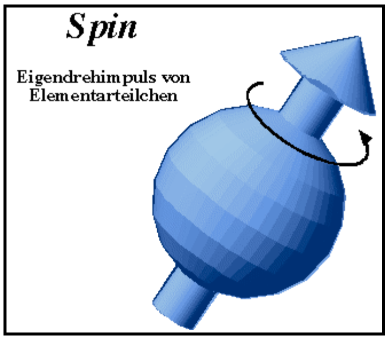
2.5 Dynamik der Drehbewegung

2.5.1 Drehimpuls

Genau so wie ein Körper sich ohne die Einwirkung äußerer Kräfte geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, so behält er seine Orientierung gegenüber einem Inertialsystem bei, sofern er sich zu Beginn in Ruhe befindet, resp. behält eine vorhandene Drehbewegung bei.

Dies kann man anhand eines Kreisels im Hörsaal zeigen. Es gibt außerdem eine lange Liste von physikalisch relevanten Phänomenen, bei denen die eine Rolle spielt.

Dies beginnt auf sehr kleinen Skalen mit dem Spin, d.h. dem Eigendrehimpuls von Elementarteilchen, und es setzt sich über viele Größenordnungen fort, z.B. zur Rotation von Planeten, ihrer Bahnbewegung um die Sonne, oder der Rotationsbewegung von Galaxien.

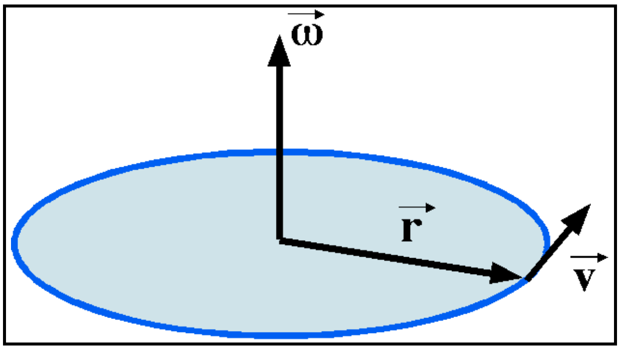


Offenbar existiert hier ebenfalls ein Erhaltungssatz. Dieser kann am besten für den Drehimpuls formuliert werden. Für einen Massenpunkt ist der Drehimpuls definiert als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\,, \qquad [L] = \mathrm{N\,m\,s}$$

also als Vektorprodukt aus Ort und Impuls. Der Drehimpuls ist somit immer in Bezug auf ein Koordinatensystem definiert.

Wir betrachten den Fall einer Kreisbewegung. Hier ist die Geschwindigkeit eines Massenpunktes bestimmt durch das Produkt aus Winkelgeschwindigkeit und Abstand von der Rotationsachse:



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,,$$

wobei $\vec{\omega}$ den Winkelgeschwindigkeitsvektor bezeichnet. Er steht parallel zur Rotationsachse und sein Betrag ist durch die Rotationsfrequenz $\omega / 2\pi$ gegeben. Der Drehimpuls wird somit

$$\vec L = \vec r \times \vec p = m\, \vec r \times (\vec \omega \times \vec r)\,.$$

Das doppelte Vektorprodukt kann nach dem Entwicklungssatz

$$\vec a \times (\vec b \times \vec c) = (\vec a \cdot \vec c)\, \vec b - (\vec a \cdot \vec b)\, \vec c$$

geschrieben werden als

$$\vec L = m[(\vec r \cdot \vec r)\vec \omega - (\vec r \cdot \vec \omega)\vec r] = m\, r^2\, \vec \omega\,,$$

da $\vec r \cdot \vec \omega = 0$. Offenbar ist der Drehimpuls proportional zur Winkelgeschwindigkeit.

