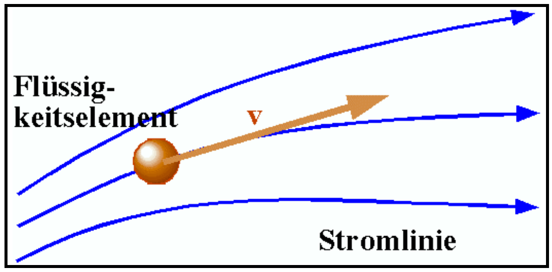
# 2.9 Hydrodynamik und Ärodynamik

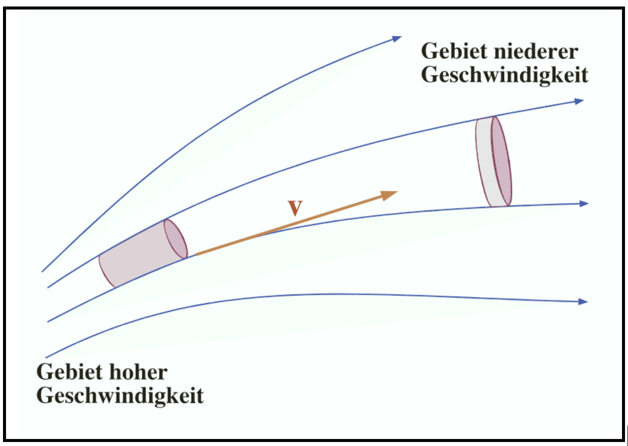
In diesem Kapitel werden ebenfalls Fluide diskutiert, wobei wir jetzt bewegte Medien betrachten. Der wichtigste Unterschied zwischen den strömenden Flüssigkeiten und strömenden Gasen ist, dass man bei Flüssigkeiten davon ausgehen kann, dass die Volumenänderungen der Flüssigkeit gering sind, d.h., dass es sich um ein inkompressibles Medium handelt. Im Falle der Aerodynamik (bei Gasen) muss die Kompressibilität berücksichtigt werden.

## 2.9.1 Stromlinien und Geschwindigkeitsfelder

Um ein strömendes Medium zu beschreiben gibt es verschiedene Methoden. Die Lagrange-Methode entspricht einer zeitlichen Verfolgung der Masseelemente □m. Einfacher ist die Euler-Methode bei der zu einem beliebigen Zeitpunkt die Geschwindigkeitsvektoren der einzelnen Masseelemente betrachtet werden.

Die Gesamtheit dieser Geschwindigkeitsvektoren wird als Geschwindigkeitsfeld bezeichnet. Zur Darstellung verwendet man meist Stromlinien. Dabei handelt es sich um orientierte Kurven, welche den Weg der Flüssigkeitselemente verfolgen. Die momentane Tangente an diese Kurven ergibt jeweils die lokale Richtung der Strömungsgeschwindigkeit.



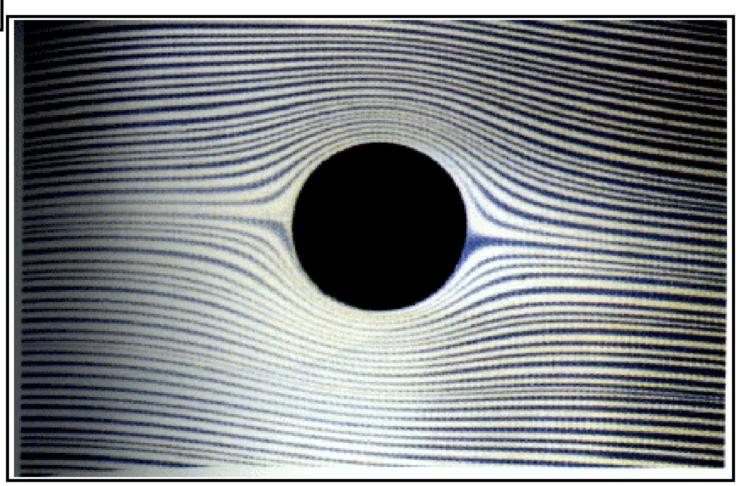



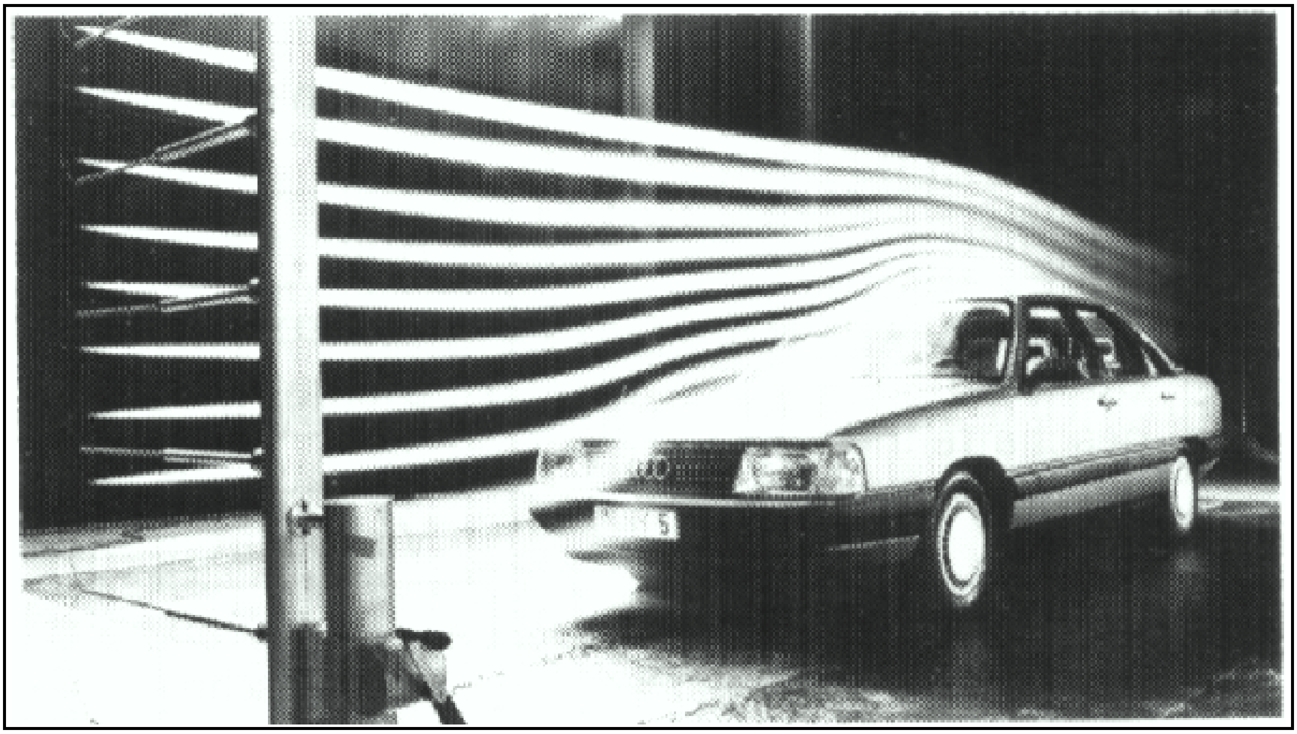

Die Dichte der Stromlinien ist ein Maß für den Betrag der Geschwindigkeit: Je größer die Anzahl der Stromlinien durch eine Fläche sind desto größer ist die Stromdichte und damit die lokale Geschwindigkeit.

