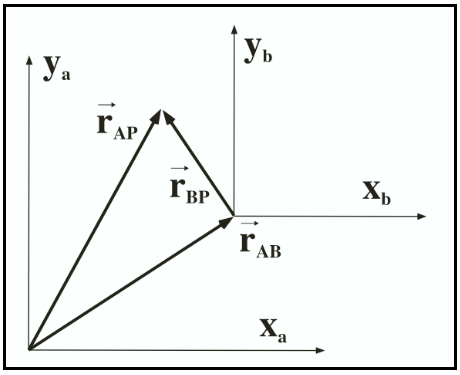
2.6 Mechanik in bewegten Bezugsystemen

2.6.1 Galilei'sche Relativität

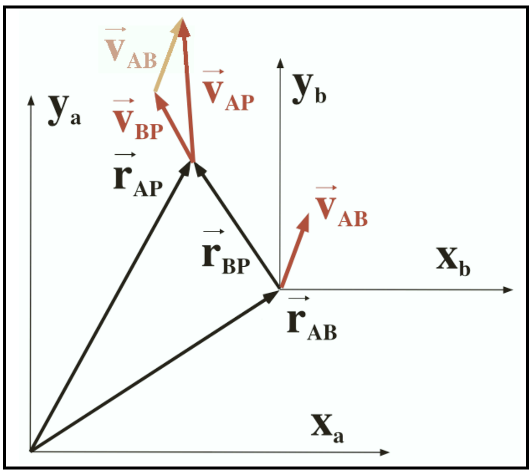
Die Beschreibung einer Bewegung hängt ab vom verwendeten Bezugssystem: Wenn jemand in einem Eisenbahnwagen einen Ball aufwirft so hängt die Form der Bahnkurve davon ab ob der Betrachter ebenfalls in der Eisenbahn sitzt oder auf dem Bahnsteig steht. Man ist grundsätzlich frei in der Wahl des Bezugsystems, d.h. man kann auswählen welches Bezugsystem man verwendet um die beobachteten Phänomene zu beschreiben. Es gibt meist ein Bezugsystem, welches eine besonders einfache Beschreibung ermöglicht. Vor allem ist nicht garantiert, dass in jedem Bezugsystem die Newton'schen Axiome erfüllt sind. Ist dies der Fall, so bezeichnet man das System als Intertialsystem. Es gibt beliebig viele unterschiedliche Inertialsysteme.

Zunächst kann man jedes Inertialsystem in ein anderes transformieren wenn man eine Translation oder Rotation vornimmt. Außerdem kann man das Bezugsystem immer mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber einem Inertialsystem verschieben und erhält ein weiteres Inertialsystem. Die Tatsache, dass alle diese Systeme gleichwertige Möglichkeiten für die Beschreibung der beobachteten Phänomene darstellen bedeutet, dass absolute Geschwindigkeit keine Bedeutung hat. Ähnlich bedeutet die Tatsache, dass der Ursprung des Koordinatensystems frei wählbar ist, dass absolute Position keine Bedeutung hat. Aus der Voraussetzung, dass die physikalischen Gesetze gültig sind unabhängig von der (konstanten) Bewegung des Bezugsystems kann man u. a. die Erhaltung des linearen Impulses herleiten.



Wir betrachten zunächst zwei Bezugsysteme, welche gegeneinander in Ruhe sind, aber einen unterschiedlichen Ursprung besitzen. Ist der Ursprung des Systems B im System A am Ort $\vec{r}_{AB}$, und der Ortsvektor des Punktes P im System B $\vec{r}_{BP}$, so ist offenbar der Ortsvektor $\vec{r}_{AP}$ im System A

$$\vec{r}_{AP} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP}.$$



Bewegt sich das System B gegenüber dem System A mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}_{AB}$ und ist die Position zum Zeitpunkt t = 0 $\vec{r}_{AB}(0)$, so gilt offenbar zur Zeit t

$$\vec{r}_{AB}(t) = \vec{r}_{AB}(0) + \vec{v}_{AB}\, t\,.$$

Für einen Punkt P, der sich gegenüber dem System B mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}_{BP}$ bewegt

$$\vec{r}_{BP}(t) = \vec{r}_{BP}(0) + \vec{v}_{BP}\, t$$

gilt somit

$$\vec{r}_{AP}(t) = \vec{r}_{AB}(t) + \vec{r}_{BP}(t) = \vec{r}_{AB}(0) + \vec{r}_{BP}(0) + \vec{v}_{AB}\, t + \vec{v}_{BP}\, t = \vec{r}_{AP}(0) + \vec{v}_{AP}\, t\ ,$$

wobei die Geschwindigkeit $\vec{v}_{AP}$ des Punktes gegenüber dem System A durch die Vektorsumme

$$\vec{v}_{AP} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BP}$$

gegeben ist. Die Geschwindigkeit im Bezugsystem A ist somit gegeben durch die Summe aus der Geschwindigkeit im Bezugsystem B und der Relativgeschwindigkeit der beiden Bezugsysteme.