Häufig ist es nützlich, das Trägheitsmoment I als Proportionalitätskonstante zwischen Winkelgeschwindigkeit und Drehimpuls einzuführen, analog zur Masse als Proportionalitätskonstante zwischen Geschwindigkeit und Impuls. Damit erhalten wir

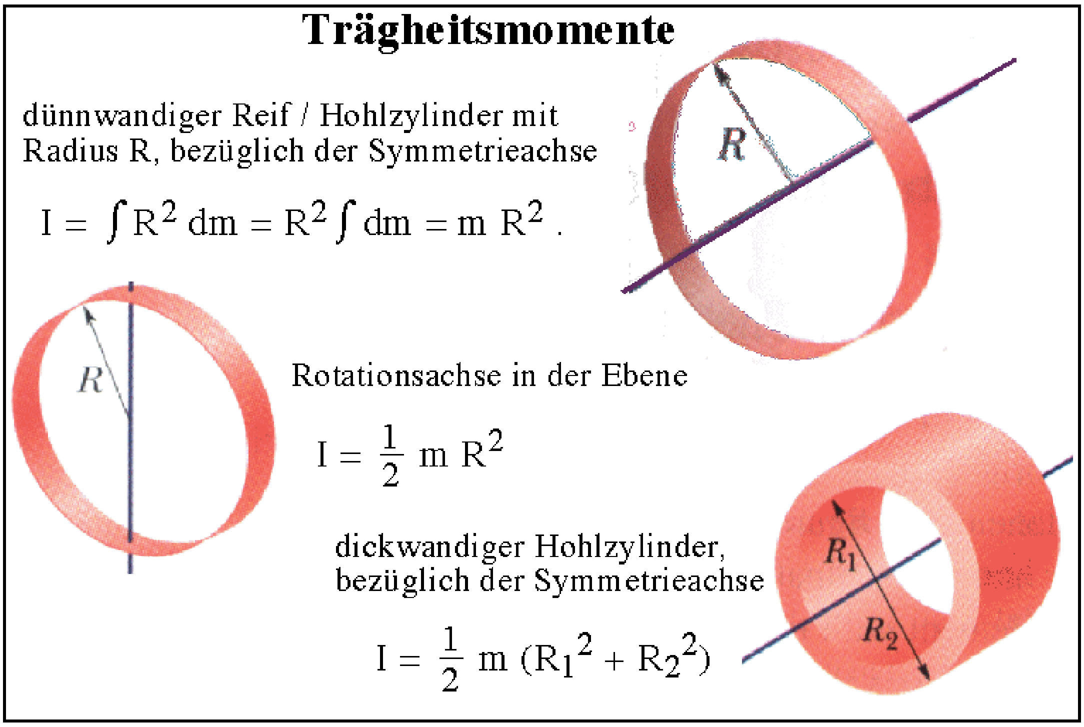
$$\vec L = I\, \vec \omega\,.$$

Für die Kreisbewegung eines Massenpunktes gilt offenbar $I = m\, r^2$.

Allgemein wird das Trägheitsmoment berechnet als

$$I = \int r^2\, dm\,,$$

wobei das Integral über den gesamten Körper läuft und r den Abstand von der Rotationsachse darstellt. Das Trägheitsmoment ist deshalb im Allgemeinen abhängig von der Orientierung der Rotationsachse. Man spricht deshalb von einem Trägheitstensor. Für einen asymmetrischen Trägheitstensor ist der Drehimpuls $\vec L$ nicht mehr parallel zur Winkelgeschwindigkeit $\vec \omega$.



Auch ein Körper, der sich auf einer Geraden bewegt, besitzt einen Drehimpuls; dieser wird als Bahndrehimpuls bezeichnet. Im Gegensatz dazu unterscheidet man den Eigendrehimpuls, bei dem man sich auf eine Achse durch den Schwerpunkt bezieht.