**Exp. 81: Stromlinien**

Diese Stromlinien können auch sichtbar gemacht werden; sie sind nicht nur ein theoretisches Konzept. Man injiziert dafür z.B. gefärbtes Wasser oder kleine Partikel in das fließende Medium.

In diesem Beispiel werden die Stromlinien beim Umfließen eines Zylinders dargestellt. Sie zeigen, dass auf der Vorder- und Hinterseite ein Stau entsteht, also eine Region geringer Geschwindigkeiten, und auf beiden Seiten eine Region hoher Geschwindigkeiten.

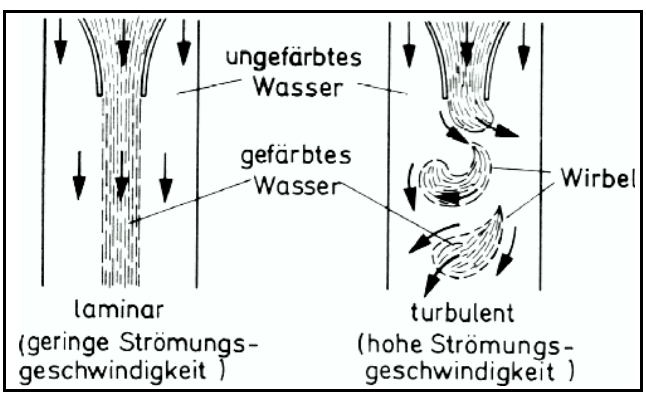




Das zweite Bild stellt entsprechende Untersuchungen an einem Automobil in einem Windkanal dar. Die Strömungslinien werden sichtbar gemacht indem Rauch in den Gasstrom geblasen wird. Solche Experimente spielen z.B. für den Entwurf von Fahrzeugen und Flugzeugen eine wichtige Rolle.

Strömungen werden als stationär bezeichnet wenn die Stromlinien zeitlich konstant sind. Es gibt laminare und turbulente Strömungen.

In diesem Beispiel geht die Strömung von laminar nach turbulent über.




Dies geschieht z.B. bei höherer Geschwindigkeit. Die Charakterisierung von turbulenten Strömungen gehört ins Gebiet der nichtlinearen Dynamik und kann in diesem Zusammenhang nicht diskutiert werden.

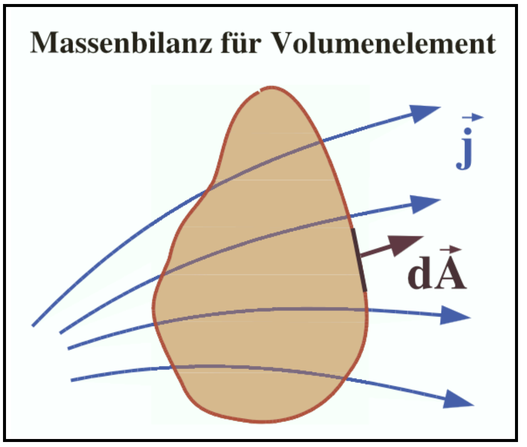
## 2.9.2 Kontinuitätsgleichung

Geschwindigkeiten in bewegten Flüssigkeiten beschreiben den Transport von Materie. Lokal kann dieser Transport durch die Massenstromdichte

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

quantifiziert werden.

Wir betrachten die Änderung der Masse in einem Volumen V aufgrund der Zu- und Abflüsse. Der Anteil des Massenstroms $d\dot{m}$ durch ein kleines Flächenelement $d\vec{A}$ ist




$$d\dot{m} = \vec{j} \cdot d\vec{A} = |\vec{j}|\, dA \cos\theta \;,$$

wobei $\theta$ den Winkel zwischen der Fließrichtung und der Oberflächennormalen darstellt. Durch Integration über die geschlossene Oberfläche ergibt die gesamte Änderung der Masse im Volumen

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \oint_A \rho\, \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0 \;,$$

da Masse weder erzeugt noch vernichtet wird. Die Gleichung besagt einfach, dass die Summe der Zu- und Abflüsse verschwinden muss. Sie kann über den Satz von Gauß

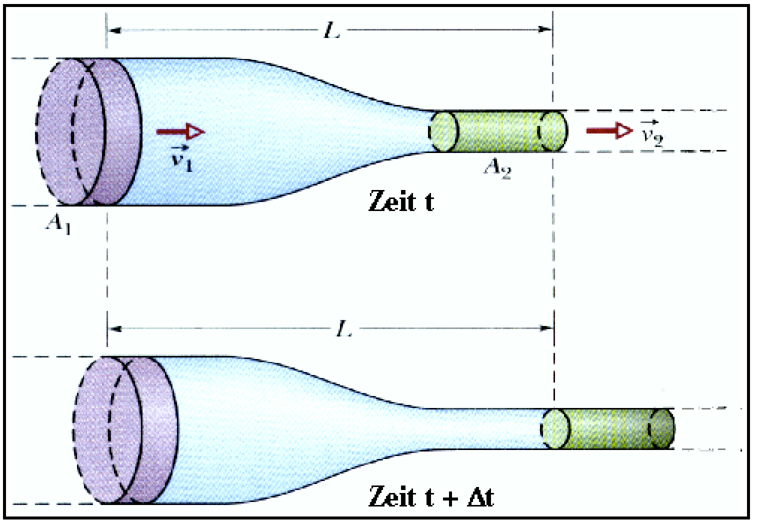
$$\oiint_O \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \qquad O = \text{Oberfläche},\ V = \text{Volumen}$$

auch geschrieben werden als

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \;,$$

da die Gleichung für beliebige Volumina V gelten muss. Dies ist eine Bedingung für das Geschwindigkeitsfeld: es enthält weder Quellen noch Senken.

Diese Aussage gilt für beliebige Körper. Wir können z.B. einen Flussschlauch betrachten, der auf der Außenseite von Flusslinien begrenzt wird ($\vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$) und an den Stirnflächen von zwei Scheiben mit Flächen $A_1$ und $A_2$. Da die Seitenwände durch Flusslinien gebildet werden fließt kein Material durch diesen Teil der Oberfläche. Damit sind Ein- und Ausfluss gegeben durch die Durchflussmenge durch die beiden Flächen links und rechts.



