7. Übung zur Physik A2 für Nebenfächler WS 2017/18

Ausgabe: 23.11.2017
Abgabe: bis 30.11.2017 08:30 Uhr

Prof. Dr. D. Suter

Aufgabe 1: Rotierende Punktmasse

Gegeben sei eine punktförmige Masse m, die an einem masselosen Stab der Länge R befestigt ist und mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_0 gemäß Abbildung 1 auf einer Kreisbahn um den Punkt P rotiert.

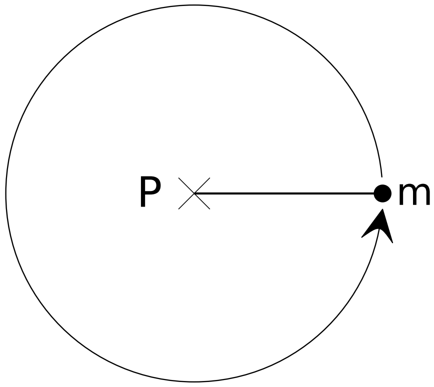

Abbildung 1: Skizze zur Problemstellung.

(a) Zeigen Sie für den reibungsfreien Fall, dass der Impuls $\vec{p}$ nicht erhalten ist, der Impulsbetrag $|\vec{p}|$ und der Drehimpuls $\vec{L}$ hingegen schon. Stellen Sie dazu zunächst $r(t)$ in Zylinderkoordinaten auf.

(b) Eine Reibungskraft wird simuliert, indem ein konstantes äußeres Drehmoment

$$\vec{M} = -a \cdot \vec{e}_z$$

auf die Masse m wirkt. Berechnen Sie die Zeitspanne Δt, die das Drehmoment wirken muss, bis die Punktmasse ruht, der Drehimpuls also Null ist. Sie sollten dabei auf eine lineare inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung stoßen, die Sie durch Separation der Variablen lösen können. Berechnen Sie Δt explizit für die Werte

$$m = 5\,\mathrm{kg} \qquad R = 4\,\mathrm{m}$$
$$\omega_0 = 0{,}5\,\mathrm{Hz} \qquad a = 4\,\mathrm{N\,m}.$$

<u>Hinweis</u>: Es bietet sich an, mit Vektorbeträgen zu rechnen, da alle relevanten vektoriellen Größen in dieselbe Richtung zeigen.

Aufgabe 2: Die Keplerschen Gesetze

Mit Hilfe der Keplerschen Gesetze lassen sich die Bewegungen idealer Himmelskörper mathematisch beschreiben. In der folgenden Aufgabe sollen Sie sich mit den Gesetzen vertraut machen und mit Hilfe dieser einfache Berechnungen durchführen.

(a) Formulieren Sie die drei Keplerschen Gesetze und fertigen Sie zu den ersten beiden Gesetzen auch eine Skizze an!

(b) Geben Sie an, auf welcher Erhaltungsgröße das zweite Keplersche Gesetz beruht. Zeigen Sie diese Erhaltung durch eine kurze Rechnung.
Hinweis: Bei einem Gravitationskraftfeld handelt es sich um ein Zentralkraftfeld.

(c) Der Radius der Erdbahn beträgt $r_\mathrm{E} \approx 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$, der der Uranusbahn $r_\mathrm{U} \approx 2{,}87 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}$. Berechnen Sie, wie lange ein Uranusjahr dauert und geben Sie Ihr Ergebnis in Erdjahren an.

(d) Im Apogäum, dem erdfernsten Punkt seiner Bahn, ist der Mond 406 395 km von der Erde entfernt, im Perigäum, dem erdnächsten Punkt, sind es 357 643 km. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Mondes in beiden Punkten.

Aufgabe 3: Die Roche-Grenze

Wenn sich ein ausgedehnter Körper einer großen Masse nähert, dann wirken auf diesen Gezeitenkräfte, die ihn mitunter sogar zerreißen können. Dies wurde von Edouard Albert Roche am Beispiel der Ringe des Saturn gezeigt. Betrachten Sie zur Herleitung der so genannten Roche-Grenze einen kugelförmigen Mond mit Radius r und Masse m, der sich im Abstand d eines kugelförmigen Planeten der Masse M und des Radius R befindet.

(a) Die Gezeitenkraft ist der Unterschied der durch den Planeten verursachten Gravitationskräfte, die auf ein Massenelement der Masse μ einmal an der Oberfläche des Mondes und einmal im Zentrum des Mondes wirken. Das Element an der Oberfläche des Mondes befinde sich dabei auf der Mondseite, sodass es dem Planeten am nächsten ist. Zeigen Sie, dass für $d \gg r$ die Gezeitenkraft auf das Massenelement durch

$$F_\mathrm{Gez} = \frac{2\,G\,M\,\mu\,r}{d^3}$$

gegeben ist.
Hinweis: Die Gravitationskraft des Mondes spielt in dieser Berechnung noch keine Rolle.

