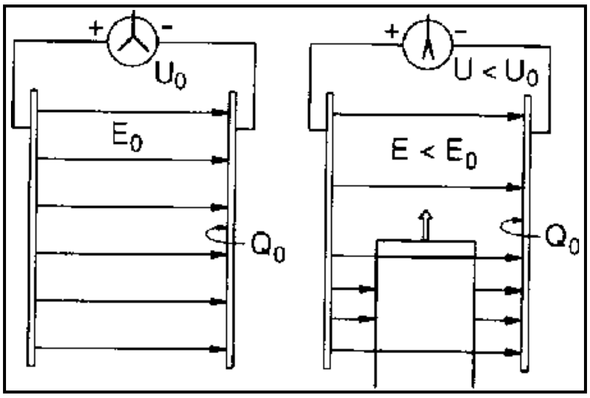
Den Unterschied zwischen elektrischem Feld und elektrischer Verschiebungsdichte kann man konzeptionell nachvollziehen wenn man sich vorstellt (oder auch experimentell durchführt), dass man in den Plattenkondensator zwei weitere Platten einbringt (b). Werden diese getrennt, so bleibt die Ladungsdichte auf der Oberfläche der Kondensatorplatten konstant, d.h. die Verschiebungsdichte ist konstant. Ein Teil des Raums im Kondensator wird jedoch feldfrei und die gesamte Spannung über dem Kondensator nimmt dadurch ab.



Exp. 48 / 49: Kondensator mit / ohne Dielektrikum

Einen ähnlichen Effekt stellt man fest wenn man in einen Plattenkondensator, der von der Spannungsquelle getrennt wurde, ein polarisierbares, nichtleitendes Material einbringt.

In diesem Fall sinkt die Spannung (und damit das elektrische Feld) von einem Anfangswert U_0 auf einen Endwert $U = U_0/□$.

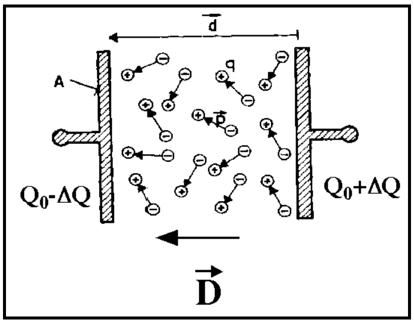


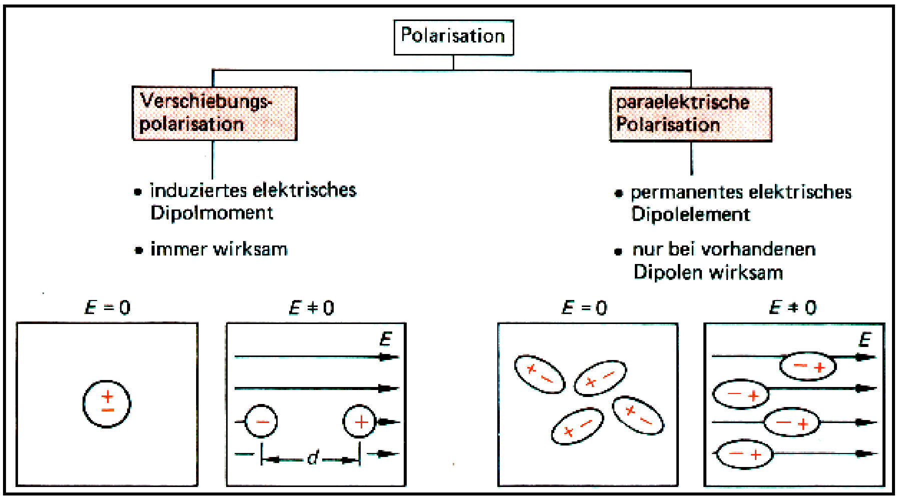
Material	Dielectric Constant κ
Air (1 atm)	1.00054
Polystyrene	2.6
Paper	3.5
Transformer oil	4.5
Pyrex	4.7
Ruby mica	5.4
Porcelain	6.5
Silicon	12
Germanium	16
Ethanol	25
Water (20°C)	80.4
Water (25°C)	78.5
Titania ceramic	130
Strontium titanate	310

