

4 Elektrizität und Magnetismus

Elektrizität und Magnetismus wurden zunächst als unabhängige Phänomene verstanden. Rund 150 Jahre nachdem Newton seine grundlegenden Arbeiten zur Mechanik publiziert hatte, gelang es Maxwell¹ die Grundlagen von Elektrizität und Magnetismus zusammenzubringen und in 4 Gleichungen, den Maxwell'schen Gleichungen, ihre wichtigsten Eigenschaften zusammenzustellen.

4.1 Ladung und Feld

4.1.1 Übersicht

Die Phänomene, die in diesem Kapitel behandelt werden, basieren auf einer Größe, die bisher noch nicht diskutiert wurde: auf der elektrischen Ladung Q .

Exp. 1: Reibungselektrizität

“Gewöhnliche” Materie enthält gleich viele positive wie negative Ladungen. Man kann dieses Gleichgewicht verändern, indem man einzelne Ladungen von einem Material auf ein anderes überträgt. Dies geht z.B. indem man einen Glasstab mit Leder oder Seide reibt. So erhält man positive Ladungen; reibt man einen Kunststoffstab mit einem Katzenfell oder mit Seide so erhält man negative Ladungen. Diese können auf ein Elektrometer übertragen werden; dabei handelt es sich um ein Gerät, welches elektrische Ladungen durch einen Ausschlag des Zeigers anzeigt. Durch mehrmalige Übertragung kann man die Ladungsmenge vergrößern und damit den Ausschlag erhöhen. Überträgt man zunächst eine Art von Ladung und danach, ohne das Elektrometer zu entladen, die andere, so nimmt der Ausschlag

¹James Clerk Maxwell (1831 - 1879)

ab: die beiden Arten von Ladungen heben sich gegenseitig auf.

Einige Eigenschaften der elektrischen Ladung sind:

- Ladung ist an Materie gebunden.
- Ladung ist quantisiert, d.h. man findet nur Vielfache der Elementarladung $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
- Es gibt positive und negative Ladungen; deren Absolutbetrag ist gleich. Die Ladung eines Teilchens kann somit betragen ... $-2e$, $-e$, 0 , $+e$, $+2e$,

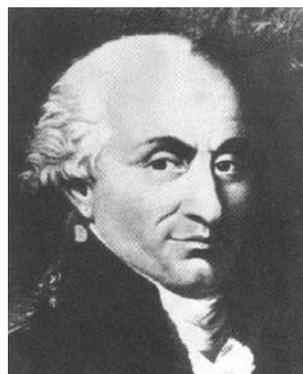


Abbildung 4.1: Charles Augustin de Coulomb (1736-1806).

Ladung wird gemessen in der Einheit

$$[Q] = C = \text{Coulomb},$$

nach Charles Augustin de Coulomb, 1736-1806 (\rightarrow Abb. 4.1). Die Ladung ist eine der Grundeinheiten der Elektrizitätslehre.

Ladungen können Bewegungen durchführen. Man unterscheidet drei Bewegungszustände:

- ruhende Ladungen. Diese Systeme werden im Rahmen der Elektrostatik beschrieben.

- Ladungsbewegungen mit konstanter Geschwindigkeit, d.h. es fließen stationäre Ströme, welche statische Magnetfelder erzeugen. Dies wird im Rahmen der Magnetostatik behandelt.
- Ladungen werden beschleunigt und erzeugen deshalb elektromagnetische Wellen. Dies ist das Thema der Elektrodynamik.

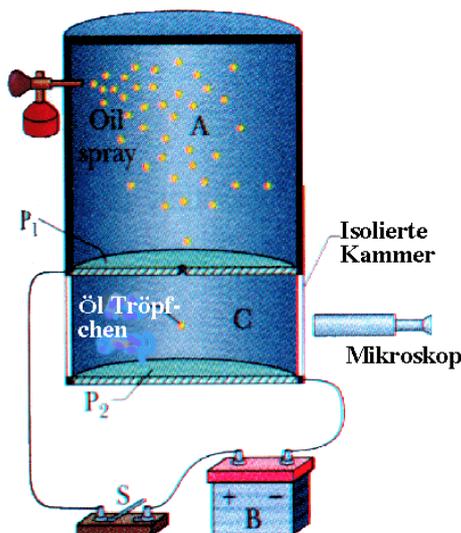


Abbildung 4.2: Messung der Ladungsquantisierung durch Millikan.

Die Quantisierung der elektrischen Ladung wurde in einem berühmten Versuch von Millikan erstmals nachgewiesen. Abb. 4.2 zeigt schematisch das verwendete Experiment. Er brachte kleine Öltröpfchen in einen Raum zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten. Diese Öltröpfchen wurden mit Licht ionisiert, d.h. geladen. Dadurch wurden sie im elektrischen Feld beschleunigt. Millikan beobachtete die Bewegung der Öltröpfchen durch ein Mikroskop. Auf diese Ladung wirkt dann die Kraft $F_e = qE$ und zieht den Tropfen nach oben. Gleichzeitig wird der Öltröpfchen von der Gewichtskraft $F_g = -mg$ nach unten gezogen. Bei der Messung stellt man nun den Zustand durch Verändern der Spannung $U = E \cdot d$ ein, bei dem der Tropfen schwebt, also:

$$F_e = q \cdot E = F_g = m \cdot g \Rightarrow q = \frac{m \cdot g \cdot d}{U}.$$

Um den Effekt des Feldes vom Einfluss der

Schwerkraft zu unterscheiden, invertierte er die Polarität der Spannung. Aus diesen Messungen konnte er die Ladung der Öltröpfchen bestimmen und zeigen, dass es sich immer um ganzzahlige Vielfache der Elementarladung

$$e = 1,602189 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

handelte.

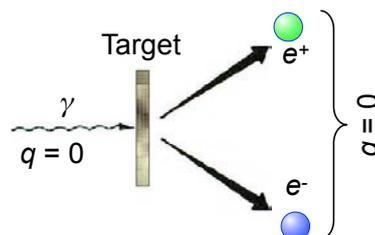


Abbildung 4.3: Erzeugung eines Elektronen-Positronen Paares aus einem Photon.

Für ein abgeschlossenes System gilt, dass die Summe der elektrischen Ladungen konstant ist. Es kann zwar Ladung erzeugt werden, aber immer nur in Paaren, also gleich viel negative wie positive Ladung. Ein Beispiel dafür ist die Paarzeugung, bei der ein hochenergetisches Photon in ein Elektron und ein Positron umgewandelt wird (siehe Abb. 4.3). Ein anderes Beispiel ist der Zerfall des Neutrons, bei dem ein Proton (positiv geladen) und eine Elektron (negativ geladen) entstehen.

4.1.2 Elektrostatische Wechselwirkung

Ladungen üben aufeinander Kräfte aus.

Exp. 9: Elektrostatische Anziehung/Abstoßung

Abb. 4.4 zeigt einen experimentellen Aufbau für die Messung der Coulomb-Anziehung und Abstoßung. Wechselwirkung zwischen zwei Tischtennisbällen, die mit einer Graphitschicht überzogen sind und an einem Metallband aufgehängt sind. Werden die beiden Bälle an eine Hochspannungsquelle angeschlossen, so bringt man eine Ladung

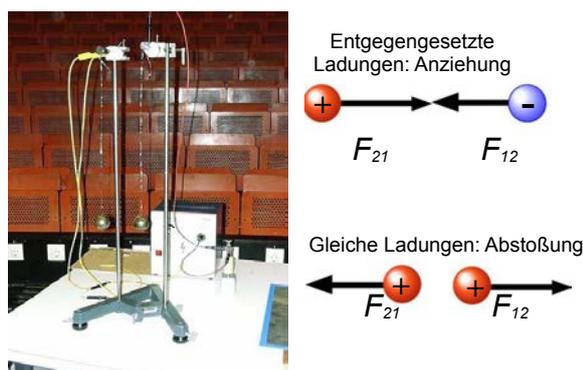


Abbildung 4.4: Anziehung und Abstoßung zwischen geladenen Kugeln.

auf die beiden Körper. Bringt man die gleiche Ladung auf beide Körper (indem man sie mit dem gleichen Pol der Hochspannungsquelle verbindet), so stoßen sie sich ab; bringt man entgegengesetzte Ladungen auf die Kugeln so ziehen sie sich an.

Da Ladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen existieren können elektrostatische Kräfte abgeschirmt werden. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zur Anziehung zwischen Massen, welche immer anziehend ist und damit nicht abgeschirmt werden kann.



Abbildung 4.5: Watteflocken werden auf einer Metallplatte aufgeladen.

Das funktioniert nicht nur mit leitenden Gegenständen, Ladungen können auch auf nichtleitende Gegenstände wie z.B. Watteflocken gebracht werden wenn sie auf einer aufgeladenen Platte liegen. Sie werden dann von dieser abge-

stoßen und fliegen weg. Dies dauert allerdings deutlich länger als bei elektrisch leitenden Gegenständen.

4.1.3 Abstandsabhängigkeit

Exp. 5: Coulomb-Drehwaage

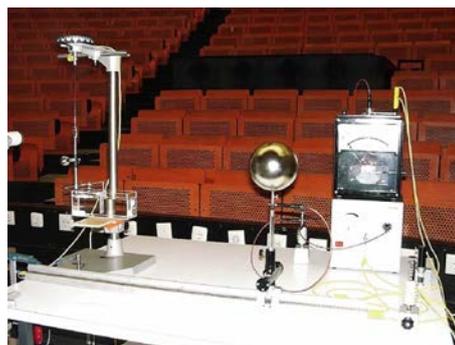


Abbildung 4.6: Coulomb-Drehwaage.

Abb. 4.6 zeigt ein Experiment, mit dem diese Wechselwirkung etwas quantitativer untersucht werden kann. Dazu wird auf eine kleine Metallkugel Ladung gebracht, indem sie über eine Hochspannungsquelle auf 10 kV aufgeladen wird. Eine zweite Metallkugel wird mit der gleichen Spannungsquelle aufgeladen. Die Wechselwirkung zwischen den beiden wird gemessen, indem die Kraft auf die kleine Kugel als Torsionskraft auf einen Draht übertragen wird, an dem ein Spiegel befestigt ist (siehe Abb. 4.6). Die Orientierung des Spiegels wird gemessen, indem ein Laserstrahl daran reflektiert und an die Wand projiziert wird. Wir führen Messungen zu unterschiedlichen Ladungen (d.h. Spannungen) und Abständen durch.

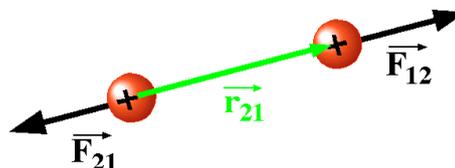


Abbildung 4.7: Ladungen, Kräfte.

Eine Auswertung solcher und ähnlicher Messungen ergibt, dass zwischen zwei Ladungen Q_1 und

Q_2 in einem Abstand r_{12} (siehe Abb. 4.7) die Kräfte

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

wirken. Hier stellt

$$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

die Dielektrizitätskonstante des Vakuums ² dar. Dieses Kraftgesetz wird als Coulomb-Gesetz bezeichnet. Es hat offenbar die gleiche Struktur wie das Gravitationsgesetz. In beiden Fällen ist

- die Kraft proportional zum Produkt der beiden Massen / Ladungen,
- wirkt entlang der Verbindungsachse und
- nimmt mit dem Quadrat des Abstandes ab.

Die elektrostatische (Coulomb-) Wechselwirkung ist verantwortlich für den Zusammenhalt von Elektronen und Atomkernen in Atomen und Molekülen und damit für sämtliche chemischen und biologischen Prozesse. Die Massenanziehung ist die entscheidende Kraft für die Struktur des Kosmos. Allerdings ist die Coulomb-Wechselwirkung sehr viel stärker: vergleicht man die Coulomb-Wechselwirkung mit der Gravitationswechselwirkung für ein Elektron und ein Proton, so ist die Coulomb-Kraft rund 10^{40} mal stärker.

4.1.4 Elektrisches Feld

Elektrische Ladungen üben aufeinander Kräfte aus, welche dem Newton'schen Axiom "actio = reactio" gehorchen. Häufig hat man die Situation, dass ein Instrument und ein freies Testteilchen geladen sind; dann ist die Kraft, welche das Testteilchen auf die Apparatur ausübt kaum von Interesse, sondern primär die Kraft, welche die Apparatur auf das Testteilchen ausübt.