Die Flüssigkeitsmenge, welche pro Zeiteinheit durch eine Stirnfläche fließt, ist proportional zum Produkt aus Querschnittsfläche und Fließgeschwindigkeit v, $dm = \rho\, A\, v$, da die Geschwindigkeit senkrecht auf der Fläche steht. Bei konstanter Dichte kann die Massenbilanz somit geschrieben werden als

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

oder

$$v_2 = v_1 A_1/A_2.$$

Dies entspricht der Quantifizierung der oben gemachten Aussage, dass nahe beieinander liegende Stromlinien hohe Geschwindigkeiten markieren und geringe Stromliniendichte einer langsamen Geschwindigkeit entspricht.

Für kompressible Flüssigkeiten muss die Gleichung um die Dichte erweitert werden:

$$v_1 \rho_1 A_1 = v_2 \rho_2 A_2$$

Für wirbelfreie Strömungen kann man das Geschwindigkeitsfeld als Gradient eines Geschwindigkeitspotenzials $\varphi(\vec{r})$ schreiben:

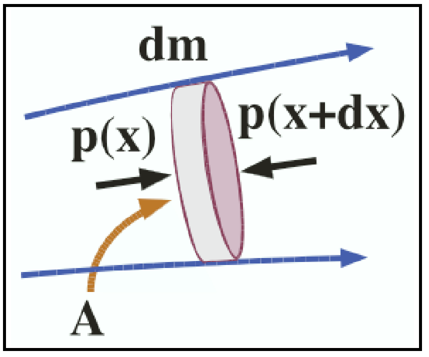
$$\vec{v}(\vec{r}) = \mathrm{grad}\, \varphi(\vec{r}) .$$

Solche Strömungen werden deshalb auch als Potenzialströmungen bezeichnet.

### 2.9.3 Bernoullische Gleichung

Wir betrachten eine Strömung in einem Rohr, das sich verengt. Die Zunahme der Geschwindigkeit aufgrund der Verengung bedeutet für die Flüssigkeitselemente eine Beschleunigung. Die dafür notwendige Kraft stammt aus einer Druckdifferenz.

Wir betrachten eine dünne Scheibe der Flüssigkeit. Die Masse des Zylinders mit Querschnittfläche A und Dicke dx beträgt



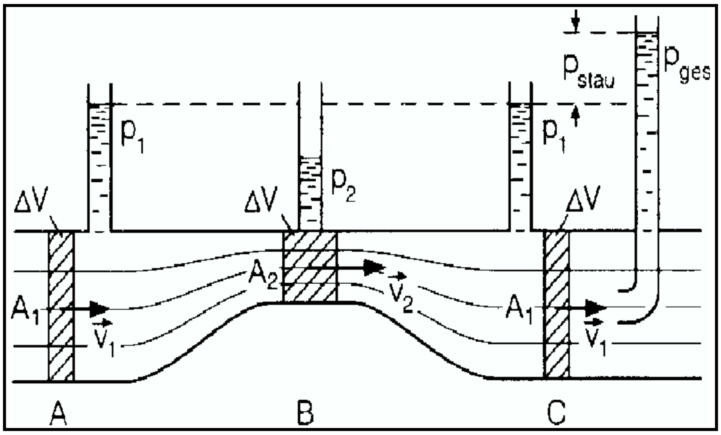

$$dm = \rho\, A\, dx.$$

Das Newton'sche Axiom für dieses Flüssigkeitselement lautet

$$dF = - A\, dp = a\, dm = (\rho\, A\, dx)\, dv/dt .$$

Hier bezeichnet $dp = p(x+dx) - p(x)$ die (infinitesimale) Druckdifferenz, a die Beschleunigung und $\rho$ die Dichte der Flüssigkeit. Offenbar ist die Beziehung unabhängig von der Querschnittfläche

$$- dp = \rho \, v \, dv \, .$$




Integration zwischen zwei Punkten 1 und 2 ergibt

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \, (v_2^2 - v_1^2)$$

oder

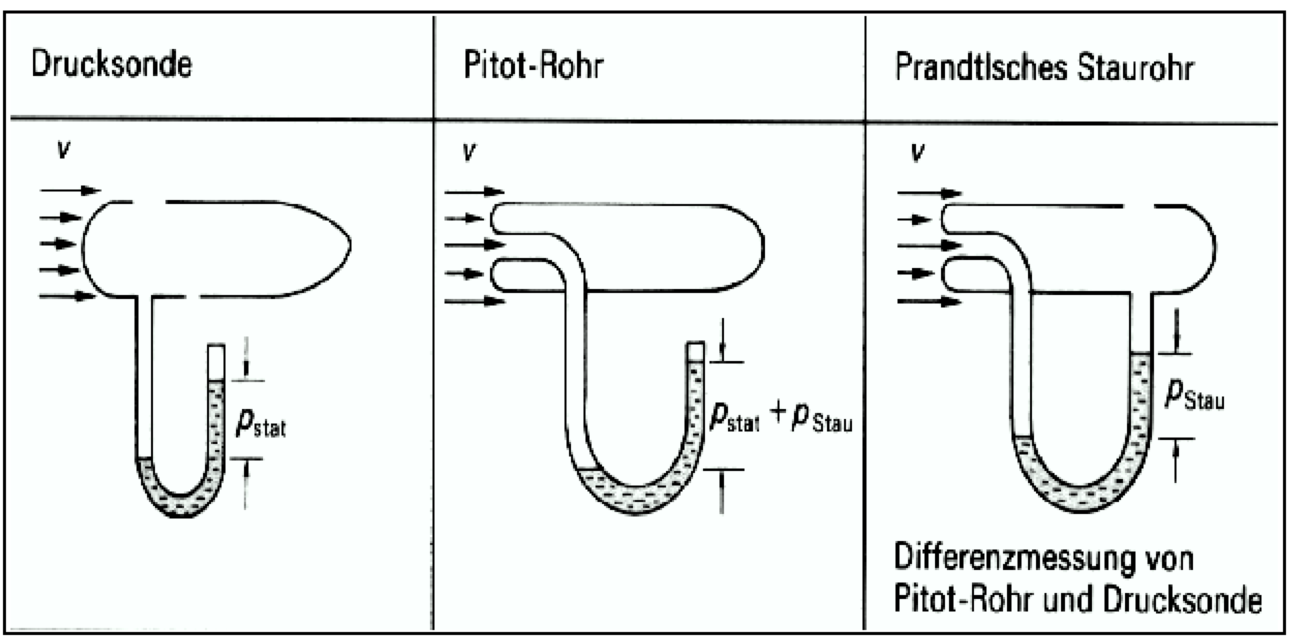
$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \, v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \, v_2^2 \, .$$

Offenbar wird eine Zunahme der Geschwindigkeit (Zunahme der kinetischen Energie) durch eine Abnahme des Druckes (Reduzierung der potenziellen Energie) kompensiert. Die Größe $\frac{1}{2} \rho \, v^2$ hat die Dimension eines Drucks und wird als Staudruck bezeichnet. Offenbar ist die Summe aus statischem Druck und Staudruck für eine reibungsfreie Flüssigkeit konstant. Man bezeichnet dies als Gesamtdruck und schreibt