Die Proportionalitätskonstante □ ist eine Materialkonstante des polarisierbaren Materials. Dielektrische Konstanten von typischen Materialien bewegen sich zwischen 1 und 10. Leicht polarisierbare Flüssigkeiten wie z.B. Wasser können bis etwa 100 gehen, während einige spezielle Materialien darüber hinaus gehen. Dabei handelt es sich um sog. ferroelektrische Materialien. Diese Substanzen werden in Kondensatoren verwendet um hohe Kapazitäten zu erreichen.

3.2.8 Mikroskopisches Modell

Man kann sich diesen Effekt so vorstellen, dass sich im Dielektrikum Dipole befinden.

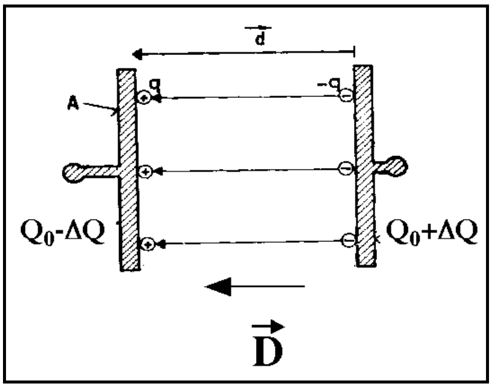


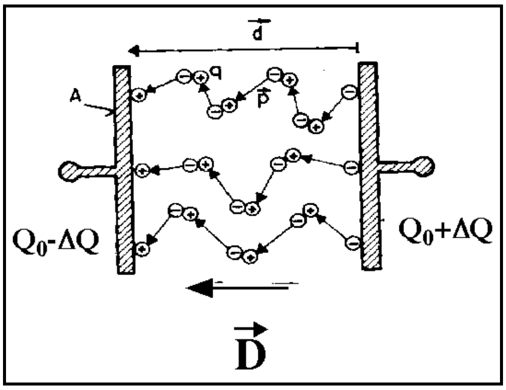


Diese molekularen Dipole können auf zwei Arten zustande kommen: zum einen kann das äußere elektrische Feld die Elektronenhülle gegenüber dem positiv geladenen Kern verschieben. Dieser Effekt tritt bei allen Materialien auf.

Asymmetrische Moleküle besitzen, wie bereits erwähnt, ein permanentes elektrisches Dipolmoment. Sind die Moleküle zufällig orientiert (z.B. in einer Flüssigkeit), so besitzt das Material normalerweise trotzdem kein makroskopisches Dipolmoment. Wir ein elektrisches Feld angelegt so wird die Orientierung der Dipole in Feldrichtung jedoch energetisch gegenüber den anderen Orientierungen bevorzugt. Damit entsteht im Mittel eine Polarisation, welche invers proportional zur Temperatur ist. Solche Materialien werden als paraelektrisch bezeichnet. Bei dielektrischen wie auch bei paraelektrischen Materialien erhält man im Schnitt eine bevorzugte Orientierung der Dipole in Feldrichtung, so dass die positiven Ladungen näher bei der negativ geladenen Platte liegen und umgekehrt.

Ordnet man (in Gedanken) die Dipole, so dass jeweils eine negative Ladung in der Nähe einer positiven liegt,