Diese Kraft ist nicht von der Masse des Teilchens abhängig, es geht lediglich seine Ladung ein. Es ist deshalb nützlich, vom konkreten Fall

²auch: elektrische Feldkonstante, Permittivität des Vakuums

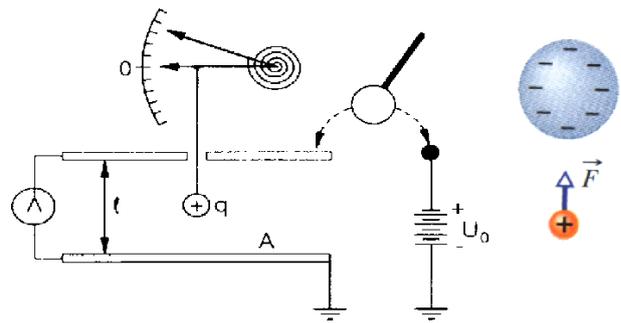


Abbildung 4.8: Kraft auf Ladung im Feld eines Plattenkondensators (links), resp. einer geladenen Kugel (rechts).

eines spezifischen Teilchens zu abstrahieren. Man kann die Behandlung sogar unabhängig von der Ladung des Teilchens machen, indem man die Kraft durch die Ladung dividiert. Die resultierende Hilfsgröße ist das elektrische Feld. Dieses stellt die Kraft dar, die auf eine Einheitsprobeladung wirken würde (\rightarrow Abb. 4.8),

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad [E] = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Diese Gleichung kann auch als Definitionsgleichung für die Einheit Volt verstanden werden. Die elektrostatische Kraft ist dementsprechend gegeben durch das Produkt aus Feldstärke und Ladung des Testteilchens; die Einheit ist damit

$$[F] = \text{N} = \frac{\text{J}}{\text{m}} = \text{C} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Da die Kraft eine Richtung hat, muss auch das Feld eine Richtung enthalten (die gleiche wie die Kraft); man bezeichnet diese Art von Feldern als Vektorfelder.

Man kann die Feldstärke an jedem Ort durch einen Pfeil darstellen, der Betrag und Richtung der Kraft angibt. Der einfachste Fall eines elektrischen Feldes ist durch das elektrische Feld einer Punktladung Q im Ursprung gegeben; das Feld hat dann die Form

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{21}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}. \quad (4.1)$$

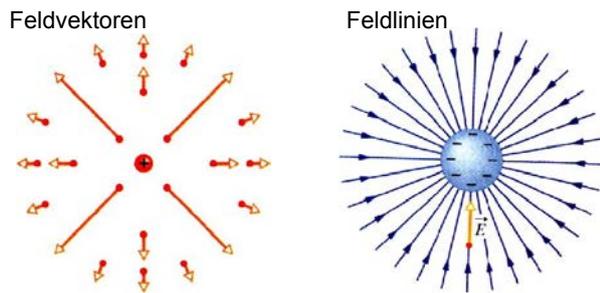


Abbildung 4.9: Feldvektoren und Feldlinien für eine Punktladung.

Wie in Abb. 4.9 gezeigt, sind die Feldvektoren an allen Punkten radial nach außen gerichtet, wobei die Länge mit dem Quadrat des Abstandes abnimmt. Das Feld zeigt die Richtung der Kraft auf eine positive Elementarladung. Somit zeigt die Richtung immer weg von positiven Ladungen, hin zu negativen Ladungen.

Befindet sich die Ladung nicht im Ursprung, sondern an einer allgemeinen Stelle \vec{r}_0 , so wird \vec{r} auf der rechten Seite von Gleichung (4.1) durch $\vec{r} - \vec{r}_0$ ersetzt.

Exp. 6: Coulomb-Feld



Abbildung 4.10: Messung des Coulomb-Feldes.

Mit einem geeigneten Messgerät kann man direkt das elektrische Feld messen. Abb. 4.10 zeigt einen entsprechenden Messaufbau mit einer geladenen Kugel, welche ein zentrales Feld erzeugt. Das Experiment zeigt, dass das Feld proportio-

nal zur Ladung der Kugel und indirekt proportional zum Quadrat des Abstandes ist, also in guter Übereinstimmung mit

$$|\vec{E}(\vec{r})| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2},$$

Typische Feldstärken sind

Stromleitungen in Wohnhäusern	10^{-2} V/m
Radiowellen	10^{-1} V/m
Sonnenlicht	10^3 V/m
Blitz	10^4 V/m
Röntgenröhre	10^6 V/m
Wasserstoff-Atom (in 0.5 A)	$6 \cdot 10^{11}$ V/m
Uran-Atomkern	$2 \cdot 10^{21}$ V/m

4.1.5 Feldlinien

Neben den oben dargestellten Feldvektoren stellt man elektrische Felder auch gerne durch Feldlinien dar; diese beginnen und enden immer in Ladungen; im ladungsfreien Raum können Feldlinien somit weder anfangen noch enden. An jeder Stelle geben sie die Richtung der Kraft / des Feldes an. Die Dichte der Feldlinien ist proportional zur Stärke des Feldes. Im Falle einer Kugel nimmt die Dichte nach außen quadratisch mit dem Abstand ab, wie die Coulomb-Wechselwirkung quadratisch mit dem Abstand abnimmt. Die Felder unterschiedlicher Ladungen sind additiv: Das gesamte Feld einer Gruppe von Ladungen Q_i an den Positionen \vec{r}_i kann als Summe über die einzelnen Beiträge berechnet werden,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i).$$

Bei allen Berechnungen dieser Art darf das zusätzliche Feld der Probeladung nicht berücksichtigt werden: das Feld ist definiert über die Kräfte, welche die anderen Ladungen auf die Probeladung ausüben; die Probeladung selber wird als infinitesimal angesehen.

Sind positive und negative Ladungen vorhanden, so laufen die Feldlinien von den positiven zu den

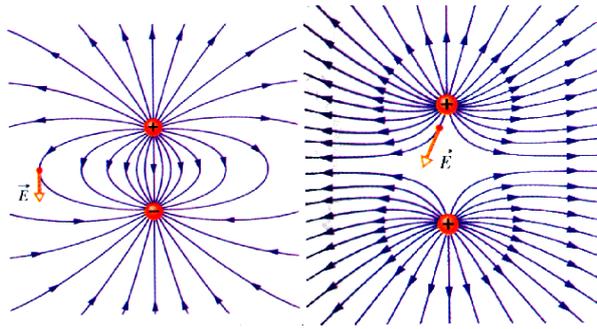


Abbildung 4.11: Links: Feldlinien eines elektrischen Dipols. Rechts: Feldlinien von zwei positiven Ladungen.

negativen Ladungen - wie sich eine positiv geladene Testladung bewegen würde. Die Richtung der Kraft an jeder Stelle ist durch die Tangente an die Feldlinie gegeben. Da die Kraft an jeder Stelle des Raumes wohl definiert ist können sich Feldlinien nicht überschneiden; am Schnittpunkt wäre die Richtung der Kraft nicht eindeutig. Sind mehrere Ladungen mit gleichem Vorzeichen vorhanden, so stoßen sich die Feldlinien gegenseitig ab. Abb. 4.11 zeigt links die Feldlinien eines elektrischen Dipols, rechts für ein System aus zwei gleichen Ladungen.

Exp. 4: Elektrische Feldlinien

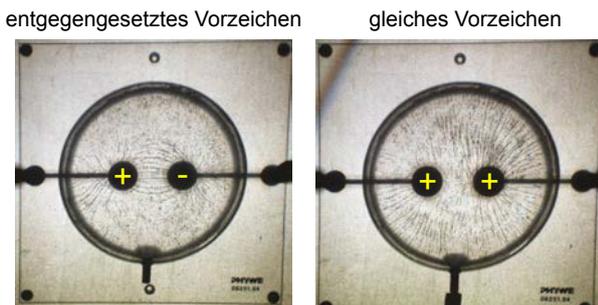


Abbildung 4.12: Elektrische Feldlinien eines Paares von Ladungen, gemessen mit Grießkörnern in Öl.

Wie in Abb. 4.12 gezeigt, kann man die Feldlinien sichtbar machen, indem man Grießkörner in Öl in den Raum der Feldlinien bringt.

Die Felder, welche durch unterschiedliche Ladungen erzeugt werden, addieren sich. Für eine Gruppe von n Ladungen kann somit das gesamte Feld berechnet werden als

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|}.$$

4.1.6 Elektrostatisches Potenzial

Wird eine elektrische Ladung q in einem elektrischen Feld bewegt, muss Arbeit aufgewendet werden. Wie aus dem Kapitel Mechanik bekannt, ist Arbeit definiert über das Integral

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s} = -q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

wobei verwendet wurde, dass die äußere Kraft \vec{F} gerade die elektrostatische Kraft $q\vec{E}$ überwinden muss. Bei der elektrostatischen Kraft handelt es sich um eine konservative Kraft, d.h. es spielt keine Rolle, auf welchem Weg man sich von A nach B bewegt und das Schleifenintegral über einen geschlossenen Weg verschwindet,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Somit existiert eine potenzielle Energie \mathcal{E}_{pot} , welche die Arbeit beschreibt, die für den Transport nötig ist.

Meist verwendet man nicht die potenzielle Energie, sondern man dividiert wieder durch die Probeladung q und definiert das elektrische Potenzial U als

$$U_{ab} = \frac{\mathcal{E}_{pot}}{q} = \frac{W_{ab}}{q} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Die Einheit des elektrostatischen Potenzials ergibt sich damit als Volt:

$$[U] = \text{Volt} = \text{V}.$$

Umgekehrt erhält man das elektrische Feld aus dem Gradienten des Potenzials:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U.$$

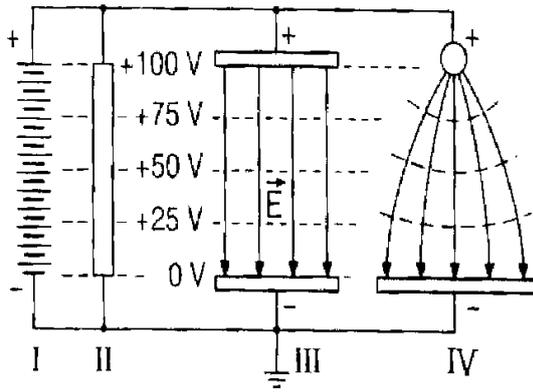


Abbildung 4.13: Feldlinien und Äquipotenzialflächen für verschiedene Elektroden.

In einer gegebenen Anordnung kann jedem Punkt im Raum ein Potenzial zugeordnet werden, welches dem Integral des elektrischen Feldes vom Referenzwert 0 V bis zu diesem Punkt entspricht. So besitzen die Pole einer Batterie ein wohl definiertes Potenzial. In einem homogenen elektrischen Feld nimmt das Potenzial entlang der Feldlinien linear zu. Abb. 4.13 zeigt dies für unterschiedliche Randbedingungen.

Das elektrostatische Potenzial lässt sich für eine Punktladung Q_1 relativ leicht rechnen:

$$\begin{aligned}
 U_{ab} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{Q_1}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{s} \\
 &= -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right).
 \end{aligned}$$

In vielen Fällen ist es nützlich, eine feste Referenz zu haben. Man wählt üblicherweise das System als Referenz, bei dem die Testladung unendlich weit entfernt ist, so dass die elektrostatische Wechselwirkung verschwindet. Bringt man die Referenzladung aus dem Unendlichen zur Position r , d.h. $\vec{r}_a \rightarrow \infty$, $\vec{r}_b \rightarrow r$, so wird

$$U_{\infty r} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Abbildung 4.14 zeigt die entsprechende Abhängigkeit.

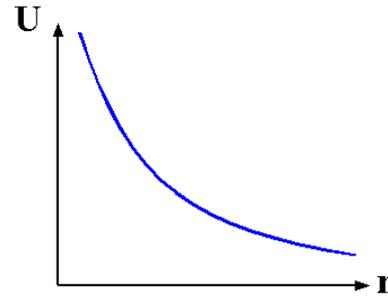


Abbildung 4.14: Potenzial einer Punktladung als Funktion des Abstandes r .

Dies ist die Energie (dividiert durch die Ladung), welche benötigt wird, um die Ladung bis zum Abstand r zu bringen. Diese Größe wird einfach als das skalare Potenzial $\phi = U_{\infty r}$ bezeichnet.

Ist das Potenzial für eine Ladungsverteilung bekannt, so kann umgekehrt daraus das elektrische Feld berechnet werden. Es gilt allgemein, dass die Kraft als Gradient der potenziellen Energie berechnet werden kann,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \mathcal{E}_{pot}.$$

Dividiert man auf beiden Seiten durch die Testladung, so erhält man

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi,$$

d.h. das elektrische Feld ist der negative Gradient des elektrischen Potenzials. Dies ist auch eine sehr bequeme Möglichkeit, das Feld einer Ladungsverteilung zu berechnen: da das Potenzial ein skalares Feld ist, kann es leichter berechnet werden als das vektorielle elektrische Feld. Man erhält das Potenzial einer beliebigen Zahl von Ladungen Q_i and den Positionen \vec{r}_i als die Summe

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

4.1.7 Äquipotenzialflächen

Das Potenzial kann man ebenfalls grafisch darstellen. Dafür verwendet man meist Äquipotenzialflächen, d.h. Flächen gleichen Potenzials. Man

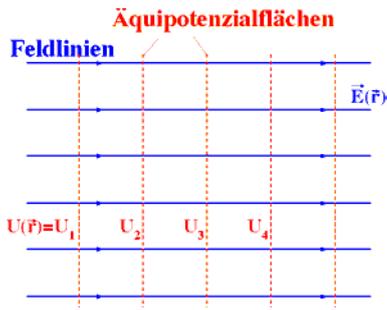


Abbildung 4.15: Feldlinien und Äquipotenzialflächen stehen senkrecht aufeinander.

kann diese als eine Art “Höhenlinien” des Potentials betrachten (→ Abb. 4.15).

Da auf einer Äquipotenzialfläche das Potential konstant ist, und die Feldlinien durch den Gradienten des Potentials gegeben sind, stehen die Feldlinien auf jeder Äquipotenzialfläche senkrecht.