Offenbar bestehen eine Reihe von Analogien zwischen Drehimpuls und linearem Impuls:

	Translation	**Rotation**	
Impuls	$\vec{p}$	$\vec{L}$	Drehimpuls
Masse	m	I	Trägheitsmoment
Geschwindigkeit	$\vec{v}$	$\vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit

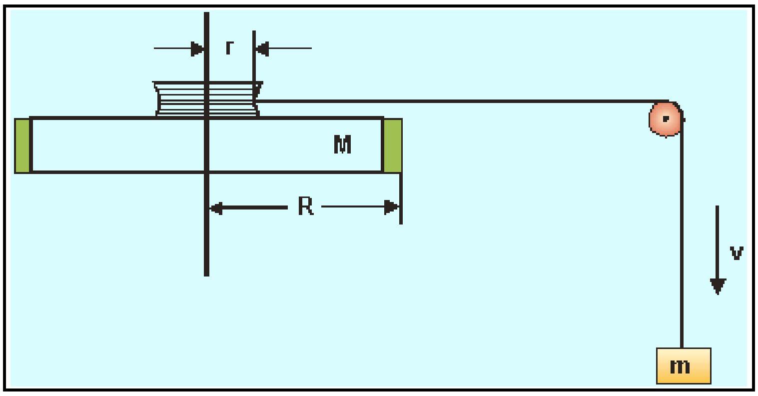
In Analogie zum Erhaltungsgesetz für den linearen Impuls gilt ein Erhaltungssatz für den Drehimpuls: So lange keine äußeren Kräfte wirken bleibt der Drehimpuls eines Systems erhalten. Die Erhaltung des Drehimpulses spielt eine große Rolle in vielen Teilen der Physik, vom Mikrokosmos (z.B. Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen, Absorption von Licht) bis zum Makrokosmos (Planetenbewegung, Stabilität von Galaxien).

2.5.2 Drehmoment

Der Drehimpuls ist eine Erhaltungsgröße wenn keine äußere Kraft angreift. Wie beim linearen Impuls kann aber eine äußere Kraft den Drehimpuls verändern.

Wir diskutieren dies anhand eines Experimentes.

Exp. 44: $E_{pot} \rightarrow E_{rot}$



In diesem Experiment greift eine Kraft (Gewichtskraft) tangential am Rad an. Wir berechnen die daraus resultierende Änderung des Drehimpulses gemäß seiner Definition über die Kraft, welche an einem Massenpunkt an der Stelle des Fadens angreift als

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \ .$$

Die beiden Vektoren des ersten Terms ($\vec{v}$ und $\vec{p}$) sind parallel, so dass das Vektorprodukt verschwindet. Bei einer Drehbewegung ohne äußere Kräfte ($\vec{\omega}$ konstant) ist außerdem $\frac{d\vec{p}}{dt} \parallel \vec{r}$, so dass auch der zweite Term verschwindet: der Drehimpuls ist konstant.

Wenn jedoch eine Kraft angreift und die Geschwindigkeit der Drehbewegung sich ändert erhält $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ eine tangentiale Komponente, so dass

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \,.$$

Dies ist offenbar das Äquivalent zum zweiten Newton'schen Axiom. Man bezeichnet die Größe auf der rechten Seite als Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad [M] = \mathrm{N\,m} \,.$$