2.6.2 Gleichförmig beschleunigte Bezugsysteme

Die Behandlung von gleichförmig beschleunigten Bezugsystemen ist zunächst analog zur Behandlung von Bezugsystemen, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen. Wir betrachten hier nur den einfachen Fall, dass die beiden Systeme zum Zeitpunkt t = 0 identisch sind, das System B gegenüber dem System A jedoch gleichförmig beschleunigt wird mit $\vec{a}_{AB}$. In beiden Systemen gilt die übliche Kinematik. Für den Punkt P, der gegenüber System B mit $\vec{a}_{BP}$ beschleunigt wird findet man im System A in Analogie zur obigen Herleitung für die Geschwindigkeiten die Beschleunigung

$$\vec{a}_{AP} = \vec{a}_{AB} + \vec{a}_{BP}\ .$$

Für Geschwindigkeit und Ort gilt mit bei $\vec{r}_{AB}(0)=0$, $\vec{v}_{AB}(0)=0$

$$\vec{v}_{AP} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BP} = \vec{a}_{AB}\, t + \vec{v}_{BP}\ .$$

$$\vec{r}_{AP} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP} = \vec{a}_{AB}\, t^2/2 + \vec{r}_{BP}\ .$$

Da die Beschleunigung in den beiden Bezugsystemen unterschiedlich ist können Newtons Axiome nicht in beiden Systemen gelten. Gelten sie z.B. im System A und ist die resultierende Kraft auf den Körper

$$\vec{F} = m\, d\vec{v}_{AP}/dt = m\, \vec{a}_{AP} = m\, (\vec{a}_{AB} + \vec{a}_{BP})\ ,$$

so können wir im Bezugsystem B schreiben

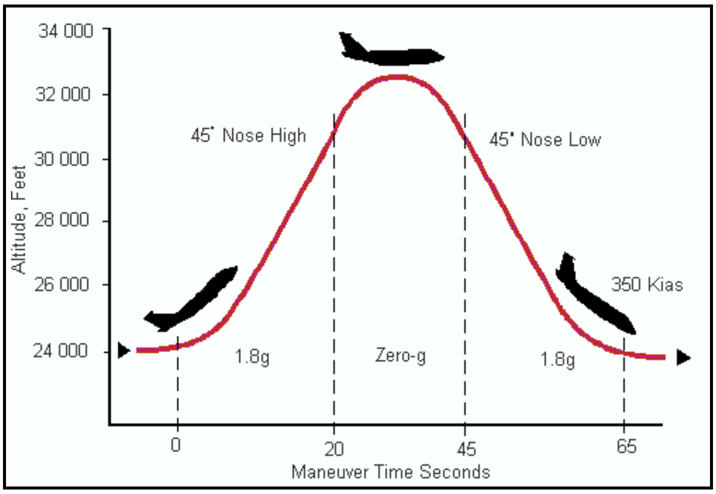
$$m\,\vec{a}_{BP} = m\,(\vec{a}_{AP} - \vec{a}_{BP}) = \vec{F} - m\,\vec{a}_{AB}\,.$$

Der zusätzliche Term in der Bewegungsgleichung kann als scheinbare Kraft, als Trägheitskraft interpretiert werden. Wir spüren sie z.B. beim Anfahren eines Aufzugs: beschleunigt der Aufzug nach oben, so drückt uns eine Kraft nach unten, welche proportional zur Beschleunigung und zu unserer Masse ist. Geht man weiter und verwendet ein Bezugsystem, welches mit der Erdbeschleunigung g nach unten beschleunigt wird, so verschwindet scheinbar die Schwerkraft.

Dies wird z.B. im Fallturm Bremen ausgenutzt: dort werden Experimente in der Schwerelosigkeit durchgeführt, die sonst nur im Weltraum möglich sind. So können für Kurzzeitexperimente die hohen Kosten einer Weltraumexpedition eingespart werden. In dem 110 m hohen Rohr des Turms wird eine Fallkapsel hochgezogen und losgelassen.

Während des freien Falls von knapp fünf Sekunden herrscht in der Kapsel Schwerelosigkeit. Das Fallrohr wird luftleer gepumpt, um Störungen durch Luftreibung zu vermeiden.

Längere Zeiten von Schwerelosigkeit kann man in einem Spezialflugzeug der NASA erleben. Dieses fliegt steil nach oben und folgt dann für ca. 25 s einer Parabel. Dieser Teil der Flugbahn entspricht einer Wurfparabel, d.h. das Flugzeug fliegt mit konstanter Horizontalgeschwindigkeit und einer vertikalen Be-



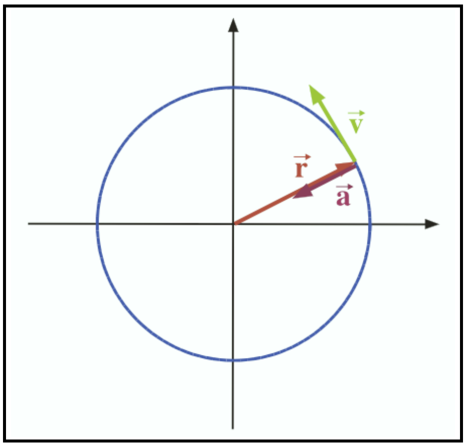
schleunigung nach unten von 9.81 ms^{-2}.