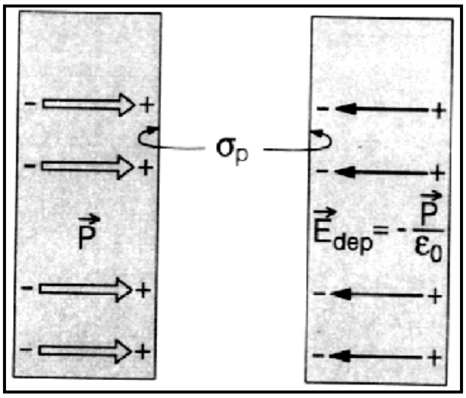


so realisiert man, dass die Ladungen im Inneren des Mediums sich gegenseitig kompensieren. Lediglich an der Oberfläche des Mediums bleiben Teilladungen zurück, welche entgegengesetzt zur Ladung auf den Kondensatorplatten sind. Das Material bleibt elektrisch neutral, es enthält jedoch ein Dipolmoment $\vec{P}$. Für viele Materialien ist dieses proportional zum elektrischen Feld $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \, \chi \, \vec{E} \, ,$$

wobei die Proportionalitätskonstante χ als Suszeptibilität bezeichnet wird.

3.2.9 Depolarisationsfeld



Dieses Dipolfeld erzeugt ein Depolarisationsfeld

$$\vec{E}_{dep} = -\,\vec{P}/\varepsilon_0 \, ,$$

welches dem äußeren Feld entgegengerichtet ist. Wenn wir das elektrische Feld (weit) außerhalb des Mediums mit E_0 bezeichnen erhalten wir im Material ein reduziertes Feld

$$\vec{E}_m = \vec{E}_0 + \vec{E}_{dep} = \vec{E}_0 - \chi \, \vec{E}_m \, .$$

Aufgelöst nach $\vec{E}_m$ erhält man

$$\vec{E}_m = \vec{E}_0/(\chi+1) \, .$$

Damit wird auch die Spannung zwischen den Platten auf den Wert $U = U_0/(\chi+1)$ reduziert. Man identifiziert somit

$$\varepsilon = 1 + \chi \, .$$

Da die Oberflächenladung konstant geblieben ist bleibt die elektrische Verschiebungsdichte D konstant. Somit gilt für ein Dielektrikum mit Suszeptibilität χ, resp. Dielektrizitätskonstante ε_r.

$$\vec{D} = \varepsilon_r \, \varepsilon_0 \, \vec{E} = \varepsilon_0 \, \vec{E} + \vec{P} .$$

Diese Ausdrücke stellen einen Spezialfall dar; allgemein hängt das Feld im Dielektrikum auch von dessen Form ab. Einen allgemeineren Ausdruck erhält man für ein Dielektrikum, das die Form eines Ellipsoids aufweist. In diesem Fall lautet der entsprechende Ausdruck

$$E_m = \frac{1}{1 + \square(\varepsilon_r - 1)} \, E_0 .$$

Die Konstante □ hängt von der Form des Dielektrikums ab. Sie beträgt

- □=1 für eine planparallele Platte senkrecht zu den Feldlinien (siehe oben),
- □=0 für einen langen zylindrischen Stab parallel zu den Feldlinien,
- □=1/2 für einen langen zylindrischen Stab senkrecht zu den Feldlinien,
- □=1/2 für eine Kugel.

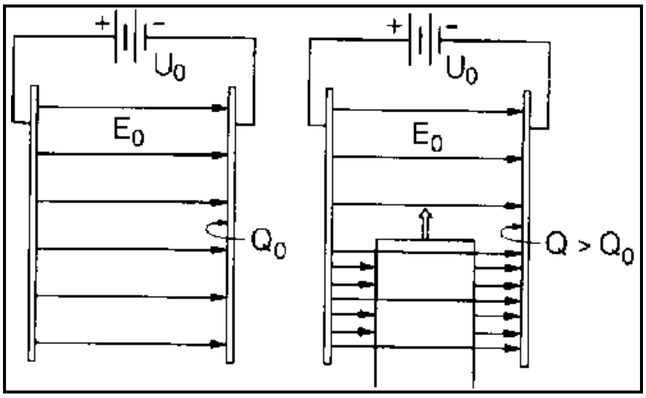
Da die Kapazität des Kondensators gegeben ist durch

$$C = Q/V = D \, A/(E \, d)$$

steigt sie durch das Einfügen des Dielektrikums auf

$$C = \varepsilon_r \, \varepsilon_0 \, A/d .$$

Diesen Effekt kann man auch beobachten wenn man die Platten an eine Spannungsquelle angeschlossen hat. In diesem Fall bleibt die elektrische Feldstärke E die gleiche wie ohne Dielektrikum; hingegen steigt die Ladung auf den Kondensatorplatten und damit die Verschiebungsdichte D = σ = Q/A. Die zusätzlichen Ladungen auf den Kondensatorplatten werden durch die Oberflächenladungen des Dielektrikums kompensiert.