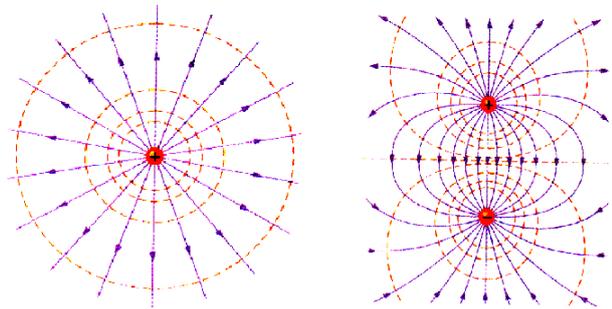


Abbildung 4.16: Feldlinien und Äquipotenzialflächen für einen Monopol und einen Dipol.

Dies ist bei einer Punktladung leicht einzusehen: die Äquipotenzialflächen sind kugelförmige Flächen und stehen damit offensichtlich senkrecht zu den Feldlinien, welche radial nach außen laufen, wie in Abb. 4.16 links gezeigt. Sind mehrere Ladungen vorhanden, so addieren sich wiederum die Potentiale der einzelnen Ladungen. Für ein Paar von entgegengesetzten Punktladungen findet man in der Mitte eine Ebene, welche dem Potential Null entspricht, während sich die Äquipotenzialflächen in der Nähe der Ladungen kugeln annähern.

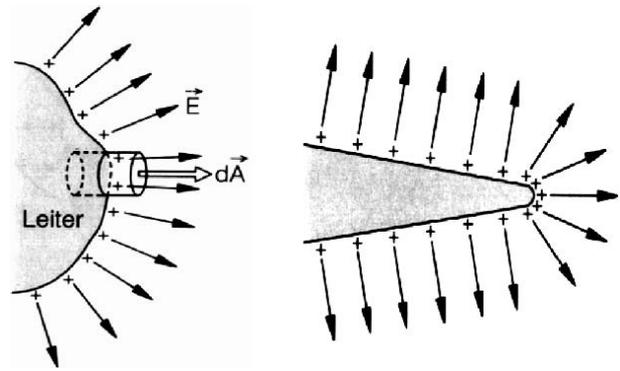


Abbildung 4.17: Feldlinien verlaufen an Metalloberflächen senkrecht; an Spitzen (rechts) ist die Feldlinien-dichte besonders hoch.

Äquipotenzialflächen findet man u. a. als Oberflächen metallischer Körper. Wie in Abb. 4.17 gezeigt, stehen somit die Feldlinien senkrecht auf der Oberfläche. Sie sind proportional zur Flächenladungsdichte (siehe später). An der Spitze von metallischen Gegenständen liegen die Äquipotenzialflächen besonders nahe beisammen; hier ist somit die Feldstärke besonders groß. Generell wächst das elektrische Feld mit der zweiten Potenz des inversen Krümmungsradius r

$$E \propto \frac{1}{r^2}.$$

Je kleiner der Krümmungsradius desto höher die Feldstärke. Bringt man zwei metallische Kugeln auf gleichem Potential in die Nähe einer geerdeten Platte, so schlägt immer zuerst die kleinere Kugel durch, da hier die Feldstärke höher ist.

Exp. 42b: Flächenladungsdichte

Man kann diesen Effekt u.a. dazu ausnutzen, Elektronen aus einem Metall herauszulösen; der Effekt wird dann als Feldemission bezeichnet.

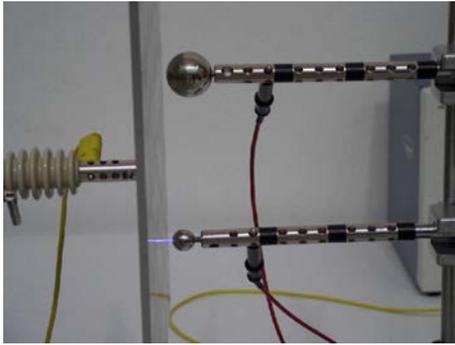


Abbildung 4.18: Der Durchschlag erfolgt bei der kleineren Kugel, da diese die höhere Spannung an der Oberfläche aufweist.

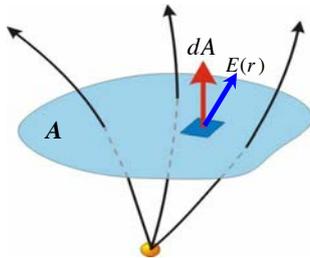


Abbildung 4.19: Fluss des Feldes \vec{E} durch eine Fläche A .

4.1.8 Feldgleichung

Der Fluss des elektrischen Feldes durch ein Flächenelement dA ist, wie in Abb. 4.19 gezeigt,

$$d\Phi = \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}.$$

Hier stellt $d\vec{A}$ einen Vektor senkrecht zur Oberfläche dar. Sein Betrag ist gleich der Größe des Flächenelements.

Wir betrachten eine Kugelfläche mit Radius r um eine Punktladung Q (\rightarrow Abb. 4.20) und integrieren den Fluss des Feldes über diese Kugel. Die Stärke des Feldes auf der Kugeloberfläche ist

$$|E| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

und die Oberfläche ist $A = 4\pi r^2$. Das Flächenintegral ist demnach

$$\iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

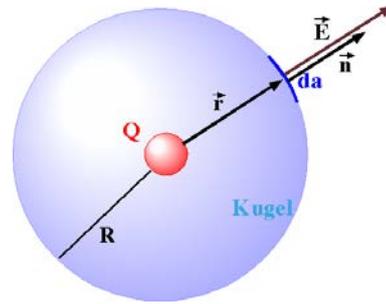


Abbildung 4.20: Fluss der Feldlinien durch eine Kugelfläche.

Das Flächenintegral des elektrischen Feldes wird oft als elektrischer Fluss bezeichnet.

Wir verwenden diese Beziehung, um eine neue Größe einzuführen, die elektrische Verschiebungsdichte \vec{D} , welche definiert ist als das Verhältnis aus Feld erzeugender Ladung und Oberfläche,

$$\vec{D} = \frac{Q}{A} \vec{n}, \quad [D] = \frac{C}{m^2}, \quad (4.2)$$

wobei der Einheitsvektor \vec{n} senkrecht auf der Oberfläche steht und nach außen zeigt. Offenbar gilt an der Oberfläche der Kugel

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{n} = \epsilon_0 \vec{E}.$$

Die Beziehung $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ zwischen elektrischem Feld und elektrischer Verschiebungsdichte, welche hier für eine Kugel hergeleitet wurde, gilt allgemein im Vakuum.

Das Integral der Verschiebungsdichte über die Kugeloberfläche ergibt somit

$$\iint_{Kugel} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q,$$

d.h. das Integral der elektrischen Verschiebungsdichte über die Kugeloberfläche ist gleich der eingeschlossenen Ladung. Diese Beziehung gilt nicht nur wie in diesem Fall für eine Punktladung in einer Kugel, sondern für beliebige Ladungsverteilungen $\rho_{el}(\vec{r})$ in beliebigen Oberflächen:

$$\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q = \iiint \rho_{el} dV.$$

Dies ist die Integralform der Feldgleichung.

Die linke Seite dieser Gleichung kann mit Hilfe des Satzes von Gauß in ein Volumenintegral umgewandelt werden:

$$\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \cdot dV = \iiint_V \rho_{el} dV.$$

Da diese Gleichung für jedes Volumen gilt, müssen die Integranden identisch sein,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho_{el}(\vec{r}).$$

Diese Gleichung wird als die Differentialform der Feldgleichung bezeichnet. Sie kann als Definition der elektrischen Verschiebung betrachtet werden. Man drückt diese Beziehung auch dadurch aus, dass man sagt, dass die elektrischen Ladungen die Quellen des elektrischen Feldes darstellen.

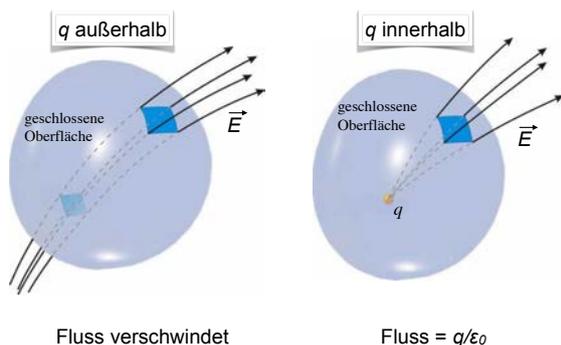


Abbildung 4.21: Der Fluss durch die Oberfläche verschwindet, wenn die Quelle außerhalb des Volumen liegt; sonst ist der Fluss gleich der eingeschlossenen Ladung.

Eine direkte Konsequenz ist, dass der gesamte elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche verschwindet, sofern sie keine Ladung einschließt. Abb. 4.21 zeigt die beiden Fälle für eine Ladung außerhalb (links) und innerhalb (rechts) der Oberfläche.

4.1.9 Ladungsverteilungen und Felder

Die Feldgleichung sagt, dass die Ladungen die Quellen des elektrischen Feldes darstellen. Dies

ermöglicht es in vielen Fällen, die Felder zu berechnen, die von einer Ladungsverteilung erzeugt werden. Das Beispiel der Punktladung wurde für die Herleitung verwendet.

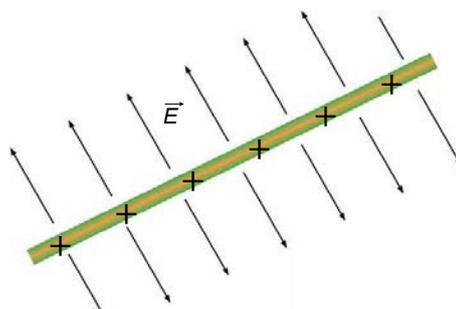


Abbildung 4.22: Lineare Ladungsverteilung und Feldlinien.

Wir betrachten als zweites Beispiel das Feld, das von einer linienförmigen Ladung erzeugt wird (\rightarrow Abb. 4.22). Die Ladung sei gleichmässig auf einem unendlich langen dünnen Draht verteilt sei, mit der Dichte $\lambda = \Delta Q / \Delta x$. Die elektrischen Felder (\vec{D} , \vec{E}) müssen aus Symmetriegründen radial von der Zeilenladung weg gerichtet sein und ihre Amplituden können nur eine Funktion des Abstandes sein. Der Fluss durch die Oberfläche A eines Zylinders mit Radius r und Länge ℓ mit $\ell \gg r$ ist dann

$$\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{n} = 2\pi r \ell |D(r)| = \iiint_V \rho_{el} dV = \lambda \ell,$$

d.h. gleich der eingeschlossenen Ladung. Somit ist die elektrische Verschiebungsdichte $D(r)$ als Funktion des Abstandes r vom Draht

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}.$$

Die lineare Ladungsdichte wird somit durch den Umfang eines Kreises dividiert, oder die gesamte im Zylinder enthaltene Ladung ($= \lambda \ell$) durch die Oberfläche des Zylinders ($= 2\pi r \ell$).

Diese Feldlinien werden sichtbar, wenn die Spannung hoch genug ist und das umgebende Medium ionisierbar. In Luft z.B. werden durch die hohen Spannungen Moleküle ionisiert. Bei der Rekombination leuchtet das Medium, es kommt zu einer



Abbildung 4.23: Koronaentladung eines Drahtes.

sog. Korona-Entladung. Abbildung 4.23 zeigt als Beispiel die Koronaentladung eines Drahtes. Die Spuren folgen grob den Feldlinien.

Als nächstes berechnen wir den Feldverlauf für eine homogene, kugelförmige Ladungsverteilung mit Radius R . Außerhalb der Kugel ist der Feldverlauf unabhängig von der Verteilung der Ladung, da ja nur die Summe der eingeschlossenen Ladung eine Rolle spielt,

$$D(r > R) = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Für den Feldverlauf im Innern trägt jeweils nur der Anteil der Ladung bei, der sich im Inneren einer entsprechenden Kugelschale befindet. Dieser beträgt

$$Q_{\text{innen}} = Q \frac{r^3}{R^3}.$$

Das Feld beträgt dementsprechend

$$D(r < R) = \frac{Q}{4\pi} \frac{r}{R^3}.$$

Innerhalb der Kugel nimmt die Feldstärke somit linear zu, während sie außerhalb quadratisch mit der Entfernung abfällt.

Da das Coulomb'sche Gesetz die gleiche mathematische Form aufweist wie das Newton'sche Gravitationsgesetz findet man die gleiche Abhängigkeit für die Schwerebeschleunigung im Inneren eines Planeten: lineare Zunahme unterhalb der Oberfläche, quadratische Abnahme oberhalb.

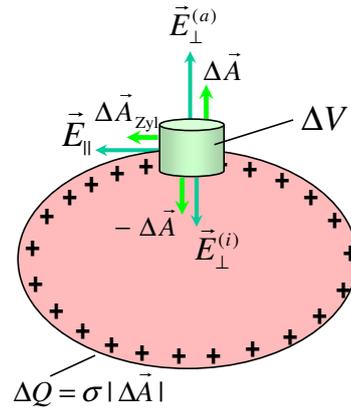


Abbildung 4.24: Ladungsverteilung auf einer Fläche.

Völlig analog kann das Feld für eine ebene Ladungsverteilung der Dichte $\sigma = Q/A$ berechnet werden. Wie in Abb. 4.24 gezeigt betrachten wir einen flachen Zylinder, welcher die Ebene umschließt. Dessen Oberfläche beträgt zweimal die Fläche der Ebene, so dass die Feldstärke $D = \sigma/2$ beträgt.