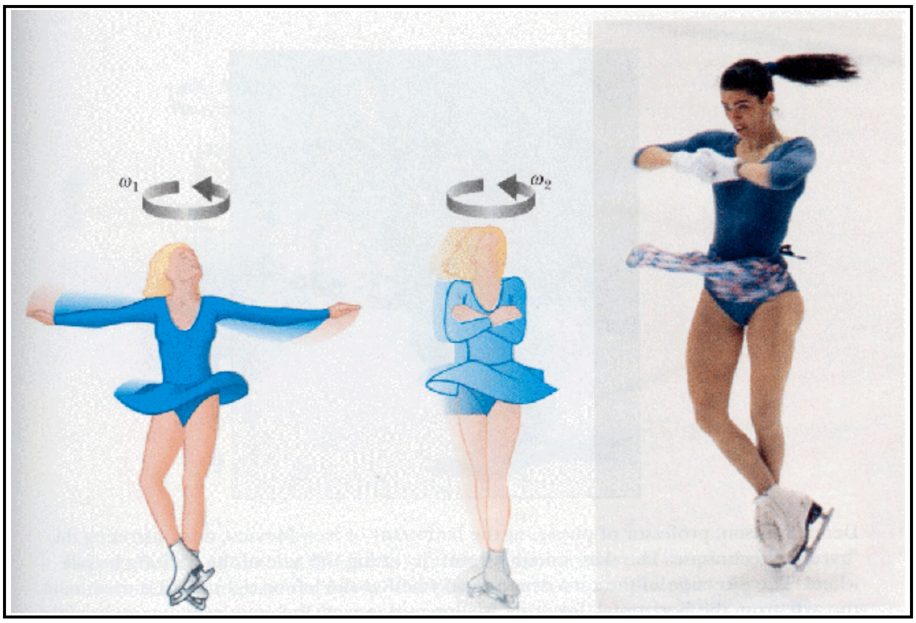
Damit kann man das Grundgesetz der Rotation schreiben als

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = I\,\frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad .$$

Das Drehmoment liegt im rechten Winkel zur Kraft und erzeugt damit einen Drehimpuls senkrecht zur Kraft. Da das Drehmoment aus dem Vektorprodukt $\vec{r} \times \vec{F}$ besteht verschwindet es wenn die Kraft parallel zum Ortsvektor (d.h. radial) angreift; in diesem Fall würde eine Änderung des linearen Impulses erzeugt.

Wie beim Drehimpuls ist auch beim Drehmoment die Definition immer auf ein bestimmtes Koordinatensystem bezogen; Drehimpuls und Drehmoment ändern sich wenn man den Ursprung des Koordinatensystems verschiebt.

2.5.3 Pirouette



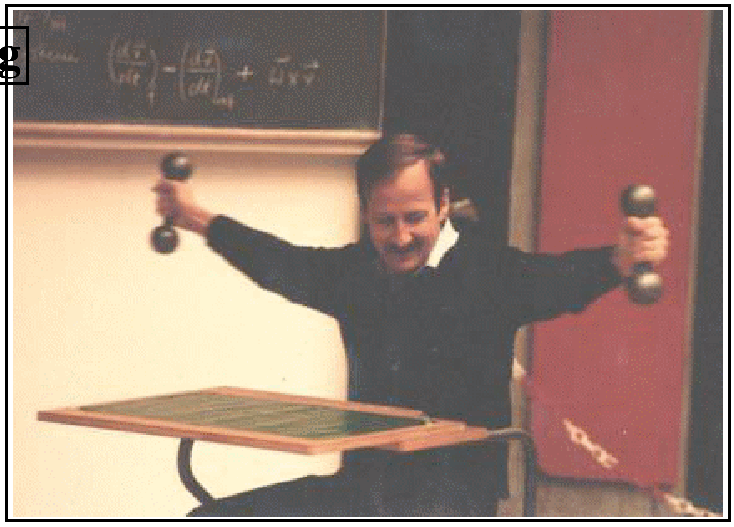
Eine bekannte Anwendung der Drehimpulserhaltung ist die Pirouette von Eiskunstläufern. Hier reduziert der Artist das Trägheitsmoment indem er die Arme anzieht. Als Beispiel nehmen wir an, dass er sich zunächst mit einer Drehfrequenz von ω_0 = 1/s bewegt und, dass sein Trägheitsmoment zunächst bei I_0 = 6 kg m^2 beträgt. Durch Anziehen der Arme reduziert er dieses auf I_1 = 1.5 kg m^2. Wenn wir Reibungsverluste vernachlässigen muss der Drehimpuls dabei erhalten bleiben und damit die Drehfrequenz zunehmen auf