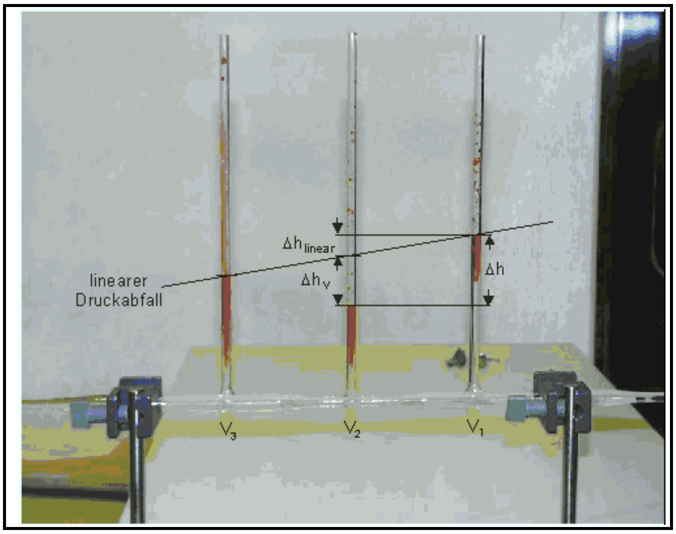
$$p + \frac{1}{2} \rho \, v^2 = p_{ges}$$

für eine reibungsfreie Flüssigkeit. Dies wird als die Bernoullische Gleichung bezeichnet (nach Daniel Bernoulli, 1700-1782).

Geeignete Druckmessgeräte können diese unterschiedlichen Beiträge messen. Die Drucksonde misst den statischen Druck, während das Pitot-Rohr den Gesamtdruck misst. Das Prandtl'sche

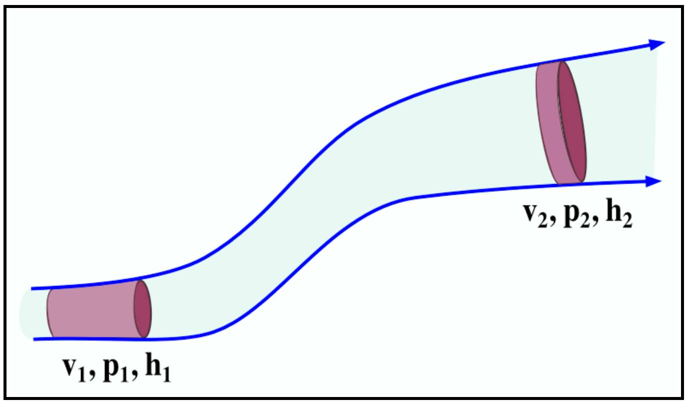


Staurohr besitzt zwei Öffnungen für den statischen und den Gesamtdruck, welche auf unterschiedlichen Seiten der Flüssigkeit angeordnet sind. Die Höhendifferenz ist dann direkt proportional zum Staudruck.




**Exp. 82. Bernoulli**

Die Voraussagen der Bernoulli Gleichung können experimentell leicht überprüft werden. Wir verwenden dafür ein Rohr, das in der Mitte verengt ist, an beiden Enden aber den gleichen (größeren) Querschnitt zeigt. In den beiden äußeren Rohren steigt das Wasser höher; an dieser Stelle ist offenbar der statische Druck höher als in der Mitte, wo das Wasser schneller fließt. Da die Strömung im Experiment nicht reibungsfrei ist findet man zusätzlich zum Staudruck auch einen linearen Druckabfall, welcher die Reibungsverluste enthält.




Eine etwas allgemeinere Form erhält man wenn man zusätzlich den Schweredruck berücksichtigt. Dann ist der Gesamtdruck zusätzlich von der Höhe abhängig; er beträgt dann

$$p_0 + \rho\, g\, h + \frac{1}{2}\, \rho\, v^2 = p_{ges}\,.$$

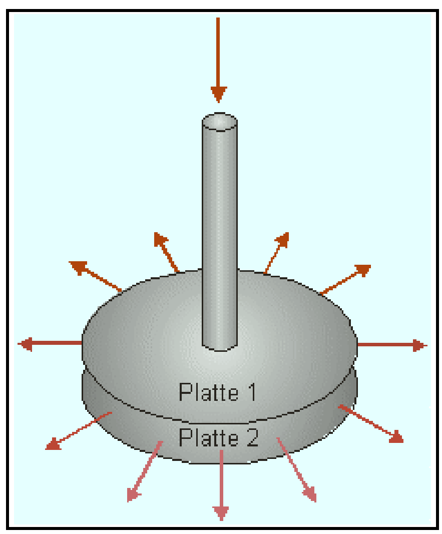
Insgesamt sind beide Formen der Bernoulli-Gleichung Ausdrücke der Energieerhaltung.

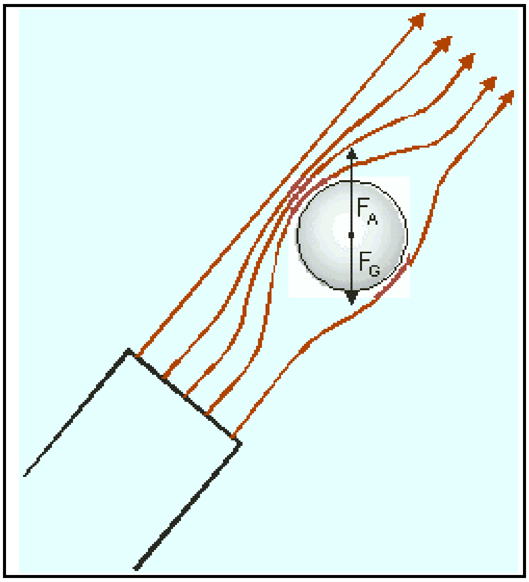
### 2.9.4 Demonstrationen zur Bernoulli-Gleichung

Einige interessante Konsequenzen können leicht demonstriert werden.

**E83) Bernoulli Anwendungen**

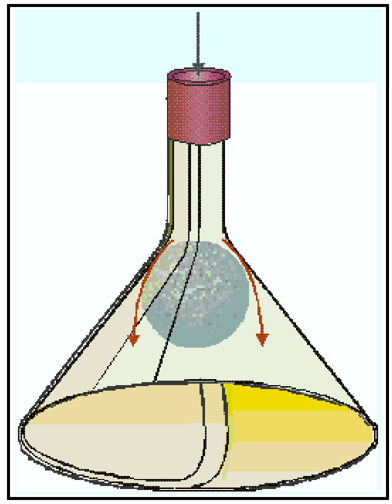
Bläst man durch ein Loch in einer Platte auf eine zweite Platte so dass das Gas zwischen den beiden Platten entweichen muss, so erzeugt die hohe Geschwindigkeit des Gases zwischen den beiden Platten einen Unterdruck, welcher stark genug ist, das Gewicht der Platte zu halten und die Kraft zu überwinden, welche durch die Impulsänderung des strömenden Gases auf die freie Platte ausgeübt wird.