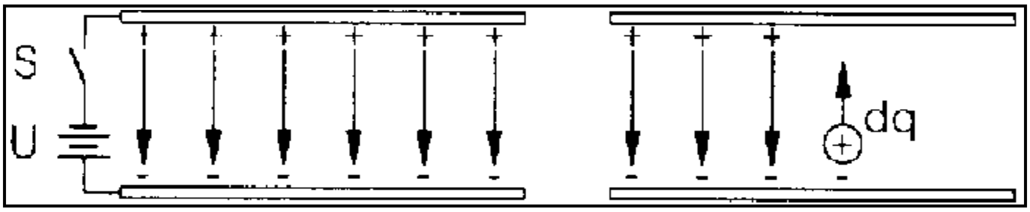


3.2.10 Energie des elektrischen Feldes

Exp. 47: Entladen eines Kondensators (Knall)

Das elektrische Feld enthält Energie; diese kann am einfachsten für einen Plattenkondensator berechnet werden.

Wird Ladung auf den Kondensator gebracht, so muss dafür eine Arbeit



$$W_{el} = \int_0^Q V\, dQ' = 1/C \int_0^Q Q'\, dQ' = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

aufgewendet werden. Diese Arbeit wird in Form elektrischer Feldenergie gespeichert. Wenn wir sie schreiben als

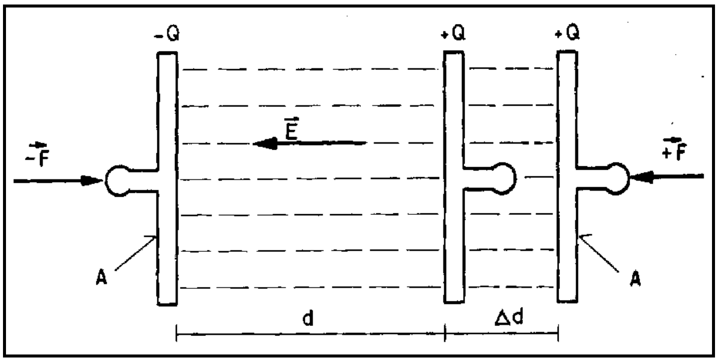
$$W_{el} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\, C(Ed)^2 = \frac{1}{2}\, \varepsilon_0\, \varepsilon_r\, A\, d\, E^2 = \frac{1}{2}\, \varepsilon_0\, \varepsilon_r\, V\, E^2\, ,$$

wobei V das Volumen zwischen den Platten darstellt, so sieht man, dass die Energiedichte des elektrischen Feldes

$$w_{el} = W_{el}/V = \frac{1}{2}\, \varepsilon_0\, \varepsilon_r\, E^2 = \frac{1}{2}\, \vec{D}\cdot\vec{E}$$

beträgt.

Wenn das Feld zwischen zwei Kondensatorplatten Energie enthält muss eine Kraft auf die Kondensatorplatten wirken; umgekehrt muss am System Arbeit geleistet werden, wenn man die Platten auseinander zieht. Bei einer solchen Operation bleibt die Feldstärke (und damit die Energiedichte) konstant, während das Volumen und damit die Gesamtenergie zunimmt. Um den Abstand um den Betrag Δd zu vergrößern benötigt man die Arbeit



$$W = A\, \Delta d\, w_{el} = A\, \Delta d\, \frac{1}{2}\, \varepsilon_0\, \varepsilon_r\, E^2 = F\, \Delta d\, .$$

Somit muss die Kraft auf jede der beiden Platten

$$F = \frac{1}{2}\, \varepsilon_0\, \varepsilon_r\, A\, E^2 = \frac{1}{2}\, C\, d\, E^2 = \frac{1}{2}\, C\, U\, E = \frac{1}{2}\, Q\, E$$

betragen.