Während dieser Zeit sind die Passagiere praktisch schwerelos.

Während Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft von der Wahl des Bezugsystems abhängen gilt dies nicht für Abstände oder Geschwindigkeitsdifferenzen: diese sind im Rahmen der klassischen Mechanik nicht von der Wahl des Bezugsystems abhängig.

2.6.3 Kreisbewegung

Ein Spezialfall der Bewegung in zwei (oder drei) Dimensionen ist die Kreisbewegung. Bewegt sich ein Massenpunkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn, so kann sein Ort und seine Geschwindigkeit mit einem dreidimensionalen Vektor beschrieben werden. Häufig genügt es jedoch wenn man seine Bewegung mit einer einzigen Koordinate beschreibt, dem Winkel φ bezüglich der x-Achse, gemessen vom Zentrum des Kreises. Die entsprechende Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\varphi/dt$ entspricht dann ebenfalls einer skalaren Größe. In drei Dimensionen wird sie als Vektor dargestellt, der senkrecht auf dem Kreis steht und mit der Drehbewegung zusammen eine Rechtsschraube bildet.



Ein gleichförmig rotierendes Bezugsystem ist offensichtlich ein beschleunigtes System. In 2 Dimensionen kann der Ortsvektor eines Punktes, welcher im drehenden Koordinatensystem in Ruhe ist, geschrieben werden als

$$\vec{r} = (r_0 \cos(\omega t+\varphi), r_0 \sin(\omega t+\varphi)) .$$

Somit beträgt die Geschwindigkeit

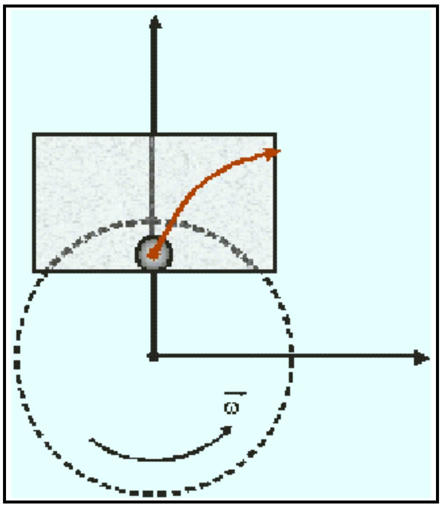
$$\vec{v} = d\vec{r}/dt = \omega\, r_0(-\sin(\omega t+\varphi), \cos(\omega t+\varphi)) .$$

und die Beschleunigung

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt = \omega^2\, r_0(-\cos(\omega t+\varphi), -\sin(\omega t+\varphi)) .$$

Da es sich um ein beschleunigtes System handelt erwarten wir, dass zusätzliche Kräfte auftreten.

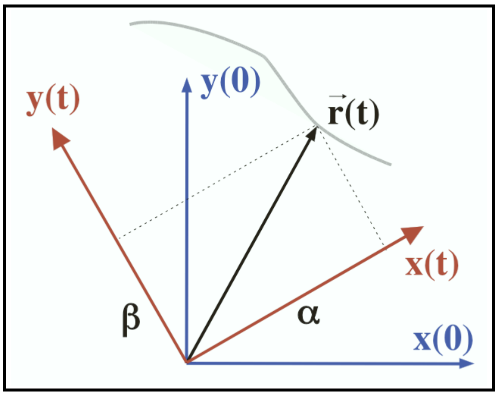
Exp70a): Coriolis Drehstuhl



Wir betrachten als Beispiel eine sich drehende Scheibe, auf der ein Körper liegt. So lange dieser mit der Scheibe dreht führt er offenbar eine beschleunigte Bewegung durch. In einem Koordinatensystem, welches an die Scheibe gekoppelt ist, ist er jedoch in Ruhe, d.h. nach Newton's Axiom dürfte keine Kraft auf ihn wirken. Lässt man ihn los so dreht sich das Bild: im Ruhesystem ist er jetzt kräftefrei und führt deshalb eine gradlinige Bewegung durch (tangential zur Scheibe). Im rotierenden Koordinatensystem beginnt er sich zunächst radial nach außen zu bewegen und führt dann eine gekrümmte Bewegung aus; gemäß Newtons Axiom müssen somit Kräfte auf den Körper wirken.

2.6.4 Bewegungsgleichung im rotierenden Bezugsystem

Wir versuchen jetzt, die Bewegungsgleichungen für eine allgemeine Bewegung im rotierenden System herzuleiten. Wir beschränken uns auf eine Ebene, die senkrecht zur Rotationsachse steht. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da die Bewegung parallel zur Achse durch die Rotation nicht beeinflusst wird.