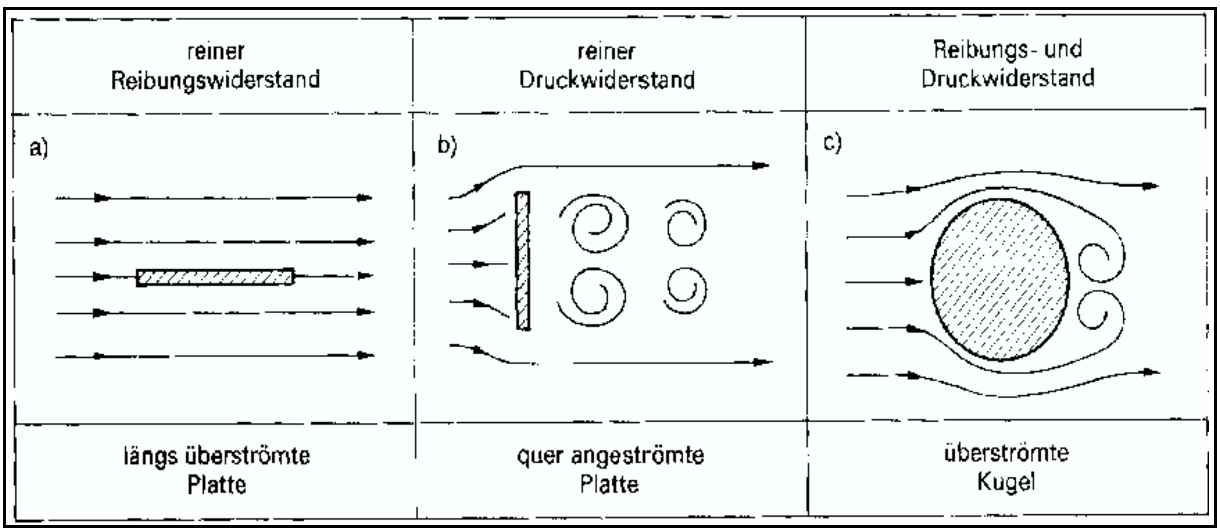

Bläst man auf einen Pingpong Ball schräg nach oben, so fällt er nicht zu Boden sondern gelangt in eine Gleichgewichtsposition etwas unterhalb der Mitte des Luftstrahls: an dieser Stelle ist die Geschwindigkeit des Gases oberhalb etwas größer als unterhalb, so dass eine Auftriebskraft wirkt, welche groß genug ist, die Gewichtskraft zu überwinden.

Verwendet man einen Trichter so kann man sogar nach unten auf den Ball blasen; da die Luft sich oberhalb des Balls schneller bewegt als unten fällt er nicht zu Boden.



## 2.9.5 Viskosität

Eine Flüssigkeit bewegt sich nie widerstandsfrei.




Der Strömungswiderstand kommt aufgrund von Reibungswiderstand und Druckwiderstand zustande. Der zweite Effekt kann vor allem auf Verwirbelungen zurückgeführt werden.

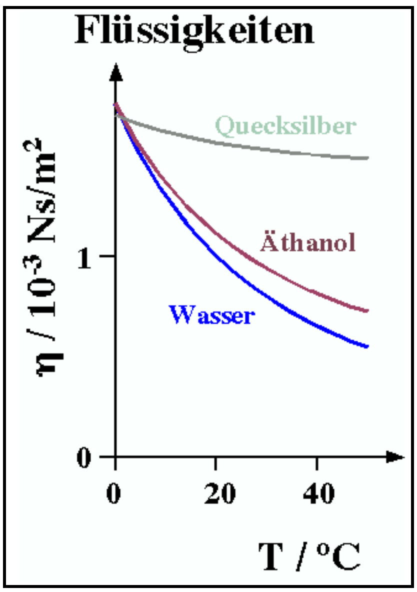
Der Reibungswiderstand ist in jeder Flüssigkeit vorhanden. Für viele Substanzen kann er beschrieben werden als eine Kraft

$$F_R = \eta\, A\, dv/dx\,. \qquad [\eta] = \mathrm{N\,s\,m^{-2}}$$

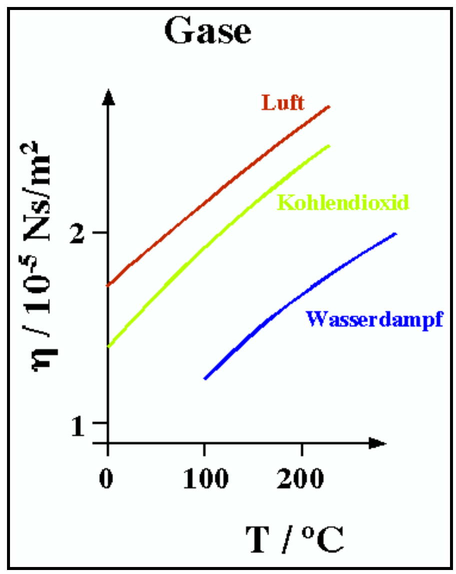
Diese ist proportional zur Fläche A auf der die Reibung stattfindet, und zur Änderung dv/dx der Geschwindigkeit mit der Entfernung x von der Oberfläche. Gilt diese Beziehung nicht, so spricht man von nicht-Newton'schen Flüssigkeiten. Während statische Scherkräfte in Flüssigkeiten verschwinden treten sie in der Form dynamischer Kräfte bei nicht verschwindender Viskosität auf. Diese quantifiziert somit die Scherkräfte in einem fluiden Medium. Bei sehr hoher Viskosität (Glas) verhält sich eine Flüssigkeit praktisch wie ein Festkörper.

Die Proportionalitätskonstante $\eta$ zwischen Kraft und Fläche mal Geschwindigkeitsgradient wird als Viskosität oder Zähigkeit bezeichnet. Neben der SI-Einheit N s / m$^2$ wird häufig auch noch die ältere Einheit Poise (= 0.1 N s / m$^2$) verwendet. Sie stellt eine Materialeigenschaft dar, welche stark von der Temperatur abhängt.

Die Viskosität von Wasser und ähnlichen Flüssigkeiten liegt bei etwa $10^{-3}$ N s m$^{-2}$, die Werte für Gase etwa hundertmal niedriger; da die Dichte von Luft etwa 1000 mal niedriger ist als die von Wasser, ist aber die Viskosität pro Masse bei Luft größer als bei Wasser.