4.1.10 Elektrische Dipole

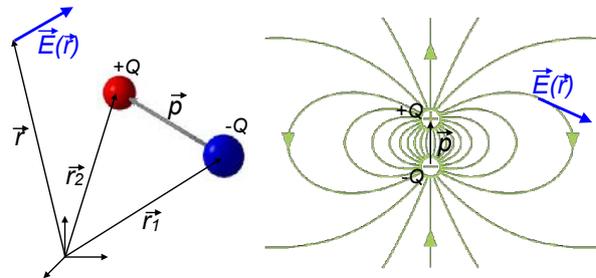


Abbildung 4.25: Feld eines elektrischen Dipols.

Ein elektrischer Dipol besteht aus zwei entgegengesetzten Ladungen in einem festen Abstand a (\rightarrow Abb. 4.25). Das System ist somit nach außen elektrisch neutral. Die beiden Ladungen erzeugen jedoch ein Feld, das man durch Superposition von zwei Zentralfeldern leicht bestimmen kann.

Das Potenzial und das Feld des elektrischen Dipols erhält man als Summe über die Beiträge der

einzelnen Ladungen. Mit Ladung $-Q$ bei \vec{r}_1 und $+Q$ bei \vec{r}_2 ergibt das Potenzial

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-Q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right).$$

Ist der Abstand zu den Ladungen groß im Vergleich zu ihrem Abstand, so kann man das Potenzial näherungsweise ausdrücken als

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

Das elektrische Feld erhält man aus der Ableitung des Potenzials als

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{p}}{r^5},$$

wiederum in der Näherung eines großen Abstandes vom Dipol. Hier wurde der Dipol in den Koordinatenursprung gelegt ($\vec{r}_1 \approx \vec{r}_2 \approx 0$). In diesem Bereich ($r \gg p$) fällt somit das Dipolfeld mit der dritten Potenz des Abstandes ab, im Gegensatz zum Monopol, wo das Feld mit der zweiten Potenz abfällt.

Diese Entwicklung in so genannten Multipolen kann weitergeführt werden. Die entsprechenden Feldverteilungen können durch diskrete Ladungsverteilungen dargestellt werden, wobei die Multipole mathematische Näherungen für große Abstände von der Ladungsverteilung darstellen. Es ist möglich, jede Ladungsverteilung als Multipol-Entwicklung darzustellen, wobei die höheren Multipole mit zunehmendem Abstand an Bedeutung verlieren.

Ist der Abstand von den einzelnen Ladungen groß genug, so kann man dieses System vollständig durch sein Dipolmoment

$$\vec{p} = Q\vec{a} \quad [p] = \text{Cm}$$

charakterisieren, welches durch das Produkt aus Ladung und Abstand gegeben ist. Die Richtung des Dipols geht von der negativen zur positiven Ladung.

Als Einheit wird häufig auch das Debye (nach P. Debye, 1884-1966) verwendet. Dieses ist gut auf

atomare / molekulare Größen angepasst: 1 Debye = 0.2 eÅ. Diese Einheit wird v.a. auch für Dipolmomente in Molekülen verwendet. Das Dipolmoment verschwindet in symmetrischen Molekülen wie H₂, N₂, CO₂, C₆H₆.

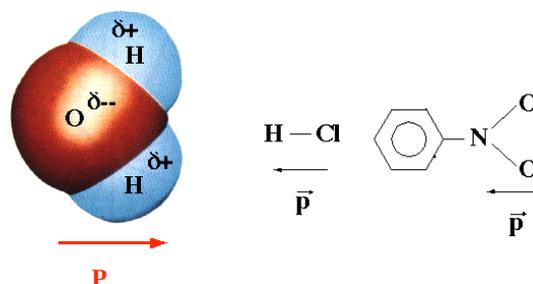


Abbildung 4.26: Molekulare Dipole.

Dipolmomente treten z.B. in fast allen Molekülen mit unterschiedlichen Kernen auf. Abb. 4.26 zeigt einige Beispiele. Tabelle 4.1 stellt numerische Werte für einige Beispiele in unterschiedlichen Einheiten zusammen.

	p	p	p
Molekül	10 ⁻³⁰ Cm	eÅ	Debye
HF	6,37	0,398	1,99
HCl	3,6	0,225	1,13
HBr	2,67	0,167	0,83
H ₂ O	6,17	0,385	1,93

Tabelle 4.1: Dipolmomente unterschiedlicher Moleküle in unterschiedlichen Einheiten.

4.1.11 Bewegung geladener Teilchen im elektrischen Feld

Ein elektrisch geladenes Teilchen mit Ladung q erfährt im elektrischen Feld eine Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$ und wird dadurch beschleunigt:

$$\vec{a} = \vec{E} \frac{q}{m}.$$

Damit wird (elektrostatische) potenzielle Energie in kinetische Energie umgewandelt. Durchläuft das Teilchen eine Spannung $V = \phi_2 - \phi_1$,

so ändert sich seine kinetische Energie um

$$\Delta \mathcal{E}_{kin} = \frac{m}{2} v^2 = -\Delta \mathcal{E}_{pot} = -q(\phi_2 - \phi_1).$$

Man verwendet deshalb für die kinetische Energie von geladenen Teilchen gerne die Einheit

$$\begin{aligned} \text{Elektronenvolt} &= \text{eV} = 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{C} \cdot 1\text{V} \\ &= 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{J}, \end{aligned}$$

oder die üblichen Vielfachen meV, keV, MeV, GeV u.s.w. Ein Elektronenvolt ist die Energie, welche ein Teilchen mit einer Elementarladung beim Durchlaufen der Spannung 1 V erhält.

Um eine Idee von den relevanten Größenordnungen zu erhalten, berechnen wir die Geschwindigkeit eines Elektrons nach Beschleunigung in einem Feld von 1000 V, also bei einer Energie von 1 keV:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ J}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} \\ &= 1,88 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,06 c, \end{aligned}$$

d.h. etwa 6% der Lichtgeschwindigkeit. Dementsprechend treten bei Geschwindigkeiten in dieser Größenordnung bereits relativistische Effekte auf.

Fliegt ein geladenes Teilchen senkrecht zum Feld in eine Region mit elektrischem Feld so gilt das Unabhängigkeitsprinzip: es behält seine bisherige Geschwindigkeitskomponente bei und wird in Feldrichtung beschleunigt, d.h. es wird abgelenkt.

Dies wird u.a. in Oszillographen verwendet, wo eine Ablenkspannung die Bewegung von Elektronen beeinflussen, welche auf den Schirm geschossen werden. Abb. 4.27 zeigt das zu Grunde liegende Funktionsprinzip.

Wie in Abb. 4.28 dargestellt, verwenden Tintenstrahldrucker ein ähnliches Prinzip: Nachdem die Farbtröpfchen erzeugt werden, erhalten sie eine Ladung, welche von außen kontrolliert werden kann. Je nach Stärke der Ladung werden sie im folgenden Feld stärker oder weniger stark abgelenkt.

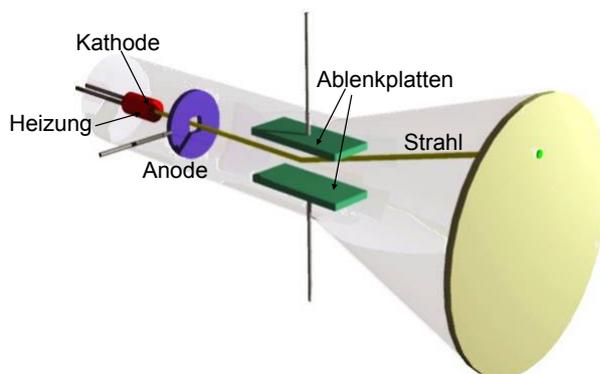


Abbildung 4.27: Funktionsprinzip eines Oszilloskops.

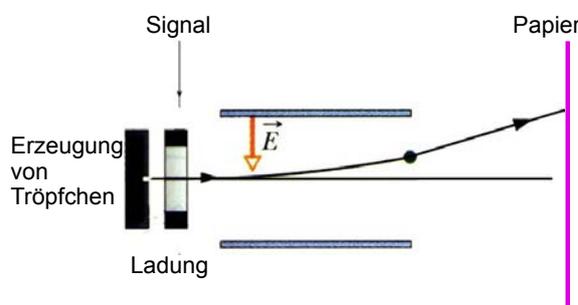


Abbildung 4.28: Funktionsprinzip eines Tintenstrahldruckers.

Exp. 23: Kerze im Feld.



Abbildung 4.29: Kerzenflamme in einem elektrischen Feld.

Eine Kerze, die in einem elektrischen Feld brennt, erzeugt geladene Teilchen, welche in einem elektrischen Feld abgelenkt werden.

4.2 Materie im elektrischen Feld

Auch elektrisch neutrale Materie besteht aus geladenen Teilchen (Atomkerne, Elektronen), welche auf unterschiedliche Weise aneinander gebunden sind.

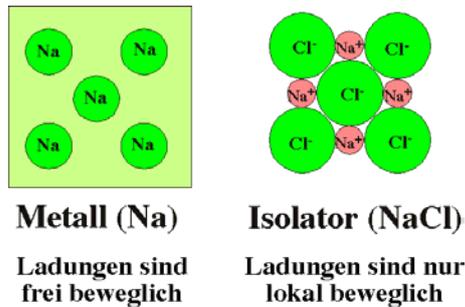


Abbildung 4.30: Geladene Bestandteile elektrisch neutraler Materie.

Abb. 4.30 zeigt dies für 2 Beispiele. Deshalb wirken in einem elektrischen Feld Kräfte auf diese Teilchen, welche sie verschieben. Sind die Teilchen über makroskopische Distanzen beweglich, so spricht man von einem elektrischen Leiter; sind sie nur über mikroskopische Distanzen ($< 1\text{nm}$) beweglich so spricht man von einem Isolator. Wie leicht sie beweglich sind wird durch den elektrischen Widerstand quantifiziert, der im Kapitel "stationäre Ströme" diskutiert wird. Im Rahmen der Elektrostatik unterscheidet man lediglich zwischen Leitern und Nichtleitern.

4.2.1 Felder und elektrische Leiter

Wir betrachten zunächst elektrische Leiter. Für die Diskussion statischer elektrischer Felder kann der Widerstand eines elektrischen Leiters zu Null angenommen werden. Die direkteste Konsequenz davon ist, dass im Inneren eines elektrischen Leiters alle elektrischen Felder verschwinden. Dies sieht man aus folgender Überlegung: Existiert in einem Leiter ein Feld, so werden die frei beweglichen Ladungsträger (=Elektronen) verschoben. Dadurch werden positive und negative Ladungen erzeugt, welche ihrerseits ein Feld generieren. Dieses wird dem äußeren Feld überlagert und

die Bewegung der Ladungsträger endet wenn die Summe der beiden Felder verschwindet.

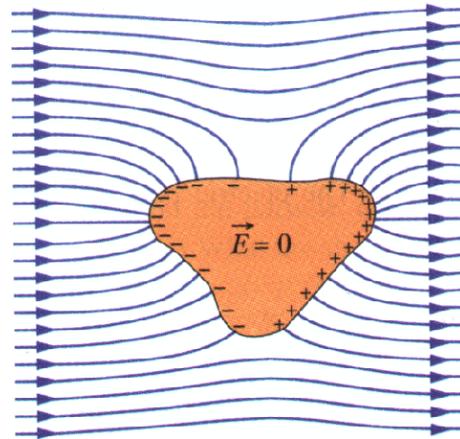


Abbildung 4.31: Feldverlauf bei metallischen Körpern.

Das gleiche gilt an der Oberfläche für Feldkomponenten unmittelbar außerhalb des Leiters parallel zur Oberfläche: würden solche existieren, so würden die Ladungsträger sich entlang der Oberfläche verschieben bis die Felder ausgeglichen wären. Es entstehen somit auf der Oberfläche von elektrischen Leitern Oberflächenladungen. Diese können quantitativ aus dem Gauß'schen Satz berechnet werden, da sie die Quelle (Senke) der elektrischen Feldlinien darstellen. Die Flächenladungsdichte entspricht der elektrischen Verschiebungsdichte,

$$D = \sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \epsilon_0 E.$$

Da die Komponenten parallel zur Oberfläche verschwinden, müssen die Feldlinien senkrecht auf die Oberfläche auftreffen, wie in Abb. 4.31 gezeigt.

Der Beweis, dass die Feldlinien senkrecht auf der Leiteroberfläche stehen, kann auch anders geführt werden: Da im Inneren keine elektrischen Felder existieren, befindet sich der gesamte metallische Körper auf dem gleichen Potenzial, wie in Abb. 4.32 gezeigt. Die Oberfläche eines metallischen Körpers bildet somit eine Äquipotentialfläche. Da Feldlinien senkrecht auf Äquipotentialflächen stehen, müssen sie senkrecht auf der Oberfläche stehen.

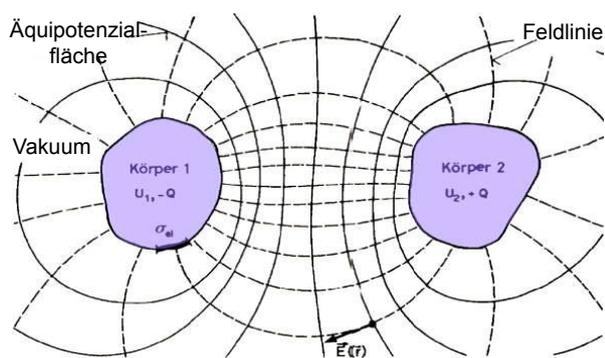


Abbildung 4.32: Äquipotenzialflächen bei metallischen Körpern.