Es mag zunächst erstaunen, dass hier nicht die gesamte Ladung mal die Feldstärke eingesetzt werden muss. Dies ist ein klassisches Beispiel dafür, dass in das Kraftgesetz $F = q\, E$ nicht das gesamte Feld eingesetzt werden muss, sondern das ungestörte Feld, welches ohne die „Probeladung“ vorhanden ist. Das Feld ohne Probeladung wird durch das Feld einer ebenen Ladungsverteilung gegeben, welches gleichmäßig auf beide Oberflächen einer dünnen Platte verteilt ist. Wie in Kapitel 3.1.8 hergeleitet beträgt es D = 1/2 Q/A, resp.

$$E_{ungest.} = \frac{1}{2} \frac{Q}{A\,\varepsilon_0} ,$$

während das „gestörte“ Feld zwischen den Kondensatorplatten

$$E_{gest.} = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\,\varepsilon_0}$$

beträgt, also einen Faktor 2 stärker ist.

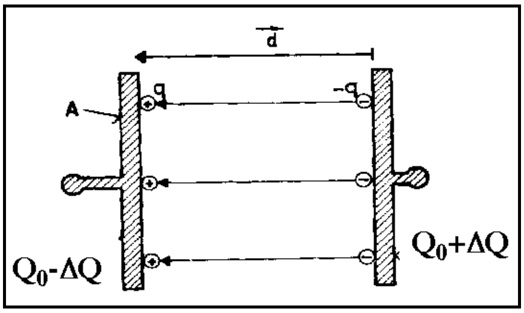
Diese Herleitung zeigt eine der Möglichkeiten auf, elektrische Einheiten wie Spannung oder Feldstärke auf eine mechanische Kraftmessung zurückzuführen.

Die Tatsache, dass die Energiedichte proportional zum Quadrat des Feldes ist führt dazu, dass es energetisch sinnvoller ist, das Feld über einen größeren Bereich zu verteilen; anders ausgedrückt: Feldlinien „stoßen sich ab“.

Die gleichen Gesetze für den Energieinhalt des elektrischen Feldes gelten auch für zeitabhängig Felder oder elektromagnetische Wellen. Dies erlaubt z.B. die Übertragung von Energie im Sonnenlicht, in Mikrowellen oder Lasern.

3.2.11 Kräfte auf Dielektrika in Feldrichtung

Die beiden Ladungsschwerpunkte in einem Dielektrikum werden vom Feld in entgegengesetzte Richtungen gezogen. Es besteht somit eine Zugspannung.



Die Oberflächenladungsdichte des Dielektrikums beträgt

$$\sigma = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} D .$$

Die Zugspannung (d.h. Kraft pro Fläche) erhalten wir wenn wir die Kraft auf diese ebene Ladungsverteilung im äußeren Feld E_0 berechnen. Wie wir beim Plattenkondensator gefunden hatten beträgt sie:

$$F/A = \frac{1}{2} \sigma E_0 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} D E_0 = \frac{1}{2} (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \varepsilon E_m^2 .$$

Diese Zugspannungen können zu einer messbaren Formänderung führen wenn die Dielektrizitätskonstante ε genügend groß ist. Dies ist vor allem in ferroelektrischen Materialien der Fall.

Eine Längenänderung aufgrund einer angelegten Spannung **Exp. 53a/b: piezoelektrischer Effekt** wird als piezoelektrischer Effekt bezeichnet. Man kann Piezokeramiken z.B. als Lautsprecher verwenden, aber auch als Stellelemente, welche sehr schnell und präzise Längenänderungen erzeugen können (z.B. im Rastertunnelmikroskop).