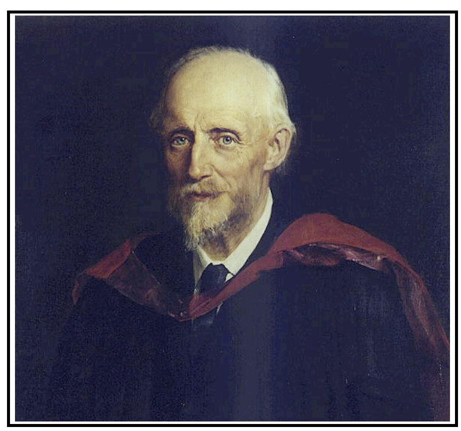



Die Viskosität von Flüssigkeiten nimmt mit steigender Temperatur ab, da dann die molekularen Bindungen gegenüber der Bewegung der Moleküle an Bedeutung verlieren. Das Extrembeispiel dafür ist Glas, wo die Viskosität beim Abkühlen kontinuierlich um viele Größenordnungen zunimmt.




Die Viskosität von Gasen nimmt dagegen mit steigender Temperatur zu, da sie auf der Bewegung von Molekülen beruht, welche mit der Temperatur steigt.

Die Viskosität spielt auch eine wichtige Rolle bei der Charakterisierung von Strömungen. So wird der Übergang von laminaren zu turbulenten Strömungen oder die Art des Strömungswiderstandes durch das Verhältnis aus kinetischer Energie zu Reibungsenergie beeinflusst. Ist dieses Verhältnis gleich so spricht man von ähnlichen Strömungen.

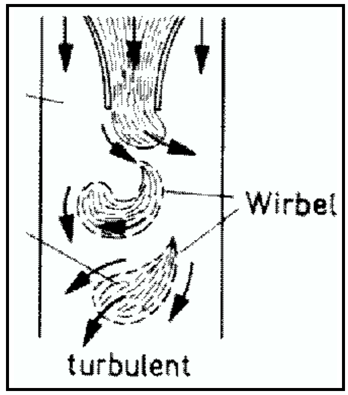


Ob zwei Strömungen ähnlich sind kann man einfach anhand der dimensionslosen Reynolds-Zahl (nach Osborne Reynolds, 1842-1912) bestimmen:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\, v\, d}{\eta} . \qquad [\mathrm{Re}] = 1$$

Hier stellen $\rho$ und $\eta$ die Dichte und Viskosität des Mediums, v die Strömungsgeschwindigkeit und d eine typische Dimension des Körpers dar.

Bei kleinen Geschwindigkeiten (und damit kleinen Reynolds-Zahlen) sind Strömungen laminar, bei großen Reynolds-Zahlen werden sie turbulent.




## 2.9.6 Strömungswiderstand

Die viskose Reibungskraft wirkt als Bremskraft für die Flüssigkeit und führt gleichzeitig dazu, dass strömende Flüssigkeiten eine Kraft auf den Behälter oder den umströmten Körper ausüben. Man schreibt diese geschwindigkeitsproportionale Kraft als

$$F_R = - k\, v\, . \qquad [k] = \mathrm{N\, s / m}$$

Die Proportionalitätskonstante k wird als Widerstandsbeiwert bezeichnet. Sie beträgt z.B. für eine Kugel mit Radius r

$$k_K = 6\, \pi\, \eta\, r\, .$$

Dies wird als Stokes'sches Reibungsgesetz bezeichnet.

Fällt eine Kugel durch ein viskoses Medium so erreicht sie eine gleichförmige Geschwindigkeit wenn sich die Schwerkraft und die Reibung aufheben:

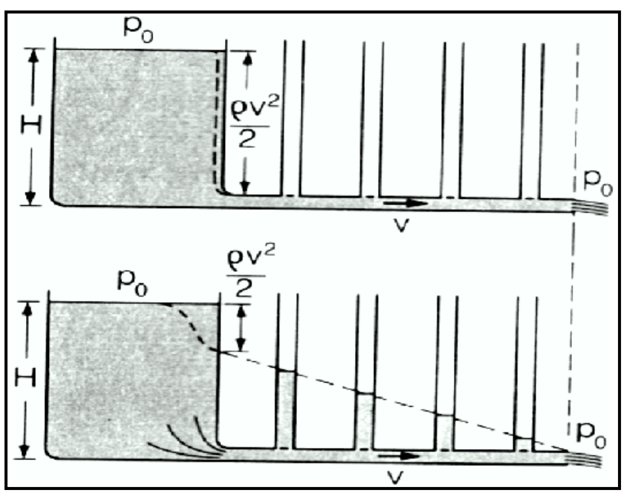
$$F_G = g\, (\rho_k - \rho_{fl})\, 4\, \pi/3\, r^3 = 6\, \pi\, \eta\, r\, v = F_R\, .$$

Dies ist offenbar der Fall wenn

$$v = (g\, (\rho_k - \rho_{fl})\, 4\, \pi/3\, r^3)/(6\, \pi\, \eta\, r) = \frac{2}{9}\, \frac{r^2 g}{\eta} (\rho_k - \rho_{fl}) \quad .$$

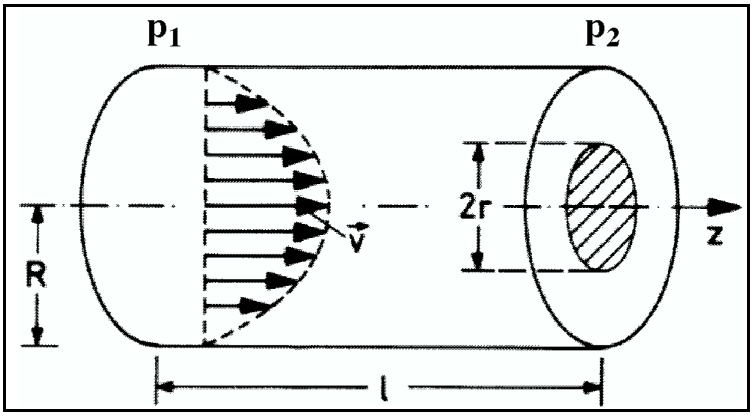
Die Bestimmung der Sinkgeschwindigkeit einer Kugel ist deshalb eine der Möglichkeiten, die Viskosität einer Flüssigkeit zu bestimmen.

Der Strömungswiderstand führt dazu, dass der Druck in einem System nicht gleichmäßig verteilt ist, sondern abfällt in Richtung der Strömung (siehe Versuch 82 Bernoulli).




## 2.9.7 Rohrdurchfluss

Der Strömungswiderstand beschränkt u.a. auch den Durchfluss durch ein Rohr.