In einem Koordinatensystem $\hat{x}(t)$, $\hat{y}(t)$, welches sich um die z-Achse dreht, lautet der Ortsvektor

$$\vec{r} = \xi\, \hat{x}(t) + \eta\, \hat{y}(t) .$$

Die Geschwindigkeit erhält man wie üblich durch Ableiten:

$$v(t) = \frac{\partial}{\partial t}\, \vec{r}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\, [\xi(t)\, \hat{x}(t) + \eta(t)\, \hat{y}(t)] .$$

Die Koordinaten ξ, η im rotierenden Koordinatensystem sind im Allgemeinen zeitabhängig. Die Rotation der Koordinatenachsen kann beschrieben werden als

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) \cos(\omega t) + \hat{y}(0) \sin(\omega t) \qquad \hat{y}(t) = \hat{y}(0) \cos(\omega t) - \hat{x}(0) \sin(\omega t) .$$

Die Geschwindigkeit des Ortsvektors ist demnach

$$\vec{v}(t) = \dot{\xi}(t)\, \hat{x}(t) + \dot{\eta}(t)\, \hat{y}(t) + \xi(t)\, \dot{\hat{x}}(t) + \eta(t)\, \dot{\hat{y}}(t) .$$

Die zeitlichen Ableitungen der Koordinatenachsen sind

$$\dot{\hat{x}}(t) = - \hat{x}(0)\, \omega\, \sin(\omega t) + \hat{y}(0)\, \omega\, \cos(\omega t) = \omega\, \hat{y}(t) .$$

$$\dot{\overset{\square}{y}}(t) = - \overset{\square}{y}(0)\ \square\ \sin(\square t) - \overset{\square}{x}(0)\ \square\ \cos(\square t) = - \square\ \overset{\square}{x}(t)\ .$$

Demnach ist

$$\overset{\square}{v}(t) = \dot{\square}(t)\ \overset{\square}{x}(t) + \dot{\square}(t)\ \overset{\square}{y}(t)\ + \square\ [\square(t)\ \overset{\square}{y}(t) - \square(t)\ \overset{\square}{x}(t)]\ .$$

Der erste Term besitzt die gleiche Form wie in einem Intertialsystem. Der zusätzliche zweite Term berücksichtigt die Zeitabhängigkeit der Basisvektoren. Er tritt auch dann auf wenn $\square(t) = \square(0)$ und $\square(t) = \square(0)$, d.h. wenn sich der Punkt gegenüber dem rotierenden Koordinatensystem nicht bewegt.

2.6.5 Scheinkräfte im rotierenden Koordinatensystem

Nach dem gleichen Verfahren können wir die Beschleunigung berechnen:

$$a(t) = \frac{\partial}{\partial t}\overset{\square}{v}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\{\dot{\square}(t)\ \overset{\square}{x}(t) + \dot{\square}(t)\ \overset{\square}{y}(t)\ + \square\ [\square(t)\ \overset{\square}{y}(t) - \square(t)\ \overset{\square}{x}(t)]\}$$

$$= \{\ddot{\square}(t)\ \overset{\square}{x}(t) + \square\ \dot{\square}(t)\ \overset{\square}{y}(t) + \ddot{\square}(t)\ \overset{\square}{y}(t) - \square\ \dot{\square}(t)\ \overset{\square}{x}(t)$$

$$+ \square\ [\dot{\square}(t)\ \overset{\square}{y}(t) - \dot{\square}(t)\ \overset{\square}{x}(t)] + \square^2\ [-\square(t)\ \overset{\square}{x}(t) - \square(t)\ \overset{\square}{y}(t)]\}$$

$$= \ddot{\square}(t)\ \overset{\square}{x}(t) + \ddot{\square}(t)\ \overset{\square}{y}(t)\ +\ 2\square\ [\dot{\square}(t)\ \overset{\square}{y}(t) - \dot{\square}(t)\ \overset{\square}{x}(t)]\ +\ \square^2\ [-\square(t)\ \overset{\square}{x}(t) - \square(t)\ \overset{\square}{y}(t)]\}\ .$$

Der gleiche Sachverhalt kann auch etwas kompakter geschrieben werden wenn wir die Vektoren

$$\overset{\square}{r}^r = (\square, \square, 0)\ , \qquad \overset{\square}{v}^r = (\dot{\square}, \dot{\square}, 0)\ , \qquad \overset{\square}{a}^r = (\ddot{\square}, \ddot{\square}, 0)\ ,$$

einführen, d.h. Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung im rotierenden Koordinatensystem, sowie den Winkelgeschwindigkeitsvektor

$$\overset{\square}{\square} = (0, 0, \square)\ .$$

Damit wird

$$\overset{\square}{a} = \overset{\square}{a}^r +\ 2\ \overset{\square}{\square}\ \square\ \overset{\square}{v}^r - \square^2\ \overset{\square}{r}^r\ .$$