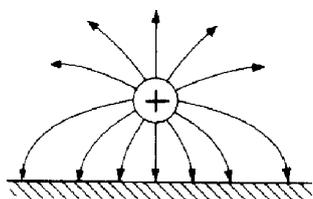


Abbildung 4.33: Ladung oberhalb einer Metalloberfläche.

Bringt man eine Ladung vor einen elektrischen Leiter so verlaufen die Feldlinien genau so wie wenn sich hinter der Metalloberfläche eine entgegengesetzte Ladung befinden würde. Man nennt diese eine Spiegelladung. In Wirklichkeit wird sie durch eine Oberflächenladungsdichte "simuliert".

Exp. 7a: Spiegelladungen

Im Experiment vergleichen wir die Kraft auf eine geladene Kugel für den Fall, dass sie einer entgegengesetzt geladenen Kugel ausgesetzt ist, mit der Kraft, welche durch eine geerdete Platte in halber Distanz erzeugt wird. Innerhalb der Fehlergrenzen misst man die gleiche Auslenkung.

4.2.2 Feldfreie Räume

Genau so wie das Feld im Inneren eines Leiters verschwindet, verschwindet es auch in einem Hohlraum im Inneren eines Leiters, sofern dieser keine Ladungen enthält.

Wir können dies in einem Experiment nachweisen: Der Hohlraum wird hier durch einen Drahtkäfig angenähert. Eine Sonde misst das Potenzial im Inneren des Käfigs: Solange man den Rändern nicht zu nahe kommt, bleibt es konstant. Hohlräume dieser Art werden als Faraday-Käfige bezeichnet.



Abbildung 4.34: Auto als Faraday-Käfig.

Faraday-Käfige ermöglichen es, äußere Felder von empfindlichen Apparaten fernzuhalten. Der gleiche Effekt schützt Insassen von Automobilen oder Seilbahnen vor dem Effekt eines Blitzes.

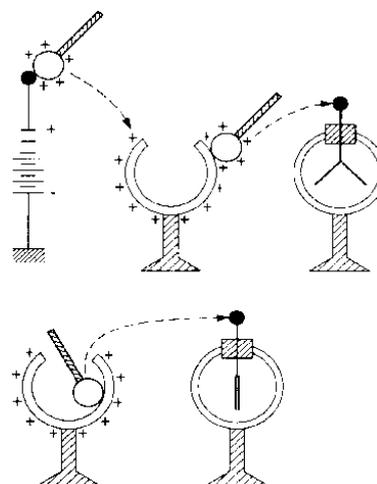


Abbildung 4.35: Transport von elektrischen Ladungen von und zu einem Leiter.

Wird eine Ladung auf einen elektrischen Leiter gebracht so wandert sie nach außen; das Feld im Innern bleibt Null.

4.2.3 Influenzladung

Befindet sich ein elektrisch leitender Körper im elektrischen Feld, so werden Ladungen auf die Oberfläche so verschoben, dass das Feld im Inneren des Körpers verschwindet. Man erhält eine Oberflächenladungsdichte

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad [\sigma] = \frac{C}{m^2}.$$

Die so erzeugten Oberflächenladungen werden auch als Influenzladungen bezeichnet.

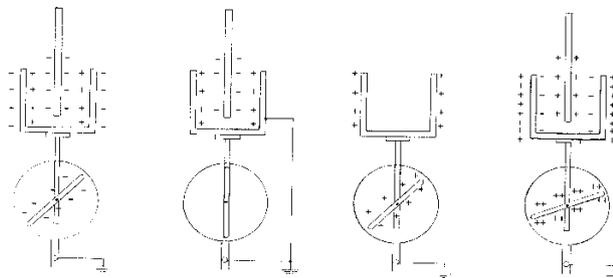


Abbildung 4.36: Erzeugung und Nachweis von Influenzladungen.

Man kann diese Influenzladungen z.B. nachweisen, indem man sie mit einem Elektrometer misst. Abb. 4.36 zeigt ein solches Elektrometer, welches mit der äußeren Seite des Bechers verbunden. Bringt man einen geladenen Kunststoffstab in das Innere des Bechers, so wird eine Oberflächenladung erzeugt, wobei die Innenseite des Bechers entgegengesetzt zur Ladung des Stabes geladen wird, die Außenseite gleich wie der Stab. Wird die Außenseite geerdet so wird die dort erzeugte Ladung entfernt und das Elektrometer zeigt keine Ladung mehr an. Entfernt man zuerst das Erdungskabel und anschließend den Stab, so stellt man fest, dass die Dose jetzt geladen ist.

Auf der Basis von Influenzladung kann man elektrische Maschinen herstellen. Solche elektrostatischen Motoren haben zwar bisher kaum eine Bedeutung. Sie werden jedoch in Mikromaschinen (→ Abb. 4.37) verwendet, da sie einfacher

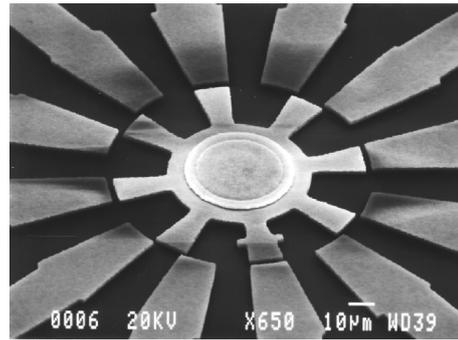


Abbildung 4.37: Elektrostatistischer Mikromotor.

zu konstruieren sind als konventionelle elektromagnetische Maschinen.

4.2.4 Bandgenerator

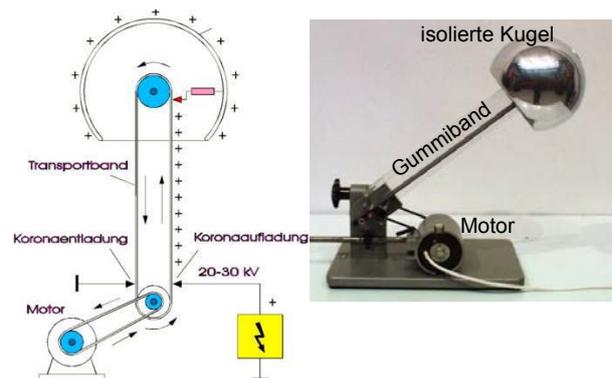


Abbildung 4.38: Van-de-Graaff Generator; links: Prinzip; rechts: Foto.

Ähnliche Ladungsübertragung verwendet man teilweise für die Erzeugung hoher Spannungen, z.B. beim Van-de-Graaff³-Generator, Wie in Abb. 4.38 gezeigt, wird dafür ein umlaufendes elektrisch isolierendes Band verwendet, beispielsweise ein Gummiband, welches als Förderband wirkt, Es wird durch Reibung oder durch Aufsprühen der Ladung (siehe Koronaentladung) aus einer externen Spannungsquelle elektrisch aufgeladen. Die Ladung wird durch die Bewegung des Bandes in das Innere einer metallischen Hohlkugel transportiert und dort durch eine mit

³Robert Jemison Van de Graaff (1901 - 1967)

der Kugel leitend verbundene Bürste vom Band "abgestreift". Sie wandert dann auf die Außenseite der Kugel; da das Innere der Kugel feldfrei bleibt, können immer noch zusätzliche Ladungen eingebracht werden und die Kugel kann dadurch auf immer höhere Spannung gegenüber der Umgebung aufgeladen werden. Die Spannung wird nur begrenzt durch Funkendurchschläge bei zu hoch gewordener Feldstärke. Mit einem einfachen Demonstrationsgerät können damit Spannungen bis zu 240 kV erzeugt werden. Mit weiter entwickelten Geräten erhält man Spannungen bis zu einigen MV. Solche Geräte werden z.B. für die Beschleunigung von Elementarteilchen verwendet.

4.2.5 Dipole in einem äußeren Feld

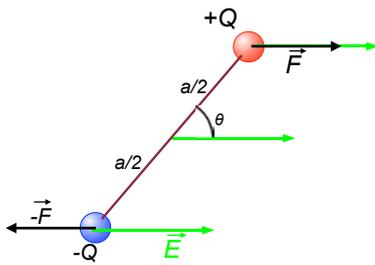


Abbildung 4.39: Paar von Punktladungen in einem homogenen elektrischen Feld.

In einem homogenen elektrischen Feld erfährt ein Dipol keine Translationsbeschleunigung, da die beiden Kräfte auf die beiden Ladungen entgegengesetzt sind, wie in Abb. 4.39 gezeigt. Ist der Dipol nicht parallel zur Feldrichtung, sind die beiden Kräfte jedoch seitlich gegeneinander versetzt. Sie bilden ein Kräftepaar, welches dann ein Drehmoment erzeugt,

$$\vec{M} = \vec{a} \times \vec{F} = \vec{a} \times (Q\vec{E}) = Q\vec{a} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Das Drehmoment \vec{M} ist somit proportional zu Feldstärke \vec{E} und Dipolmoment \vec{p} . Es ist maximal wenn der Dipol senkrecht zum Feld orientiert ist und verschwindet bei paralleler Orientierung, also wenn der Winkel θ zwischen Dipol

und Feldrichtung ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Die Winkelabhängigkeit des Drehmoments ist

$$|M| = |p| \cdot |E| \sin \theta.$$

Der Dipol enthält somit potenzielle Energie als Funktion des Winkels zur Feldrichtung:

$$\mathcal{E}_{pot} = \int M(\theta) d\theta = -|p| \cdot |E| \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

Dieser Effekt kann experimentell verifiziert werden, indem man zwei Kugeln, die an einem Glasstab befestigt sind, mit entgegengesetzten Ladungen auflädt. Das elektrische Feld wird erzeugt, indem zwei parallele metallische Platten auf beiden Seiten des Dipols aufgestellt und mit einer Hochspannungsquelle verbunden werden. Die positiv geladene Kugel wird von der negativ geladenen Platte angezogen; wechselt man die Polarität der Spannung an den beiden Platten, so dreht sich der Dipol um 180 Grad.

4.2.6 Dipol im inhomogenen Feld

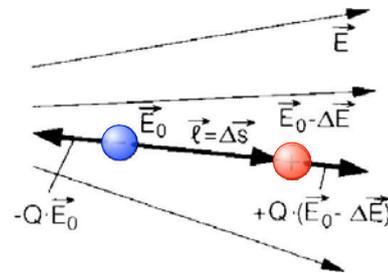


Abbildung 4.40: Kräfte auf einen elektrischen Dipol in einem inhomogenen Feld.

In einem inhomogenen Feld wirkt zusätzlich auch eine Translationskraft auf einen elektrischen Dipol. Diese kommt dadurch zustande, dass die Kräfte auf die beiden Ladungen ungleich groß sind. Abb. 4.40 zeigt einen einfachen Fall, wo der Dipol parallel zum Feld orientiert ist, wo also das Drehmoment verschwindet. Dann beträgt die gesamte Kraft

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 = -Q E_0 + Q(E_0 - \Delta E) = -Q \Delta E,$$

d.h. sie ist gegeben durch das Produkt von Ladung und Änderung der Feldstärke. Wir können dies auch schreiben als

$$F_{\Sigma} = -Qa \frac{\Delta E}{a} = p \frac{dE}{dr}.$$

Die Kraft ist somit proportional zur Stärke des Dipols und zum Gradienten des elektrischen Feldes.

Man erhält das gleiche Ergebnis, wenn man die Kraft aus dem Gradienten der potenziellen Energie berechnet:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \mathcal{E}_{pot} = \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{E}) = |\vec{p}| \vec{\nabla} |\vec{E}|,$$

wobei wir angenommen haben, dass der Dipol in Feldrichtung orientiert bleibt. Die Kraft ist somit proportional zur Änderung der Feldstärke.

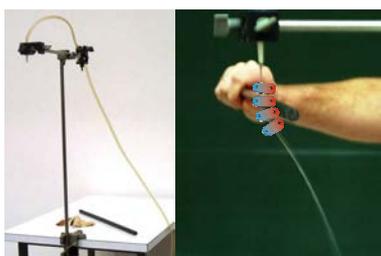


Abbildung 4.41: Ablenkung eines Wasserstrahls durch das Feld eines geladenen Kunststoffstabes..

Dieser Effekt, findet man, dass der Dipol in die Richtung des stärkeren Feldes gezogen wird, lässt sich anhand eines einfachen Experiments nachvollziehen (→ Abb. 4.41). Die Dipole sind in diesem Fall die Wassermoleküle und das inhomogene elektrische Feld wird durch einen elektrostatisch aufgeladenen Kunststoffstab erzeugt.

4.2.7 Kondensatoren

Kondensatoren sind einfache Speicher für elektrische Ladungen. Offenbar sind alle Anordnungen elektrischer Leiter Ladungsspeicher, da sich auf der Oberfläche Ladungen ansammeln können. Es werden im allgemeinen gleiche große negative wie

positive Ladungen gespeichert, an unterschiedlichen Orten. Zwischen den beiden Ladungsschwerpunkten entsteht dadurch eine Spannung oder Potenzialdifferenz.