Um den Durchfluss zu berechnen teilt man das Flüssigkeitsvolumen in konzentrische Zylinder ein. Die Flüssigkeitskomponenten in der Nähe der Rohroberfläche werden durch die Reibung am stärksten gebremst und bewegen sich deshalb am langsamsten; die Komponenten in der Mitte werden am wenigsten gebremst und bewegen sich am schnellsten. Auf einen Flüssigkeitszylinder mit Radius r wirkt die Reibungskraft an seiner Außenwand

$$F_R = \eta\, 2\,\pi\, r\, \ell\, dv/dr\ .$$

Diese muss kompensiert werden durch eine Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_1$, welche von außen erzeugt werden muss, um die Strömung aufrecht zu erhalten. Die Druckkraft fu diesen Zylinder beträgt

$$F_p = -\,\Delta p\,\pi\, r^2\ .$$

Im dynamischen Gleichgewicht sind die beiden Kräfte entgegengesetzt und gleich groß, so dass

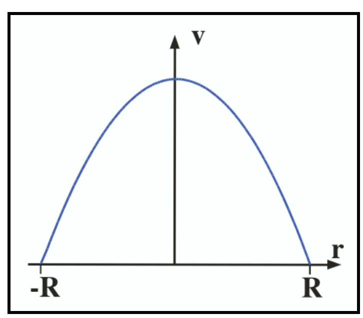
$$\eta\, 2\,\pi\, r\, \ell\, dv = \Delta p\,\pi\, r^2\, dr$$

oder

$$dv = \frac{\Delta p}{2\,\eta\,\ell}\, r\, dr\ .$$

Die Randbedingung ist, dass die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Rohrs verschwindet, $v(r{=}R) = 0$. Damit ergibt die Integration

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\,\eta\,\ell}\,(r^2 - R^2)\ .$$




Die Geschwindigkeit zeigt somit eine parabolische Abhängigkeit vom Abstand vom Zentrum des Rohrs.

### 2.9.8 Das Gesetz von Hagen-Poiseuille

Der Maximalwert der Geschwindigkeit beträgt (in der Mitte des Rohrs)

$$v_{max} = v(0) = -\,\frac{\Delta p}{4\,\eta\,\ell}\, R^2.$$

Sie ist somit positiv wenn $\Delta p$ negativ ist, d.h. der Druck abfällt.

Die mittlere Geschwindigkeit erhält man als

$$\bar{v} = \frac{1}{\pi R^2} \int_{0,R} v(r)\, 2\pi r\, dr = \frac{1}{\pi R^2} \frac{\Delta p}{4\eta\ell} \int_{0,R} (r^2 - R^2)\, 2\pi r\, dr =$$

$$= \frac{\Delta p}{2R^2 \eta \ell} \left[ \frac{r^4}{4} - \frac{R^2 r^2}{2} \right]_0^R = - \frac{\Delta p}{2R^2 \eta \ell} \frac{R^4}{4} = \frac{-\Delta p\, R^2}{8\eta\ell} = \frac{1}{2} v_{max}.$$

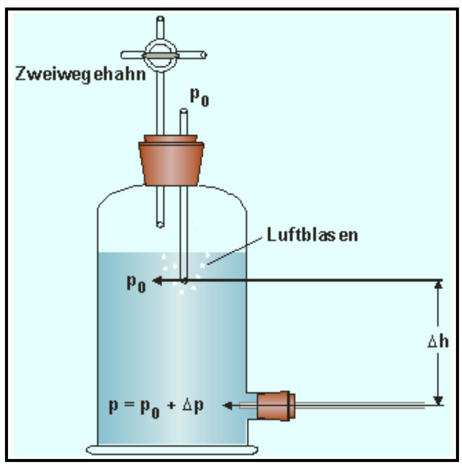
Der gesamte Durchfluss durch das Rohr beträgt demnach

$$I = \bar{v}\, A = \frac{-\Delta p\, \pi R^4}{8\eta\ell}.$$

Dies ist bekannt als das Gesetz von Hagen-Poiseuille: Der Durchfluss durch ein gerades Rohr ist proportional zur vierten Potenz des Rohrradius, zum Druckabfall $\Delta p/\ell$ und invers proportional zur Viskosität $\eta$.

## E84: Hagen-Poiseuille

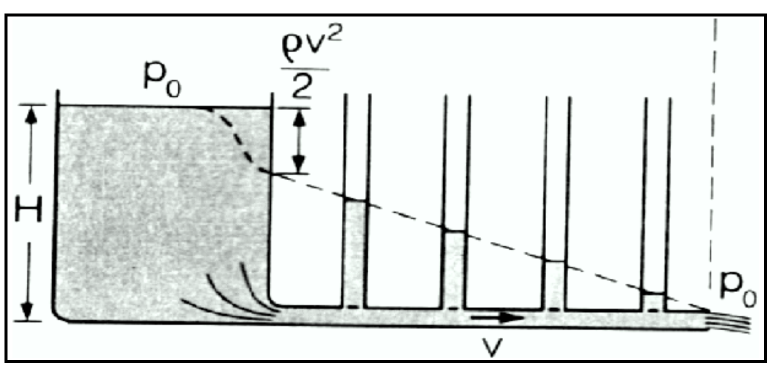
Im Experiment wird der konstante Wasserdruck dadurch erzeugt, dass bei sinkender Flüssigkeitssäule ein abnehmender Luftdruck über der Flüssigkeit steht: es wird nur soviel Luft nachgezogen, dass am unteren Ende des Rohres gerade der Druck $p_0$, d.h. der atmosphärische Außendruck entsteht. Es wird die Flüssigkeitsmenge gemessen, welche in 30 Sekunden durch jeweils ein Rohr mit gegebenem Querschnitt fließt. Das Verhältnis der beiden Rohr-Innendurchmesser beträgt 0.8 / 1.5 mm; wir erwarten somit ein Verhältnis der Flüssigkeitsmengen von $(1.5/0.8)^4$ = 12.4. Experimentell finden wir ein Verhältnis von ca. 12.




Die Druckdifferenz, welche benötigt wird, um eine mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ durch das Rohr zu erzielen, beträgt

$$\Delta p = - \bar{v}\, \frac{8\eta\ell}{R^2},$$

d.h. sie sinkt mit der Querschnittsfläche des Rohrs, während die Durchflussmenge ansteigt.



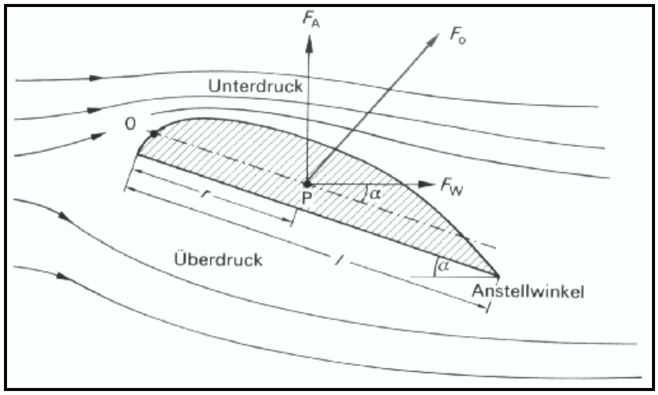

Daraus können wir auch den Widerstandsbeiwert für die Strömung durch das Rohr berechnen als

$$k = F / \bar{v} = \Delta p \, \pi \, R^2 / \bar{v} = 8 \, \eta \, \ell \, \pi \, .$$