$$n_1 = n_0\, I_0/I_1 = 4/\mathrm{s}\ .$$

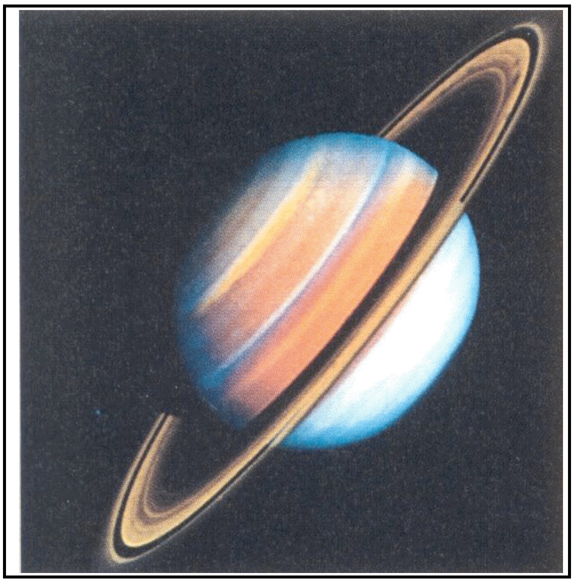
Die kinetische Energie bleibt dabei nicht erhalten; diese wird dem System über eine Arbeitsleistung zugeführt, indem die Arme gegen die Zentrifugalkraft angezogen werden müssen. Die mittlere Leistung, die dafür notwendig ist, können wir berechnen wenn wir annehmen, dass die Erhöhung der Geschwindigkeit während einer Sekunde abläuft. Sie beträgt dann

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,\frac{I_1\omega_1^2 - I_0\omega_0^2}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,(1.5 \cdot 631 - 6 \cdot 39{\cdot}5)\ \mathrm{W} = 355\ \mathrm{W}\ .$$

Exp. 39) Drehimpulserhaltung

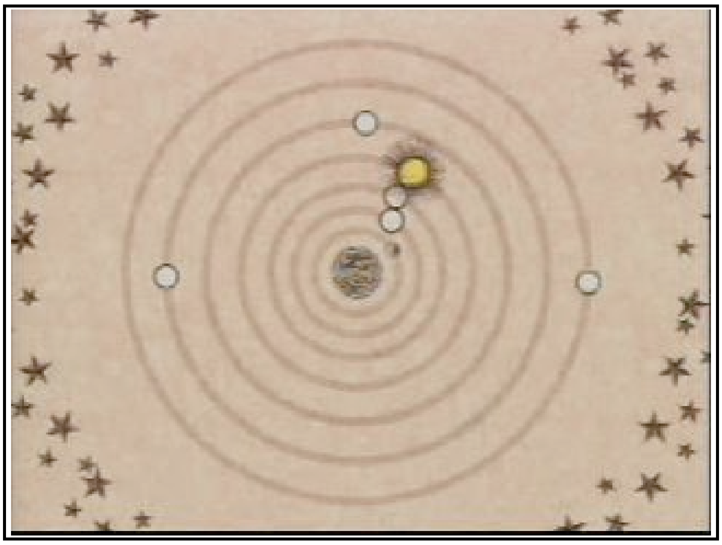


Das Experiment kann auch im Hörsaal durchgeführt werden, wobei der Effekt durch Gewichte in den Händen verstärkt wird. Beim Anziehen der Arme wird das Trägheitsmoment reduziert und die Erhaltung des Drehimpulses führt zu einer Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit.