Wir können diese Gleichung natürlich auch nach der Beschleunigung im rotierenden Koordinatensystem auflösen:

$$\overset{\square}{a}^r = \overset{\square}{a} - 2\ \overset{\square}{\square}\ \square\ \overset{\square}{v}^r + \square^2\ \overset{\square}{r}^r\ .$$

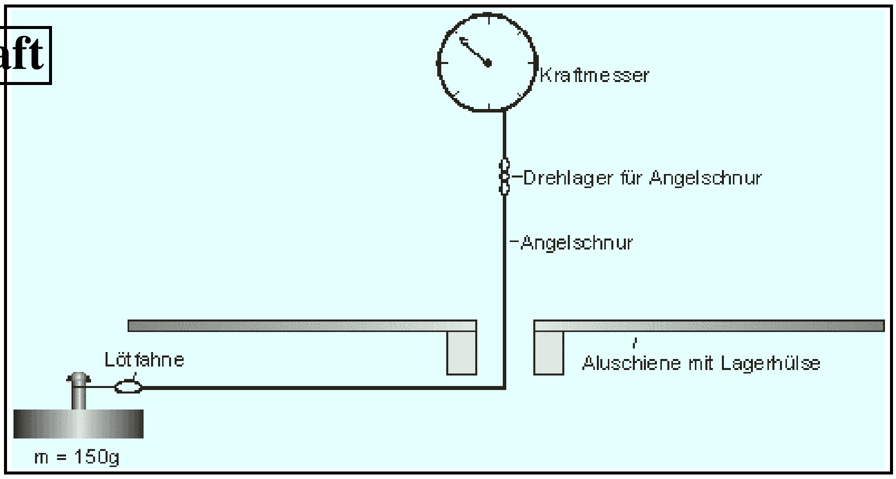
Der erste Term entspricht der Beschleunigung im Inertialsystem. Für ein kräftefreies System verschwindet er nach dem Grundgesetz der Mechanik. Die beiden anderen Terme erzeugen eine Beschleunigung im rotierenden Koordinatensystem, welche nicht von äußeren Kräften bestimmt wird; sie werden deshalb als Scheinkräfte bezeichnet. Der mittlere Term ist proportional zur Geschwindigkeit des Massenpunktes im rotierenden Koordinatensystem und zur Rotationsgeschwindigkeit des Systems. Der dritte Term ist proportional zum Quadrat der Winkelgeschwindigkeit, und zum Abstand von der Drehachse.

2.6.6 Zentrifugalkraft

Der letzte Term entspricht der Zentrifugalbeschleunigung (resp. Zentrifugalkraft). Sie muss durch eine gleich große Zentripetalkraft kompensiert werden wenn der Massenpunkt im rotierenden Koordinatensystem am Ort bleiben soll. Der Betrag ist

$$|F| = m\,|a| = m\,\omega^2\,r = m\,v^2/r\,.$$

E 41a) Zentrifugalkraft

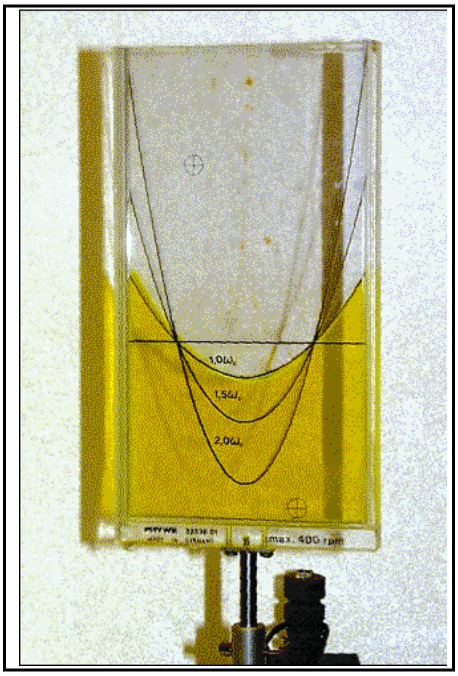


Die Zentrifugalkraft kann auch experimentell gemessen werden. Man lässt dazu ein Gewicht um einen Punkt rotieren und misst, über eine Umlenkung, die Kraft, mit der das Gewicht an der Schnur nach außen zieht.

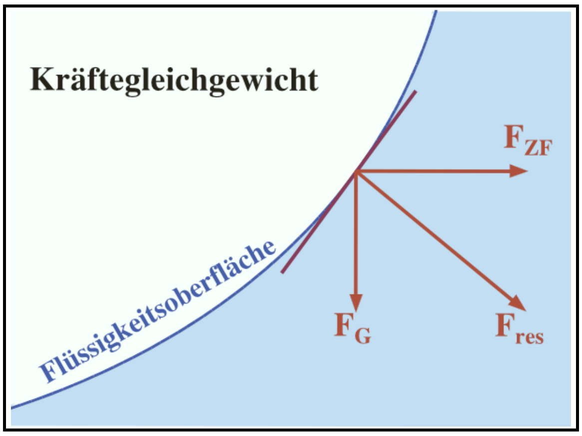
Im Experiment wurden folgende Werte gefunden:

Radius / cm	**Kraft / N**	**Periode / s**	**ω / s^{-1}**	**m ω^2 r / m s^{-2}**
31.5	0.15	3.6	1.75	0.14
33	0.3	2.7	2.33	0.27
38.8	0.75	1.7	3.70	0.80

Exp. 41 Zentrifugalküvette



Die Beschleunigungskräfte können auch in Flüssigkeiten gemessen werden.