(b) Ist die Gravitationskraft des Mondes auf das Massenelement μ an seiner Oberfläche nicht mehr größer als die Gezeitenkraft des Planeten, die auf das Massenelement wirkt, so zerfällt der Mond. Leiten Sie aus dieser Information die Roche-Grenze

$$d_\mathrm{Roche} \leq R\left(\frac{2\,\rho_\mathrm{Planet}}{\rho_\mathrm{Mond}}\right)^{1/3}$$

her, wobei ρ_i der jeweiligen Dichte des Himmelskörpers entspricht.

Hinweis: Die Gravitationskraft des Mondes spielt in Aufgabenteil (a) noch keine Rolle. Lesen Sie genau, welche Kräfte wo und wie auf das Massenelement μ wirken und fertigen Sie zu Ihrem Verständnis gegebenenfalls eine Skizze an!

Aufgabe 4: Schwerefeld der Erde

Gegeben sei das Gravitationspotential der Erde

$$\Phi_{\mathrm{E}}(r) = -G\,\frac{M_{\mathrm{E}}}{r}$$

mit der Gravitationskonstante G und der Erdmasse M_{E}. Befindet sich ein Körper der Masse m in diesem Potential, so besitzt er die potentielle Energie $V_{\mathrm{pot}}(r) = m \cdot \Phi_{\mathrm{E}}(r) \sim \frac{1}{r}$. Dies scheint zunächst mit der potentiellen Energie, die ein Körper auf der Erde hat, im Widerspruch zu stehen, da für diese $E_{\mathrm{pot}}(r) = m\,g\,r \sim r$ gilt. In folgender Aufgabe soll gezeigt werden, dass $E_{\mathrm{pot}}(r)$ als Näherungslösung aus dem Gravitationspotential folgt, sofern für den Abstand $r = R_{\mathrm{E}} \pm \Delta r$ gilt, wobei R_{E} dem Erdradius entspricht und $\Delta r \ll R_{\mathrm{E}}$ ist.

(a) Taylorentwickeln Sie das Gravtitationspotential um den Erdradius R_{E} bis zur ersten Ordnung.

(b) Identifizieren Sie die von r unabhängigen Terme im entwickelten Potential und erklären Sie, ob diese einen Einfluss auf die Dynamik des Systems haben. Nutzen Sie diese Argumentation, um ein vereinfachtes Potential $\tilde{\Phi}_{\mathrm{E}}$ anzugeben.

(c) Berechnen Sie aus $\tilde{\Phi}_{\mathrm{E}}$ die potentielle Energie $\tilde{V}_{\mathrm{pot}}(r) = m \cdot \tilde{\Phi}_{\mathrm{E}}(r)$ eines Körpers der Masse m und vergleichen Sie diese mit $E_{\mathrm{pot}}(r)$. Was fällt Ihnen auf?

(d) Ermitteln Sie sowohl aus $V_{\mathrm{pot}}(r)$ als auch aus $\tilde{V}_{\mathrm{pot}}(r)$ die resultierenden Kräfte. Beschränken Sie sich der Einfachheit halber auf eine Dimension, das heißt $\vec{\nabla}_{r,\varphi,\vartheta} \;\rightarrow\; \frac{\partial}{\partial r}$.

<u>Hinweis</u>: Unter einer Taylorentwicklung versteht man eine Approximation einer unendlich oft differenzierbaren Funktion $f(x)$ in eine ganzrationale Funktion vom Grad N. Dieser Grad wird auch Ordnung der Taylorentwicklung genannt. Die Entwicklung einer Funktion um einen beliebigen Punkt x_0 ist gegeben durch

$$f(x)\big|_{x\cong x_0} = \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!} \cdot f^{(j)}(x_0) \cdot (x - x_0)^j + \mathcal{O}(x^{N+1}),$$

wobei $f^{(j)}(x_0)$ der j-ten Ableitung am Punkt $x = x_0$ entspricht. Terme der Ordnung $\mathcal{O}(x^{N+1})$ können vernachlässigt werden. Für x-Werte, die nahe dem Entwicklungspunkt x_0 liegen, kann die Approximation als gut angenommen werden. Je höher der Ordnungsgrad gewählt wird, desto genauer ist die Approximation der Funktion.