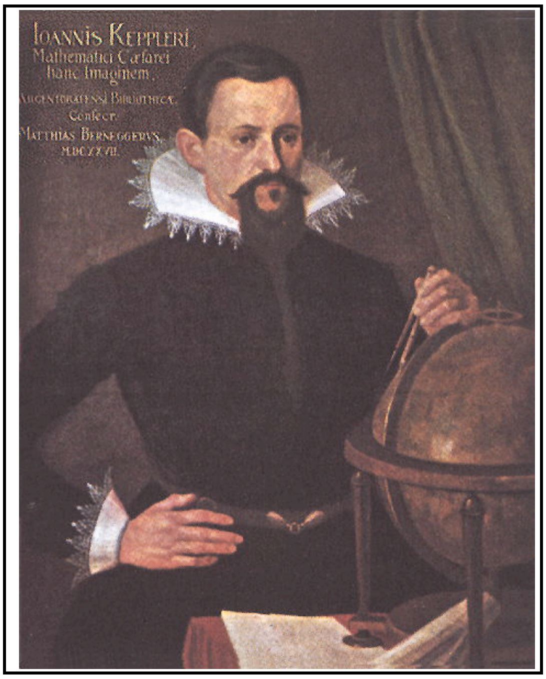
Die Erhaltung des Drehimpulses ist auch verantwortlich für die Rotation von Planeten im Sonnensystem, von Satelliten (Monden, Ringen) um Planeten, und der Sonnensysteme in der Galaxis: diese bildeten sich aus Wolken von Gas und Staub durch Kontraktion unter dem Einfluss der Schwerkraft. Die Erhaltung des Drehimpulses bei der Kontraktion führte zu einer Erhöhung der anfangs geringen Rotationsgeschwindigkeit und verhindert eine vollständige Kontraktion: ohne Drehimpulserhaltung würden die Planten unter dem Einfluss der Schwerkraft in die Sonne fallen. Ähnliche Effekte führen zur Form der Galaxien.

2.5.4 Planetenbahnen: Die Kepler'schen Gesetze

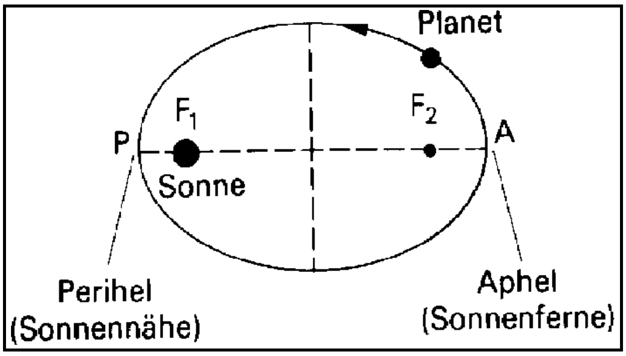


Die Planetenbahnen haben die Menschen seit Langem fasziniert. Ptolemäus fasste im 2. Jh. nach Christus den damaligen Wissenstand zusammen und erstellte ein Weltbild, welches mehr als tausend Jahre Bestand hatte.

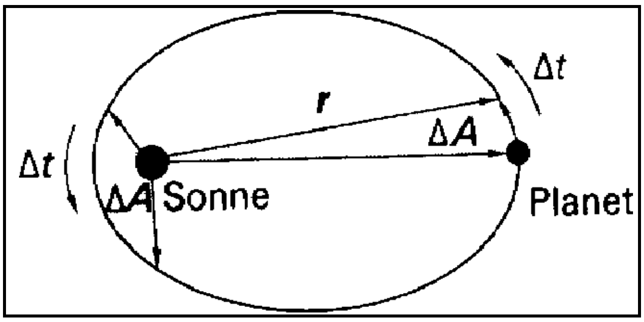
Die wichtigste Neuerung wurde von Kopernikus (1473-1543) initiiert, welcher die Sonne ins Zentrum stellte. Der dänische Hofastronom Tycho Brahe (1546-1601) stellte umfangreiche Beobachtungen an, welche insgesamt weder mit dem kopernikanischen noch mit dem ptolemäischen Weltbild wirklich vereinbar waren.