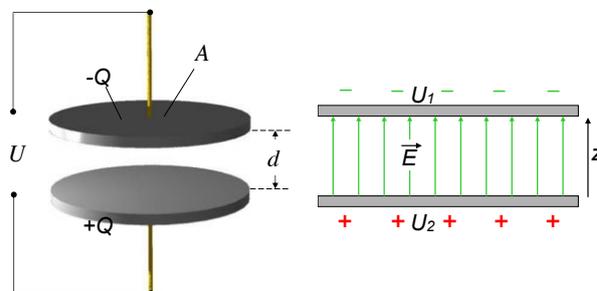


Abbildung 4.42: Plattenkondensator.

Ein besonders einfaches Beispiel ist der Plattenkondensator. Wie in Abb. 4.42 gezeigt, werden in einem Plattenkondensator elektrische Ladungen auf zwei Metallplatten gespeichert, die durch einen Isolator (z. B. Luft) getrennt sind. Aus Symmetriegründen steht das Feld senkrecht zur Oberfläche. Ist der Abstand d und die Potenzialdifferenz $U = U_2 - U_1$, dann ist die Feldstärke $E = U/d$.

Die Ladung, welche auf einem solchen Kondensator gespeichert werden kann, hängt ab von der angelegten Spannung.

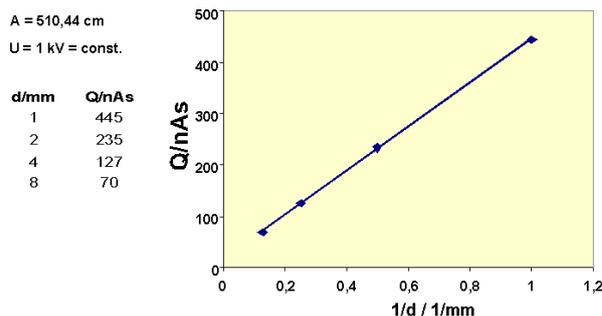


Abbildung 4.43: Auf dem Plattenkondensator gespeicherte Ladung.

Die experimentellen Daten von Fig. 4.43 zeigen, dass die auf einem Kondensator gespeicherte Ladung ist in guter Näherung proportional zur angelegten Spannung ist, $Q \propto U$. Die Steigung die-

ser Geraden, also das Verhältnis

$$C = \frac{Q}{U} \quad [C] = \frac{C}{V} = F = \text{Farad}$$

misst die Speicherkapazität des Kondensators und wird als Kapazität bezeichnet.

Aus der Definition der elektrischen Verschiebung (\rightarrow Kap. 4.1.8) folgt

$$D = \frac{Q}{A} \rightarrow Q = DA.$$

Die Spannung über dem Kondensator ist gleich der Potenzialdifferenz und damit gleich dem Integral des elektrischen Feldes,

$$U = Ed.$$

Im Vakuum gilt gleichzeitig $D = \epsilon_0 E$, so dass die Kapazität des Plattenkondensators als

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{DA}{Ed} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

gegeben ist.

Diese Abhängigkeit ist direkt aus der Definition der beiden Größen E und D hergeleitet worden: Die gesamte Ladung ist durch das Produkt aus Verschiebungsdichte D und Fläche A gegeben, während die Spannung proportional zum Feld und zum Abstand der Platten ist. Bei konstanter Feldstärke nimmt somit die Spannung mit dem Abstand der Platten zu.

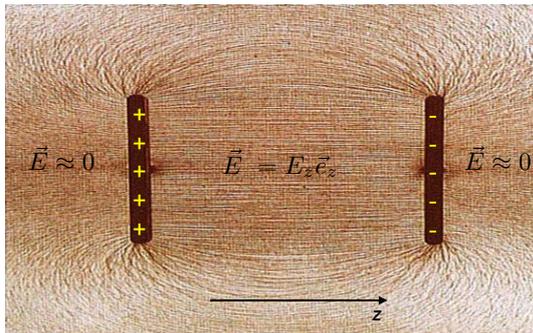


Abbildung 4.44: Feld im Plattenkondensator.

Wie in Abb. 4.44 gezeigt, verlaufen die Feldlinien zwischen den beiden Platten in guter Näherung parallel zueinander und senkrecht zu den

Platten. Ein wichtiger Aspekt des Plattenkondensators ist, dass das Feld zwischen den Platten sehr homogen ist. Außerhalb ist der Verlauf komplizierter und kann nicht durch eine analytische Funktion dargestellt werden.

4.2.8 Beispiele

Als typisches Beispiel betrachten wir einen Plattenkondensator mit einer Fläche von $A = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$ und einem Plattenabstand von $d = 1 \text{ mm}$. Damit beträgt die Kapazität

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 8,85 \cdot 10^{-13} \text{ F} \approx 1 \text{ pF}.$$

Auf einem solchen Kondensator kann somit bei einer Spannung von $U = 1 \text{ kV}$ eine Ladung $Q = 1 \text{ nC}$ gespeichert werden.

Als weiteres Beispiel kann man ausrechnen, wie groß ein Plattenkondensator mit einer Kapazität von 1 F sein muss, wenn der Abstand 1 mm beträgt:

$$\begin{aligned} A &= \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{1 \text{ F} \cdot 10^{-3} \text{ m}}{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}} \\ &= 1,13 \cdot 10^8 \text{ m}^2 \approx 100 \text{ km}^2. \end{aligned}$$

Vergrößert man den Abstand zwischen den Platten, so nimmt die Kapazität ab. Man kann dabei die Spannung konstant halten (indem man den Kondensator an eine Spannungsquelle anschließt); dann nimmt die Ladung auf den Platten ab. Oder man kann die Ladung konstant halten, indem man den Kondensator von der Spannungsversorgung trennt. Dann steigt die Spannung, während das E -Feld konstant bleibt.

Kondensatoren können auch untereinander verbunden werden. Abb. 4.45 zeigt als Beispiel eine Parallelschaltung von 2 Kondensatoren. Bei gleichem Abstand zwischen den beiden Plattenpaaren ist die Spannung für beide gleich und die Ladungen addieren sich. Somit ist die Gesamtkapazität

$$C_p = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = C_1 + C_2,$$

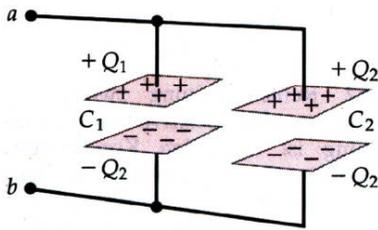


Abbildung 4.45: Parallelschaltung von 2 Kondensatoren.

d.h. bei Parallelschaltung addieren sich die Kapazitäten. Bei Reihenschaltung gilt hingegen

$$C_s = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1}.$$

4.2.9 Kugelkondensator

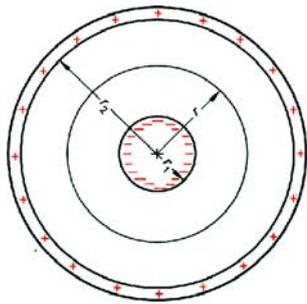


Abbildung 4.46: Kugelkondensator.

Ein weiterer wichtiger Spezialfall ist der Kugelkondensator (→ Abb. 4.46). Man kann sich die beiden Platten zu konzentrischen Kugeln gebogen vorstellen, welche entgegengesetzte Gesamtladungen tragen. Für die Berechnung der Kapazität $C = Q/U$ benötigen man die Spannungsdifferenz zwischen den beiden Platten, die man aus dem Potenzial bestimmen kann. Wie in Kapitel 4.1.4 gezeigt, erzeugt die Ladung Q auf der inneren Kugel ein Potenzial

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Die Potenzialdifferenz beträgt somit

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

und die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Ist die äußere Kugelschale nicht vorhanden (d.h. im Unendlichen), so beträgt die Kapazität

$$C = 4\pi\epsilon_0 r_1.$$

Dies ist insbesondere für die Abschätzung der Kapazität von beliebigen Leiterelementen nützlich. Man erhält z.B. folgende typische Kapazitäten

- mikroelektronisches Schaltelement $r \approx 0.2 \mu\text{m}$ $C \sim 2 \cdot 10^{-17} \text{ F}$.
- Kugel im Vorlesungsexperiment $r \approx 2 \text{ cm}$ $C \sim 2 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 2 \text{ pF}$.
- Erde $r \approx 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ $C \approx 7 \cdot 10^{-4} \text{ F} = 700 \mu\text{F}$.

Die Kapazität eines Schaltelements ist ein wichtiger Beitrag zur Schaltgeschwindigkeit von elektronischen Bauteilen. Man versucht deshalb, bei schnellen Schaltungen die Kapazitäten gering zu halten.

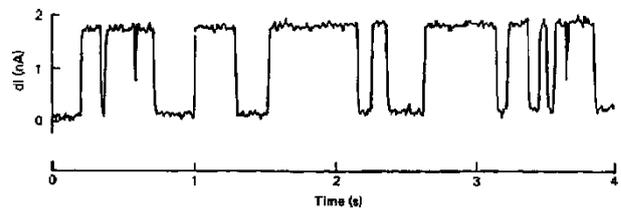


Abbildung 4.47: Messung der Bewegung einzelner Elektronen.

Bei genügend kleinen Kapazitäten stellt man fest, dass die Ladung quantisiert ist. Wie in Abb. 4.47 gezeigt, kann man beobachten, wie Elektronen einzeln auf die Kondensatoren gelangen [1].

4.2.10 Ladungstrennung im Kondensator

Man kann die Berechnung der Kapazität überprüfen indem man Ladung und Spannung unabhängig misst. Dies ist ein Hinweis darauf, dass

Feld und Verschiebungsdichte unabhängige Größen sind.

Die Influenz kann man über die Kapazitätsänderung nachweisen: es werden Ladungen in den Metallplatten im Kondensator induziert, welche das Feld abschirmen.

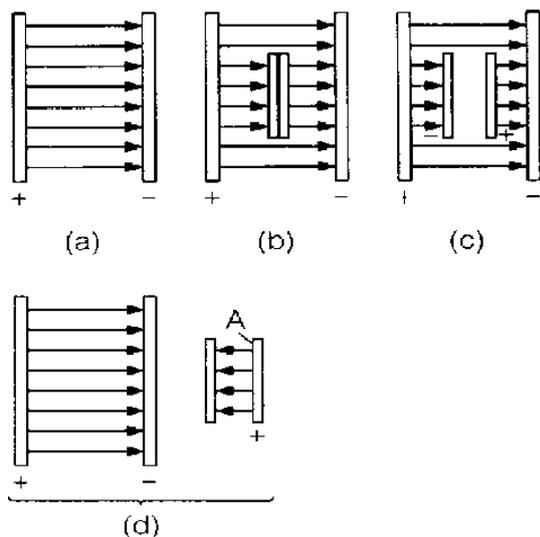


Abbildung 4.48: Elektrische Verschiebung in einem Plattenkondensator.

Abb. 4.48 zeigt, wie man Ladungen "erzeugen" kann, indem man sie trennt. Dazu bringt man zwei isolierte, elektrisch leitende Platten in das Feld eines Plattenkondensators. Wie in Kapitel 4.2.1 diskutiert, ist das Feld im Innern des Leiters $=0$ und auf der Oberfläche findet man Ladungen - links negative, rechts positive. Trennt man die beiden Platten, besitzt die linke deshalb eine negative Ladung, die rechte eine positive. Man kann die Ladungsspeicher aus dem Feld herausnehmen und ihre Ladungen z.B. auf einem Elektrometer messen.

Dieses Experiment zeigt auch den Unterschied zwischen elektrischem Feld und elektrischer Verschiebungsdichte. Bei der Trennung der Platten bleibt die Ladungsdichte auf ihrer Oberfläche wie auch auf der Oberfläche der Kondensatorplatten konstant, d.h. die Verschiebungsdichte ist konstant. Ein Teil des Raums im Kondensator wird jedoch feldfrei und die gesamte Spannung über dem Kondensator nimmt dadurch ab.

4.2.11 Energie des elektrischen Feldes

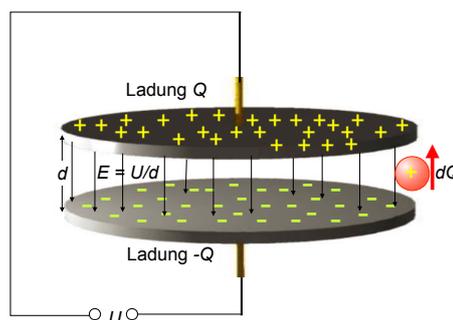


Abbildung 4.49: Transport zusätzlicher Ladung δQ zwischen Kondensatorplatten mit Ladung Q .