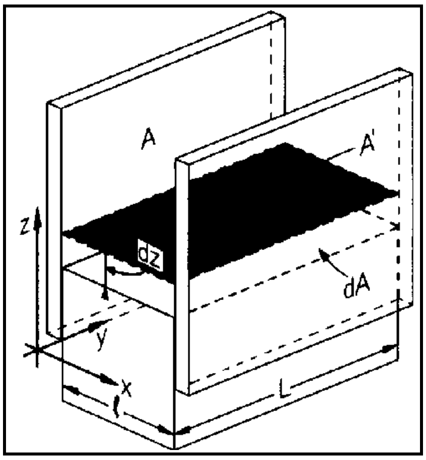
Umgekehrt erzeugt ein Druck auf ein solches Material eine Umorientierung der Dipole und dadurch eine Spannung. Man verwendet dies u. A. für Mikrophone. **Exp. 53c: Piezokeramik**

3.2.12 Kräfte auf Dielektrika senkrecht zur Feldrichtung

Durch das Einschieben eines Dielektrikums in einen Plattenkondensator sinkt die Feldstärke und damit die elektrische Feldenergie. Somit muss eine Kraft

$$\vec{F} = - \text{grad } E_{pot}$$

existieren, welche das Dielektrikum in den Spalt des Kondensators hineindrückt.



Besteht das Dielektrikum aus einer Flüssigkeit so wird sie in das Feld hineingezogen. Das System erreicht ein Gleichgewicht wenn der Druck der Flüssigkeitssäule gerade die elektrische Kraft kompensiert. Steigt das dielektrische Medium mit Dielektrizitätskonstante ε_r um die Höhe dz weiter in den Kondensator hinein so ändert die Kapazität

$$dC = d(\varepsilon_0\, \varepsilon_r\, A/\ell) = \varepsilon_0/\ell\, d(\varepsilon_r\, A) = \varepsilon_0\, (\varepsilon_r-1)\, L\, dz/\ell .$$

Damit ändert sich die elektrische Feldenergie um

$$dW_{el} = \frac{1}{2}\, U^2\, dC = \frac{1}{2}\, U^2\, \varepsilon_0\, (\varepsilon_r-1)\, L\, dz/\ell .$$

Die Kraft dW_{el}/dz kann man durch die Fläche $L\,\ell$ dividieren um die Spannung

$$\sigma_{el} = \frac{1}{2}\, (U/\ell)^2\, \varepsilon_0\, (\varepsilon_r-1) = \frac{1}{2}\, E^2\, \varepsilon_0\, (\varepsilon_r-1)$$

zu erhalten, welche die Flüssigkeit nach oben (in den Kondensator hinein) zieht.

Die Schwerkraft, die auf die Flüssigkeitssäule wirkt, erzeugt ebenfalls eine Spannung

$$F_G/(L\,l) = \rho\, g\, h\ .$$

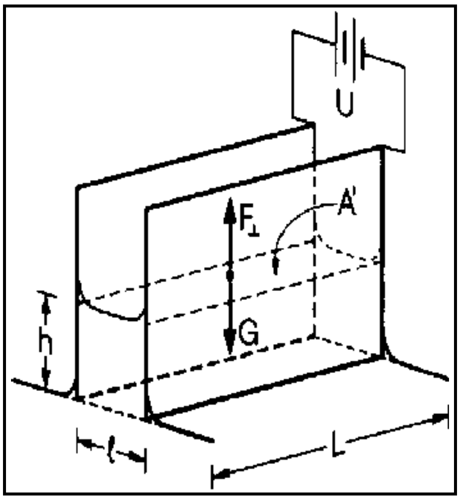
Die beiden Spannungen halten sich die Waage wenn

$$\frac{1}{2}\, E^2\, \varepsilon_0\, (\varepsilon - 1) = \rho\, g\, h\ .$$

Man kann diesen Ausdruck z.B. dazu verwenden, die Dielektrizitätskonstante zu bestimmen:

$$\varepsilon = 1 + 2\, \rho\, g\, h/(\varepsilon_0\, E^2)\ .$$

Im Experiment findet man bei 30 kV eine Steighöhe von ca. 1 cm.



Exp. 50a: Kraft auf Dielektrikum im inh. Feld