Die erste Theorie, welche die Beobachtungen anhand einiger weniger Gesetze erklären konnte stammt von Johannes Kepler (1571-1630). Er formulierte die ersten zwei seiner Gesetze 1609, das dritte 1619.



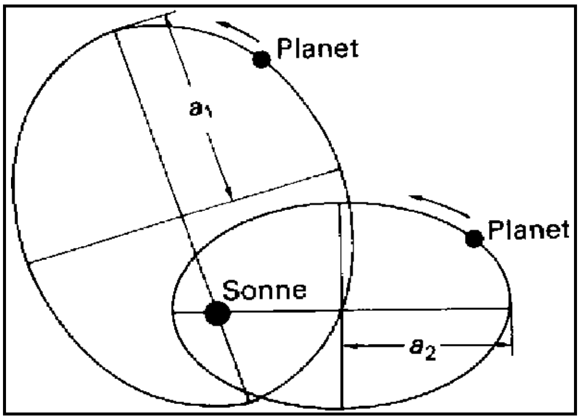
1. Kepler'sches Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen. Die Sonne steht jeweils in einem der Brennpunkte. Genauer: Sonne und Planeten kreisen um den gemeinsamen Schwerpunkt: Dieser wird aber durch die Sonne dominiert.



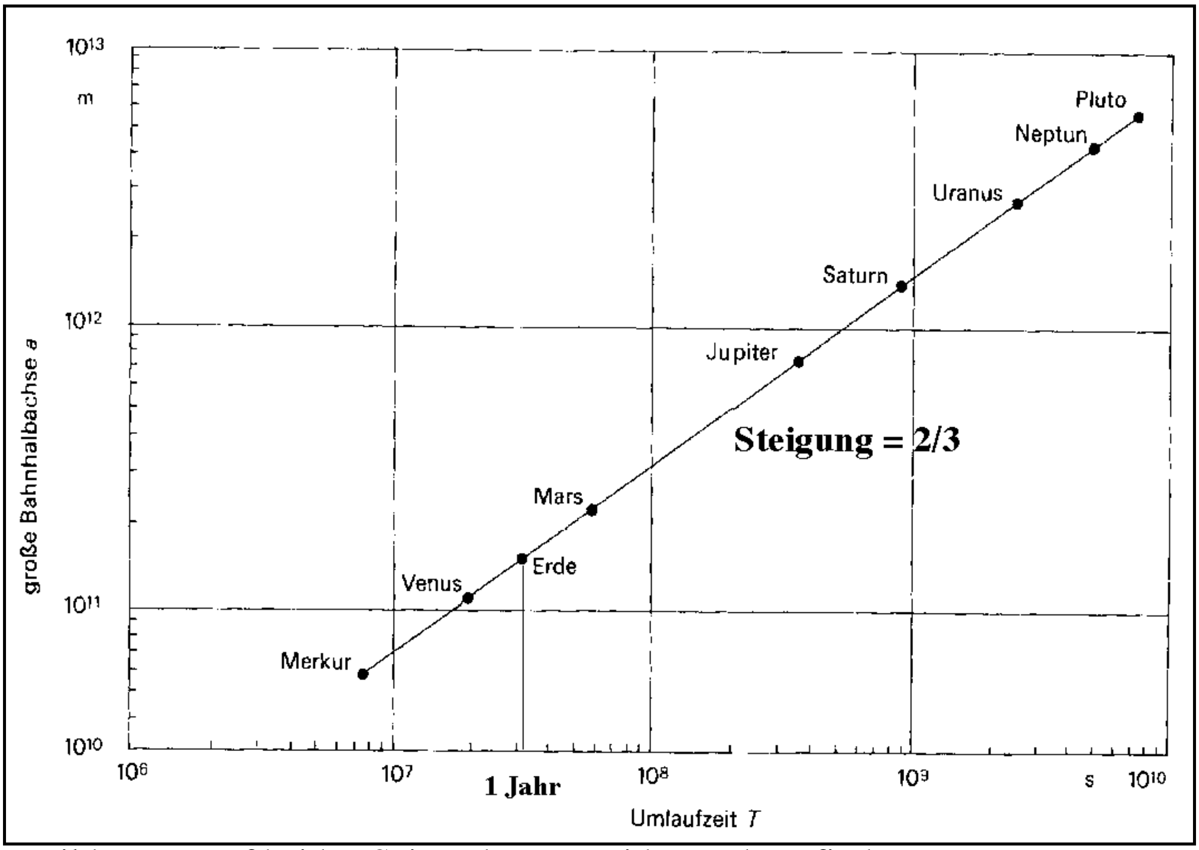
2. Kepler'sches Gesetz: Der von der Sonne zum Planeten gezogene Radiusvektor r überstreicht in gleichen Zeiten Δt konstante Flächen ΔA: $\Delta t/\Delta A$ = konstant.