Das elektrische Feld enthält Energie; diese kann man messen, z.B. indem man einen Kondensator entlädt, oder indem man ihn lädt. Dies eignet sich auch für die Berechnung der Energie. Am einfachsten ist diese Berechnung anhand des in Abb. 4.49 gezeigten Schemas in einem Plattenkondensator. Wird Ladung dQ von der negativen zur positiven Platte transportiert, so muss dafür eine Arbeit $dW = U dQ$ aufgewendet werden. Um den Kondensator von 0 auf die Ladung Q zu laden, beträgt die gesamte Arbeit

$$W_{el} = \int_0^Q U dQ' = \frac{1}{C} \int_0^Q Q' dQ' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

Hier wurde die Beziehung $U = Q/C$ zwischen Spannung, Ladung und Kapazität eines Kondensators verwendet. Diese Arbeit wird in der Energie des elektrischen Feldes gespeichert. Dies wird besser sichtbar durch die Umformung

$$\begin{aligned} W_{el} &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} C (Ed)^2 \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 A d E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 V E^2, \end{aligned}$$

wobei $V = Ad$ das Volumen zwischen den Platten darstellt. Somit ist die Energiedichte des elektrischen Feldes, d.h. die Energie pro Volumen

$$w_{el} = \frac{W_{el}}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (4.3)$$

beträgt. Dieser Ausdruck gilt allgemein, nicht nur für Plattenkondensatoren.

4.2.12 Kräfte auf Kondensatorplatten

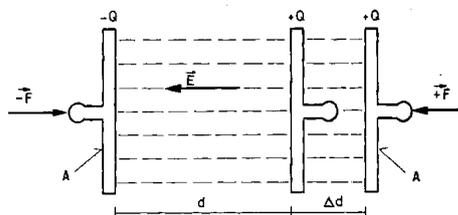


Abbildung 4.50: Kräfte auf die Kondensatorplatten.

Wenn das Feld zwischen zwei Kondensatorplatten Energie enthält, muss eine Kraft auf die Kondensatorplatten wirken (\rightarrow Abb. 4.50); umgekehrt muss am System Arbeit geleistet werden, wenn man die Platten auseinander zieht. Bei einer solchen Operation bleibt die Feldstärke (und damit die Energiedichte) konstant, während das Volumen und damit die Gesamtenergie zunimmt. Um den Abstand um den Betrag Δd zu vergrößern, benötigt man die Arbeit

$$W = A \Delta d w_{el} = A \Delta d \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = F \Delta d.$$

Somit muss die Kraft auf jede der beiden Platten

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 A E^2 = \frac{1}{2} C d E^2 = \frac{1}{2} C U E = \frac{1}{2} Q E$$

betragen.

Es mag zunächst erstaunen, dass hier nicht die gesamte Ladung mal die Feldstärke eingesetzt werden muss. Dies ist ein klassisches Beispiel dafür, dass in das Kraftgesetz $F = qE$ nicht das gesamte Feld eingesetzt werden muss, sondern das ungestörte Feld, welches ohne die Probeladung vorhanden ist. Das Feld ohne Probeladung wird durch das Feld einer ebenen Ladungsverteilung gegeben, welches gleichmässig auf beide Oberflächen einer dünnen Platte verteilt ist. Wie in Kapitel 4.1.8 hergeleitet beträgt es $D = \frac{1}{2} \frac{Q}{A}$ resp.

$$E_{ungest.} = \frac{1}{2} \frac{Q}{A \epsilon_0},$$

während das “gestörte” Feld zwischen den Kondensatorplatten

$$E_{gest.} = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

beträgt, also einen Faktor 2 stärker ist.

Diese Herleitung zeigt eine der Möglichkeiten auf, elektrische Einheiten wie Spannung oder Feldstärke auf eine mechanische Kraftmessung zurückzuführen.

Die Tatsache, dass die Energiedichte proportional zum Quadrat des Feldes ist, führt dazu, dass es energetisch sinnvoller ist, das Feld über einen größeren Bereich zu verteilen; anders ausgedrückt: Feldlinien “stoßen sich ab”.

Die gleichen Gesetze für den Energieinhalt des elektrischen Feldes gelten auch für zeitabhängig Felder oder elektromagnetische Wellen. Dies erlaubt z.B. die Übertragung von Energie im Sonnenlicht, in Mikrowellen oder Lasern (\rightarrow Kap. 6.5).

4.3 Dielektrika

4.3.1 Polarisation in Dielektrika

In Kapitel 4.2.10 wurde gezeigt, dass auf der Oberfläche eines elektrischen Leiters in einem elektrischen Feld Ladungen induziert werden. Einen ähnlichen Effekt findet man, wenn man in einen Plattenkondensator ein polarisierbares, nichtleitendes Material einbringt. Ein solches Material wird als Dielektrikum bezeichnet.

Wenn der Kondensator von der Spannungsquelle getrennt wurde, sinkt beim Einbringen des dielektrischen Materials die Spannung (und damit das elektrische Feld) von einem Anfangswert U_0 auf einen Endwert $U = U_0/\epsilon_r$, wie in Abb. 4.51 gezeigt. Da die Ladung auf den Platten sich dabei nicht ändert (sie sind ja vom Netzteil abgetrennt), folgt, dass die Kapazität des Kondensators gestiegen ist, von C_{Vakuum} auf $C_{Dielek.}$. Die dimensionslose Proportionalitätskonstante

$$\epsilon_r = \frac{C_{Dielek.}}{C_{Vakuum}}$$

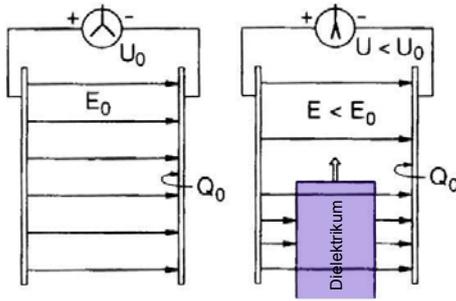


Abbildung 4.51: Änderung der Spannung durch Einschleiben eines Dielektrikums.

zwischen diesen beiden Werten wird als dielektrische Konstante oder relative Permittivität bezeichnet. Sie ist eine Materialkonstante des polarisierbaren Materials. Da die Kapazität des Kondensators gegeben ist durch

$$C = \frac{Q}{U} = D \frac{A}{Ed}$$

steigt sie durch das Einfügen des Dielektrikums auf

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d},$$

also um den Faktor ϵ_r . Die Ladungsdichte auf den Kondensatorplatten ist gemäß 4.2 $C/A = D$, mit D als elektrische Verschiebungsdichte. Gleichzeitig ist die Feldstärke

$$E = \frac{U}{d} = \frac{Q}{Cd} = D \frac{A}{Cd} = D \frac{A}{d} \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r A}.$$

Somit lautet die Beziehung zwischen \vec{D} und \vec{E}

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}.$$

Das Produkt $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ wird als Permittivität bezeichnet.

Abb. 4.52 listet dielektrische Konstanten von typischen Materialien. Sie bewegen sich zwischen 1 und 10. Leicht polarisierbare Flüssigkeiten wie z.B. Wasser können bis etwa 100 gehen, während einige spezielle Materialien darüber hinaus gehen. Dabei handelt es sich um sog. ferroelektrische Materialien. Diese Substanzen werden in

Material	Dielektrizitätszahl ϵ_r	Durchschlagsfestigkeit/kV · mm ⁻¹
Bakelit	4,9	24
Glas	5,6	14
Glimmer	5,4	10 – 100
Luft	1,00059	3
Neopren	6,9	12
Papier	3,7	16
Paraffin	2,1 – 2,5	10
Plexiglas	3,4	40
Polystyrol	2,55	24
Porzellan	7	5,7
Transformatoröl	2,24	12
Wasser (20 °C)	80	

Abbildung 4.52: Dielektrische Konstanten unterschiedlicher Materialien.

Kondensatoren verwendet um hohe Kapazitäten zu erreichen. Die Größenordnungen dieser Materialkonstanten sind auch interessant für moderne Hochleistungskondensatoren, welche Kapazitäten bis zu 1 F aufweisen. Man erhält solche Kapazitäten durch eine Kombination von großer Oberfläche (viele m²), kleinem Abstand ($\sim \mu\text{m}$) und großer Dielektrizitätskonstante (bis zu 1000).

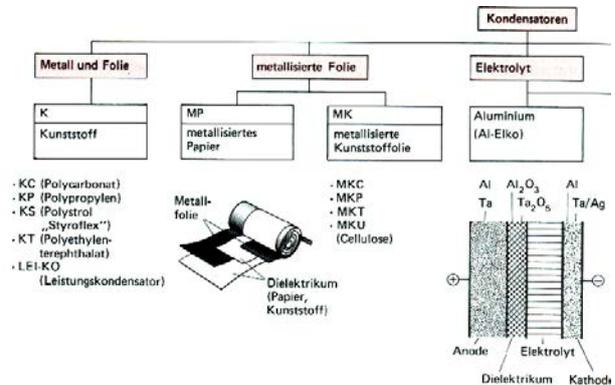


Abbildung 4.53: Kondensatortypen.

Technisch können sehr unterschiedliche Systeme als Kondensatoren genutzt werden. Abb. 4.53 zeigt eine Übersicht. Neben der Kapazität ist auch die (maximale) Betriebsspannung eines Kondensators eine wesentliche Größe, sowie (nur für kleine Kapazitäten) das Verhalten bei hohen Frequenzen. Kommerzielle Kondensatoren sind jeweils auf einen Bereich (Kapazität / Spannung / Frequenz) optimiert.

4.3.2 Mikroskopisches Modell

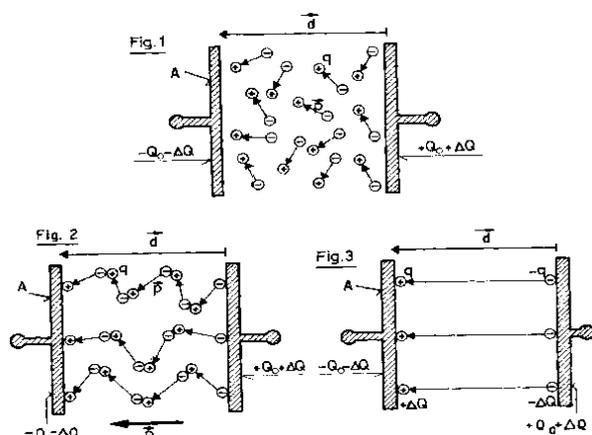


Abbildung 4.54: Molekulare Dipole im Feld eines Plattenkondensators.

Den Unterschied zwischen elektrischem Feld und elektrischer Verschiebung kann man mit Hilfe eines einfachen Modells auf die molekulare oder atomare Struktur des Materials zurückführen. Wie in Abb. 4.54 gezeigt, setzen sich die relevanten Materialien häufig aus Dipolen zusammen. In Abwesenheit eines Feldes (obere Grafik) ist das Material auf Skalen oberhalb der molekularen Skala elektrisch neutral.

In Anwesenheit eines Feldes (unterer Teil von Abb. 4.54) orientieren sich die Dipole entlang des Feldes. Im Innern des Materials heben sich Paare von positiven und negativen Ladungen gegenseitig auf. Somit bleiben nur die Ladungen an der Oberfläche des Materials übrig. Diese sind den Ladungen auf der Kondensatorplatte entgegen gerichtet. Die Summe aus den Ladungen auf der Kondensatorplatte und denjenigen auf der Oberfläche des Dielektrikums sind demnach kleiner und die resultierende elektrische Verschiebung im Innern des Dielektrikums um den Betrag $1/\epsilon_r$ geringer als ohne das Dielektrikum.

Wie in Abb. 4.55 gezeigt, können diese molekularen Dipole auf verschiedene Arten zustande kommen: zum einen kann das äußere elektrische Feld die Elektronenhülle gegenüber dem positiv geladenen Kern verschieben. Dieser Effekt tritt bei allen Materialien auf.

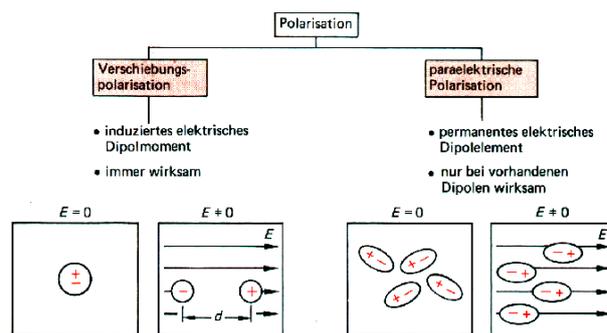


Abbildung 4.55: Beiträge zur Polarisation.

Asymmetrische Moleküle besitzen ein permanentes elektrisches Dipolmoment. Sind die Moleküle zufällig orientiert (z.B. in einer Flüssigkeit), so besitzt das Material normalerweise trotzdem kein makroskopisches Dipolmoment. Wird ein elektrisches Feld angelegt so wird die Orientierung der Dipole in Feldrichtung jedoch energetisch gegenüber den anderen Orientierungen bevorzugt. Damit entsteht im Mittel eine Polarisation, welche invers proportional zur Temperatur ist. Solche Materialien werden als paraelektrisch bezeichnet. Sie zeigen eine bevorzugte Orientierung der Dipole in Feldrichtung, so dass die positiven Ladungen näher bei der negativ geladenen Platte liegen und umgekehrt.

Ordnet man (in Gedanken) die Dipole, so dass jeweils eine negative Ladung in der Nähe einer positiven liegt, so realisiert man, dass die Ladungen im Innern des Mediums sich gegenseitig kompensieren. Lediglich an der Oberfläche des Mediums bleiben Teilladungen zurück, welche entgegengesetzt zur Ladung auf den Kondensatorplatten sind. Das Material bleibt elektrisch neutral, es enthält jedoch ein Dipolmoment \vec{P} . Für viele Materialien ist dieses proportional zum elektrischen Feld \vec{E} ,

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \alpha \vec{E},$$

wobei die Proportionalitätskonstante χ_e als Suszeptibilität bezeichnet wird und α als Polarisierbarkeit.