Hier wird die Oberfläche der Flüssigkeit durch die Gleichgewichtsbedingung definiert, dass die Kraft auf die Moleküle an der Oberfläche senkrecht zur Oberfläche sein muss. Sie setzt sich zusammen aus der Gewichtskraft (unabhängig vom Abstand von der Rotationsachse) und der Zentrifugalkraft ($\sim r^2$). Somit ist die Steigung der Oberfläche proportional zur Zentrifugalkraft. Damit erhält man folgende Form für die Oberfläche:

$$z = \square^2 \, r^2/g \, .$$

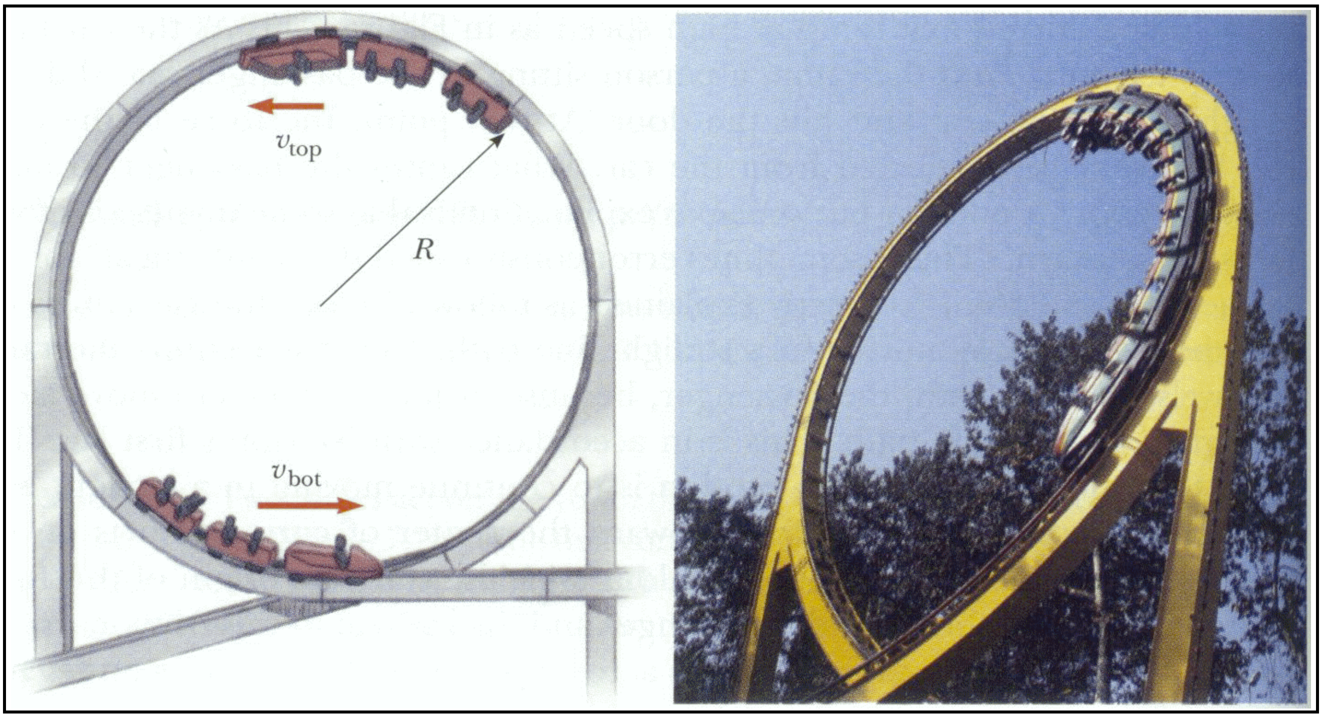
Offenbar bildet die Oberfläche eine Parabel. Dies kann im Experiment gut bestätigt werden. Außerdem können wir die Abhängigkeit von der Rotationsgeschwindigkeit semiquantitativ verifizieren.

Die Zentrifugalkraft wirkt auf alle Körper proportional zu ihrer Masse. Sie wird u.a. dazu verwendet, um Suspensionen zu trennen, indem man diese in eine Zentrifuge lädt. Ultrazentrifugen erzeugen Kräfte bis zu 10^6 g.