<u>3. Kepler'sches Gesetz</u>: Die Quadrate der Umlaufzeiten T_1, T_2 zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen a_1, a_2:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 .$$



Solche Potenzgesetze kann man am besten überprüfen indem man die vorhandenen Daten logarithmiert: Bildet man auf beiden Seiten den Logarithmus dann findet man



$$\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 2\,[\log(T_1) - \log(T_2)] = \log\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = 3\,[\log(a_1) - \log(a_2)]$$

oder

$$\frac{\log(a_1) - \log(a_2)}{\log(T_1) - \log(T_2)} = \frac{2}{3} .$$

Trägt man log(a) gegen log(T) auf, so erhält man somit eine Gerade mit Steigung 2/3. Die experimentellen Daten passen sehr gut zu dieser Voraussage.

2.5.5 Theorie der Gravitation

Während es sich hierbei um ad-hoc Regeln handelte lieferte Newton (1642-1727) die physikalischen Gesetze die diesen Beobachtungen zugrunde lagen, insbesondere seine Axiome und das Gravitationsgsetz,

$$|F_G| = G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,. \qquad G = 6.673\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}} = 6.673\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\,s^2}}$$

Nachdem die Gravitationskonstante bestimmt ist kann man eine Messung der Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche dazu verwenden, die Erdmasse zu bestimmen. Mit dem mittleren Erdradius $r = 6.37\cdot 10^6$ m erhält man $m_E = 5.97\cdot 10^{24}$ kg. Analog kann man aus dem Radius einer Planetenbahn und seiner Umlaufzeit die Masse der Sonne bestimmen: Aus dem Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und Gravitationskraft der Sonne

$$F_{ZP} = m_P\, r_P\, \omega_P^2 = F_G = G\,\frac{m_P m_S}{r_P^2}\,.$$

Die Sonnenmasse erhält man daraus als

$$m_S = r_P^3\, \omega_P^2/G \sim 2\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}\,.$$

Dies beinhaltet gleichzeitig das dritte Kepler'sche Gesetz (für den Grenzfall eines Kreises, d.h. verschwindender Elliptizität).

Zu Beginn dieses Jahrhunderts erkannte Einstein, dass die Newton'sche Theorie als eine Näherungsform betrachtet werden muss. In dieser Theorie erfolgt die Wechselwirkung zwischen unterschiedlichen schweren Körpern nicht mehr über Kräfte, sondern indem jeder Massenpunkt den Raum in seiner Umgebung verzerrt. Die Theorie behandelt somit nicht Kräfte, sondern die Geometrie des vierdimensionalen Raum-Zeit Kontinuums. Sie gibt in vielen Fällen die gleichen Voraussagen zu experimentell beobachtbaren Größen; in einigen wenigen Spezialfällen findet man Unterschiede. So kann sie z.B. die Präzessionsbewegung bei der Merkurbahn erklären, oder die Ablenkung von Sternenlicht beim Passieren der Sonne.