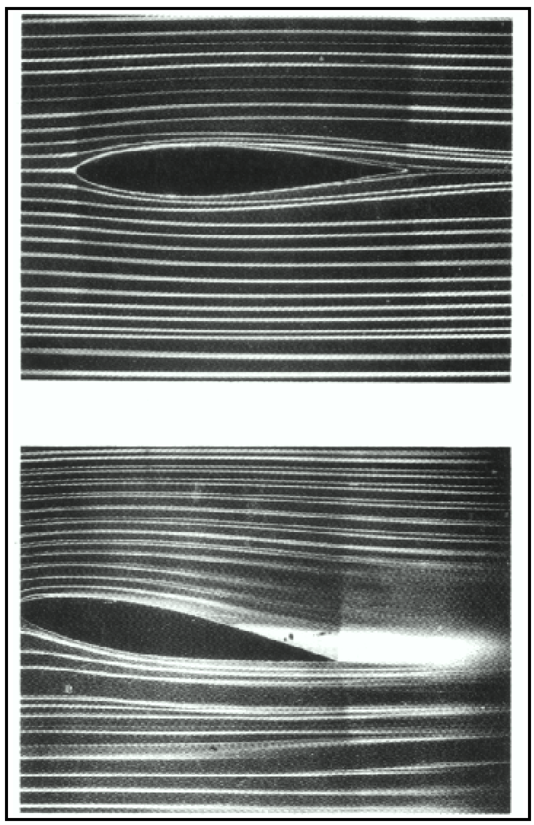
Er hängt somit nur von der Viskosität des Mediums und der Länge der Rohres ab. Die zunehmende Oberfläche wird gerade kompensiert durch den kleineren Gradienten der Geschwindigkeit.

### 2.9.9 Strömende Gase (Aerodynamik)

Bei der Diskussion der Strömung von Gasen muss zusätzlich die Kompressibilität berücksichtigt werden. Qualitativ bleiben die bisher diskutierten Ergebnisse jedoch erhalten. Quantitative Ergebnisse sollen hier auch nicht erhalten werden.




So kann z.B. der Auftrieb eines Flugzeugflügels mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung diskutiert werden: Auf der Oberseite ist die Geschwindigkeit höher und darum der Druck geringer als auf der Unterseite. Die gesamte am Flügel angreifende Kraft besteht aus der Auftriebskraft und der Widerstandskraft, welche mit Hilfe eines Motors überwunden wird.



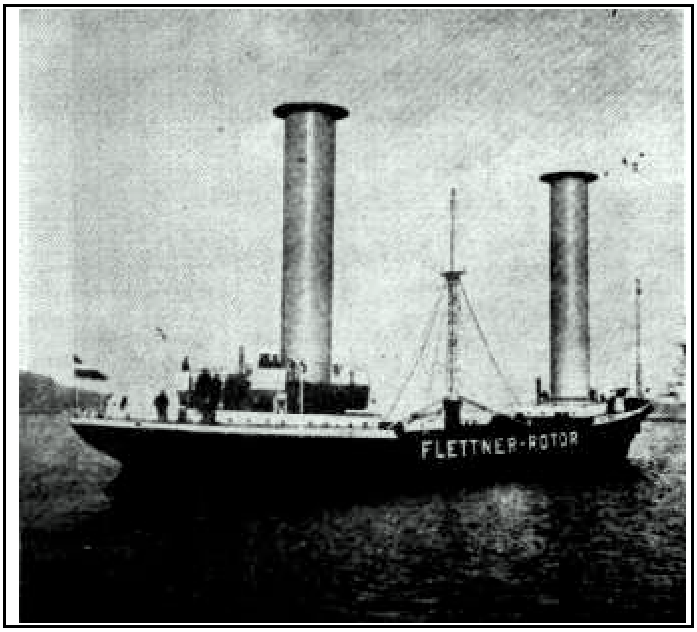
Voraussetzung für diesen Effekt ist eine laminare Strömung. Macht man den Anstellwinkel zu groß so wird die Strömung am hinteren Ende des Flügels turbulent. Damit wird die Geschwindigkeit geringer und der Druck höher, so dass der Auftrieb „abbricht". Man spricht vom Strömungsabriss.

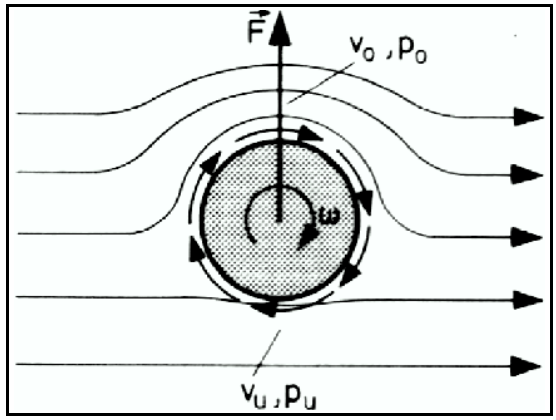
**Simulationen**

Da es auf diesem Gebiet häufig nicht mehr möglich ist, analytische Lösungen zu erhalten, haben numerische Simulationen große Bedeutung erhalten.

Ähnliche Strömungsprofile findet man auch bei Segelbooten oder Windsurfern.

Eine etwas andere Anwendung des Bernoulli'schen Prinzips verwendet der Flettner-Rotor, der z.T. für Segelschiffe verwendet wurde. Das zu Grunde liegende Prinzip wird als Magnus Effekt bezeichnet. Das Schiff verwendet senkrecht stehende Zylinder, welche um ihre Achse rotieren.




Von der Seite anströmende Luft fließt dann aufgrund der Oberflächenreibung bevorzugt in Drehrichtung im den Zylinder. Auf der Vorderseite ist deshalb die Strömungsgeschwindigkeit größer und der statische Druck geringer. Das Schiff erhält damit eine Kraft in Vorwärtsrichtung.

## Exp. 83b: Flettner-Rotor

Im Experiment wird dazu eine Kunststoffrolle wie ein Jojo an einer Schnur fallengelassen so dass sie sich dabei dreht. Dadurch erhält man die Kombination von Drehung und Relativgeschwindigkeit, welche für den Magnus-Effekt benötigt werden: die Rolle fällt in einem Bogen.

Bei der Behandlung von Strömungen in Gasen muss außerdem auch die endliche Schallgeschwindigkeit berücksichtigt werden. Diese liegt in Gasen niedriger und kann (aufgrund des geringeren Widerstandes) leichter erreicht werden. In der Nähe und oberhalb der Schallgeschwindigkeit verhalten sich Fluide qualitativ anders als unterhalb. Das Verhältnis von Geschwindigkeit v zu Schallgeschwindigkeit $v_S$ wird durch die dimensionslose Mach'sche Zahl

$$M = v / v_S$$

gemessen.