In der Kernspinresonanz (NMR) verwendet man ebenfalls sehr schnelle Drehungen: Man rotiert Proben mit bis zu 50 kHz um ihre eigene Achse um ausgemittelte Spektren zu erhalten. Bei typischen Zahlen von $\square_r$ = 12 kHz, d = 5 mm erhält man

$$a_{ZF} = (2\pi \cdot 1.2 \cdot 10^4)^2 \, s^{-2} \, . \, 2 \text{ mm} = 1.1 \cdot 10^7 \text{ m/s}^2 = 1.2 \cdot 10^6 \text{ g} \, ,$$

also mehr als 1 Mio mal die Erdbeschleunigung.



Die Zentrifugalkraft wird auch in vielen spielerischen Anwendungen genutzt.

Exp. 43a) Loopingbahn

In diesem Experiment kann man messen, wie schnell ein Fahrzeug durch den Looping fahren muss um nicht herunterzufallen.

Die Zentrifugalbeschleunigung kann auch gemessen werden an der Neigung dieser Eisschnelläufer: Die Summe aus Gewichtskraft und Zentrifugalkraft muss entlang der Körperachse wirken, damit die Läufer stabil um die Kurve fahren.

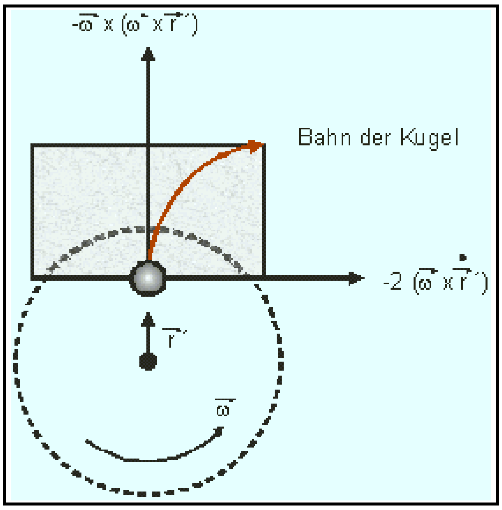
2.6.7 <u>Corioliskraft</u>

Wenn ein Körper sich auf einer rotierenden Scheibe bewegt, so wird er durch die Zentrifugalkraft nach außen beschleunigt. Er folgt jedoch keiner geradlinigen Bahn, sondern diese ist gekrümmt. Verantwortlich dafür ist die zweite Scheinkraft, die als Corioliskraft bezeichnet wird, nach dem französischen Physiker Gaspard Gustave de Coriolis, (1792-1843). Die Corioliskraft kann geschrieben werden als

$$\vec{F}_C = 2\,\vec{p} \times \vec{\omega} \,,$$

wobei der Impuls sich auf das rotierende Koordinatensystem bezieht. Er führt dazu, dass die Bewegung von reibungsfreien Körpern in einem rotierenden Koordinatensystem gekrümmt ist, falls die Bewegung eine Komponente senkrecht zur Rotationsachse aufweist.

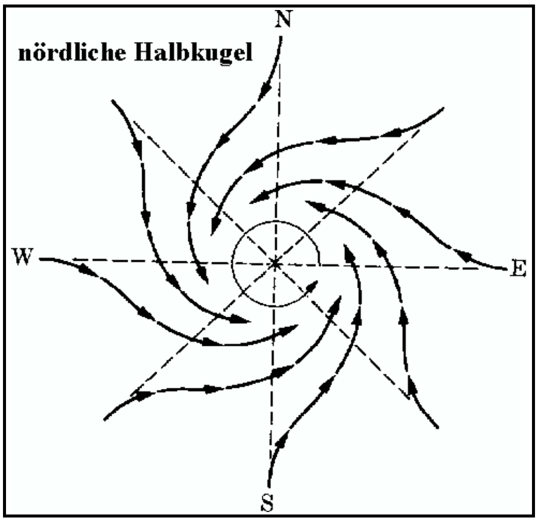
Exp. 70a) Coriolis / Drehstuhl

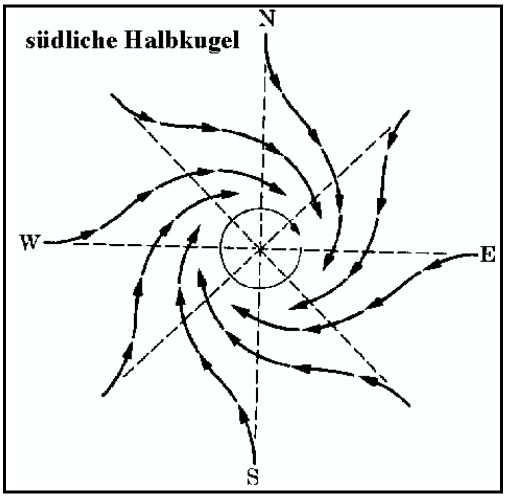


Die Corioliskraft ist proportional zur Geschwindigkeit des bewegten Körpers und zur Winkelgeschwindigkeit des Systems, wobei nur die senkrechte Komponente beiträgt. Wenn der Körper aufgrund der Zentrifugalkraft nach außen beschleunigt wird setzt auch die Corioliskraft ein, welche proportional zur Geschwindigkeit ist und senkrecht zur Geschwdindigkeit wirkt, d.h. die Bahn biegt. Der Effekt der beiden Kräfte ist eine spiralförmige Bewegung nach außen.

Die gleichen Kräfte treten z.B. auch bei Bewegungen auf der Erdoberfläche auf. Hier ist die Corioliskraft z.B. für die Ablenkung der Windsysteme verantwortlich. Gäbe es keine Erdrotation so würden die Winde direkt in Richtung des Zentrums eins Tiefdruckgebietes blasen. Aufgrund der Erdrotation wird bewegte Luft jedoch abgelenkt. Die Richtung wird durch das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{\omega}$ bestimmt. Der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ zeigt auf der Erde nach Norden; . Auf der Nordhalbkugel werden die Winde nach rechts abgelenkt. Dies ist der Grund für die dominanten Westwinde in unseren Breitengraden: es handelt sich um Luft, die aus den Hochdruckgebieten im Bereich der Sahara nach Norden fließt und dabei durch die Corioliskraft nach Osten abgelenkt wird.

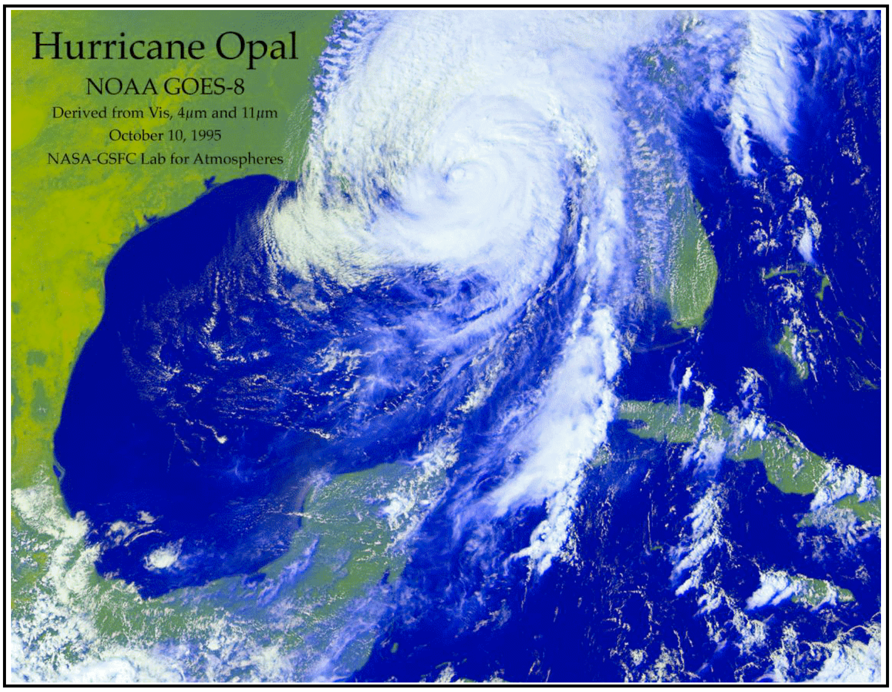
Gleichzeitig führt die Corioliskraft dazu, dass Luft nicht gerade in ein Tiefdruckgebiet hinein fließt, sondern sich im Gegenuhrzeigersinn darum dreht.

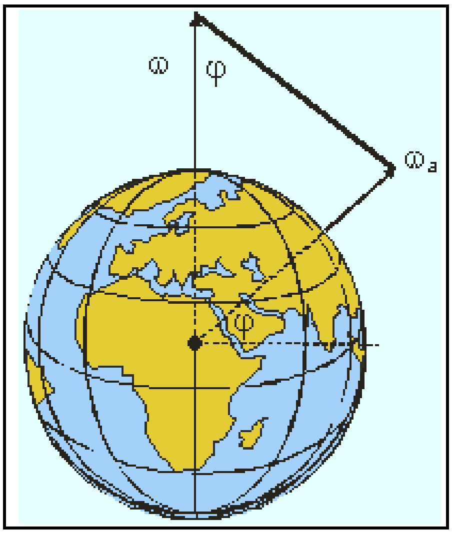




Auf der Südhalbkugel wechselt das Vorzeichen von $\vec{v} \times \vec{\omega}$, die Winde werden nach links abgelenkt und drehen sich im Uhrzeigersinn um die Tiefdruckgebiete.

Die resultierende Drehung der Tiefdruckgebiete ist praktisch in jeder Wetterkarte sichtbar. Hier als Beispiel ein Hurricane über dem Golf von Mexiko.





Ebenso kann die Drehung der Pendelebene beim Foucault'schen Pendel als Effekt der Coriolis-Kraft verstanden werden. Sie verschwindet auf dem Äquator, wo die Bewegung parallel zur Erd-Rotationsachse läuft.