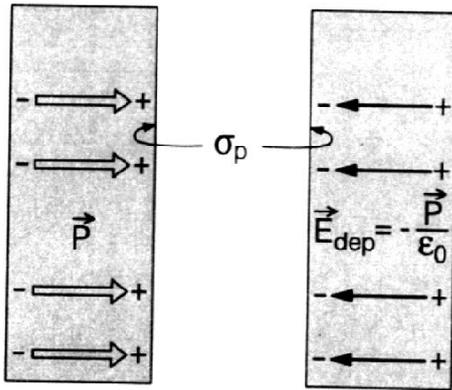


Abbildung 4.56: Depolarisationsfeld.

4.3.3 Depolarisationsfeld

Wie in Abb. 4.56 gezeigt, erzeugt dieses Dipolfeld ein Depolarisationsfeld

$$\vec{E}_{dep} = -\vec{P}/\epsilon_0 = -\chi_e \vec{E},$$

welches dem äußeren Feld entgegen-gerichtet ist. Wenn wir das elektrische Feld (weit) außerhalb des Mediums mit E_0 bezeichnen, erhalten wir im Material ein reduziertes Feld

$$\vec{E}_m = \vec{E}_0 + \vec{E}_{dep} = \vec{E}_0 - \chi_e \vec{E}_m.$$

Aufgelöst nach \vec{E}_m erhält man $\vec{E}_m = \vec{E}_0/(\chi + 1)$. Damit wird auch die Spannung zwischen den Platten auf den Wert

$$U = \frac{U_0}{\chi_e + 1} = \frac{U_0}{\epsilon_r}$$

reduziert. Man identifiziert somit

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e.$$

Da die Oberflächenladung konstant geblieben ist, bleibt die elektrische Verschiebungsdichte D konstant. Somit gilt für ein Dielektrikum mit Suszeptibilität χ_e , resp. Dielektrizitätskonstante ϵ_r

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Diese Ausdrücke stellen einen Spezialfall dar; gerechnet für den einfachsten Fall eines Plattenkondensators. Allgemein hängt das Feld im Dielektrikum auch von dessen Form ab.

Diesen Effekt kann man auch beobachten, wenn man die Platten an eine Spannungsquelle angeschlossen hat. In diesem Fall bleibt die elektrische Feldstärke E die gleiche wie ohne Dielektrikum; hingegen steigt die Ladung auf den Kondensatorplatten und damit die Verschiebungsdichte $D = \sigma = Q/A$. Die zusätzlichen Ladungen auf den Kondensatorplatten werden durch die Oberflächenladungen des Dielektrikums kompensiert.

Diese Ladung ist die sog. Polarisationsladung, die durch das elektrische Feld im Dielektrikum erzeugt wird. Das Feld der Polarisationsladungen kompensiert zum Teil das Feld der Ladungen auf den Kondensatorplatten.

4.3.4 Kräfte auf Dielektrika in Feldrichtung

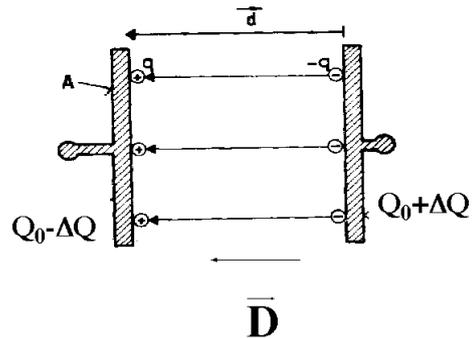


Abbildung 4.57: Kraft auf Dielektrikum.

Die beiden Ladungsschwerpunkte in einem Dielektrikum werden vom Feld in entgegengesetzte Richtungen gezogen, wie in Abb. 4.57 gezeigt. Es besteht somit eine Zugspannung.

Die Oberflächenladungsdichte des Dielektrikums beträgt

$$\sigma = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} D.$$

Die Zugspannung (d.h. Kraft pro Fläche) erhalten wir, wenn wir die Kraft auf diese ebene Ladungsverteilung im äußeren Feld E_0 berechnen.

Wie wir beim Plattenkondensator gefunden hatten, beträgt sie:

$$\frac{F}{A} = \frac{1}{2} \sigma E_0 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} D E_0 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \epsilon_0 \epsilon_r E_0^2.$$

Diese Zugspannungen können zu einer messbaren Formänderung führen, wenn die Dielektrizitätskonstante genügend groß ist. Dies ist vor allem in ferroelektrischen Materialien der Fall.

Eine Längenänderung aufgrund einer angelegten Spannung wird als piezoelektrischer Effekt bezeichnet. Man kann Piezokeramiken z.B. als Lautsprecher verwenden, aber auch als Stellelemente, welche sehr schnell und präzise Längenänderungen erzeugen können (z.B. im Rastertunnelmikroskop).

Umgekehrt erzeugt ein Druck auf ein solches Material eine Umorientierung der Dipole und dadurch eine Spannung. Man verwendet dies u. A. für Mikrophone.

4.3.5 Kräfte auf Dielektrika senkrecht zur Feldrichtung

Durch das Einschieben eines Dielektrikums in einen Plattenkondensator sinkt die Feldstärke und damit die elektrische Feldenergie. Somit muss eine Kraft

$$\vec{F} = -\text{grad } \mathcal{E}_{pot}$$

existieren, welche das Dielektrikum in den Spalt des Kondensators hineindrückt.

Besteht das Dielektrikum aus einer Flüssigkeit, so wird sie in das Feld hineingezogen, wie in Abb. 4.58 gezeigt. Das System erreicht ein Gleichgewicht, wenn der Druck der Flüssigkeitssäule gerade die elektrische Kraft kompensiert. Steigt das dielektrische Medium mit Dielektrizitätskonstante ϵ_r um die Höhe dz weiter in den Kondensator hinein, so ändert die Kapazität um

$$dC = d(\epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{\ell}) = \frac{\epsilon_0}{\ell} d\epsilon_r A = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) L \frac{dz}{\ell}.$$

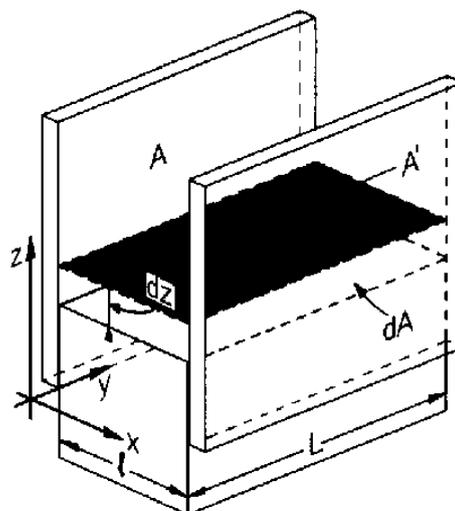


Abbildung 4.58: Flüssiges Dielektrikum im E-Feld.

Damit ändert sich die elektrische Feldenergie um

$$dW_{el} = \frac{1}{2} U^2 dC = \frac{1}{2} U^2 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) L \frac{dz}{\ell}.$$

Die Kraft dW_{el}/dz kann man durch die Fläche $L\ell$ dividieren um die (mechanische) Spannung

$$\sigma_{el} = \frac{1}{2} \left(\frac{U}{\ell} \right)^2 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) = \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)$$

zu erhalten, welche die Flüssigkeit nach oben (in den Kondensator hinein) zieht.

Die Schwerkraft, die auf die Flüssigkeitssäule wirkt, erzeugt ebenfalls eine Spannung

$$\frac{F_G}{L\ell} = \rho gh.$$

Die beiden Spannungen halten sich die Waage wenn

$$\frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) = \rho gh.$$

Man kann diesen Ausdruck z.B. dazu verwenden, um die Steighöhe h zu berechnen, oder um die Dielektrizitätskonstante zu bestimmen:

$$\epsilon_r = 1 + \frac{2\rho gh}{(\epsilon_0 E)^2}.$$

Im Experiment findet man bei 30 kV eine Steighöhe von ca. 1 cm.

4.4 Stationäre Ströme

4.4.1 Ladungstransport

Bisher haben wir nur stationäre Ladungen diskutiert. In einem elektrischen Feld wirkt immer eine Kraft auf elektrische Ladungen. Sind diese beweglich wird deshalb Ladung transportiert. Man spricht in diesem Fall von einem elektrischen Strom.

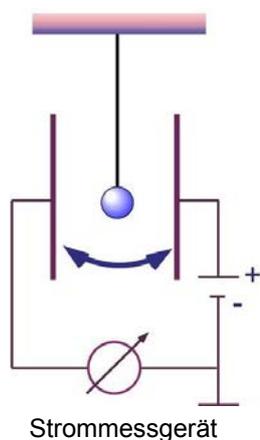


Abbildung 4.59: Diskreter Ladungstransport.

Wie Ladungen in einem Feld transportiert werden kann man mit mechanischen Hilfsmitteln demonstrieren. Im Experiment von Abb. 4.59 wird die Ladung von einer Kondensatorplatte auf einen Ping-Pong Ball übertragen. Nachdem dieser geladen ist wird er im Feld zwischen den Platten beschleunigt bis er auf die andere Kondensatorplatte trifft, wo er die Ladung an die Platte abgibt. Er nimmt dort die entgegengesetzte Ladung auf und wird in die umgekehrte Richtung beschleunigt. Je höher die Spannung eingestellt wird, desto schneller wird der Ladungstransport. Man misst mit Hilfe eines Strommessgerätes, dass ein Strom durch den Kondensator fließt.

Wie in diesem Experiment führt eine Spannung allgemein dazu, dass elektrische Ladungen, sofern sie frei beweglich sind, in einem Feld transportiert werden. Die transportierte Ladung pro

Zeiteinheit wird als Strom bezeichnet,

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [I] = \frac{C}{s} = A = \text{Ampere}.$$



Abbildung 4.60: André Marie Ampère (1775-1836).

Die Einheit erinnert an André Marie Ampère (1775-1836) (\rightarrow Abb. 4.60). Die Stromstärke ist eine der SI-Basisgrößen; vom Standpunkt der Physik ist jedoch eher die Ladung die Grundgröße, während die Stromstärke davon abgeleitet ist. Die Stromrichtung ist definiert als die Richtung, welche dem Transport positiver Ladung entspricht.

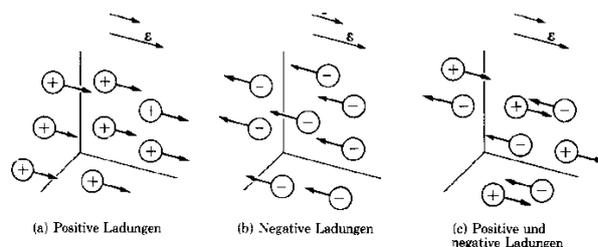


Abbildung 4.61: Stromtransport und Arten von Ladungsträgern.

Die wirklichen transportierten Ladungen sind natürlich sehr viel kleiner als der Tischtennisball im Demonstrationsexperiment. Wie beim Demonstrationsexperiment können aber sowohl positive wie auch negative Ladungen transportiert werden (\rightarrow Abb. 4.61). Positive Ladungen bewegen sich in Feldrichtung, negative Ladungen in entgegengesetzter Richtung. Der Stromfluss ist jedoch in beiden Fällen in Feldrichtung.

Ladungen können praktisch durch jedes Medium transportiert werden, wobei je nach Material unterschiedliche Träger für die Ladung zur Verfügung stehen. Auch im Vakuum kann Strom fließen. Dies wurde früher in Verstärkern, Röntgenröhren oder Fernsehern verwendet. Im Vakuum stehen zunächst keine Ladungsträger zur Verfügung. Es können aber Elektronen ins Vakuum emittiert werden und als Ladungsträger dienen wenn z.B. eine Glühkathode verwendet wird oder mit Hilfe von Photoemission. Bei genügend hohen Feldstärken findet auch Feldemission statt; dazu verwendet man feine Spitzen: je kleiner der Radius desto größer die Feldstärke.

4.4.2 Phänomenologie

Strom ist, wie Ladung, immer mit Materie verbunden. Er macht sich auf unterschiedliche Arten bemerkbar:

- er erzeugt Wärme; dieser Effekt kann als Reibungseffekt verstanden werden. Er verschwindet nur in Supraleitern, welche den Strom verlustfrei leiten können.
- er erzeugt ein Magnetfeld; dadurch entstehen Kraftwirkungen auf andere magnetische Materialien und bewegte Ladungen.
- in speziellen Fällen können Ströme chemische Reaktionen bewirken. Man spricht dann von Elektrolyse.

Als Stromquellen werden meist Generatoren verwendet. Weitere Möglichkeiten sind Batterien, thermische Spannungsquellen (Peltier-Elemente), oder optische Stromquellen (Photodioden, Solarzellen).

Strom kann auch aus Wärme erzeugt werden. Die so genannten Thermoelemente verwenden Kontakte zwischen unterschiedlichen Metallen. Wenn man an diese Kontakte eine Temperaturdifferenz anlegt fließt ein Strom. Abb. 4.62 zeigt ein Experiment, bei dem ein Kontakt zwischen Kupfer und Konstantan verwendet; der eine Kontakt wird mit Eiswasser gekühlt, der andere mit einem Bunsenbrenner beheizt. Wird



Abbildung 4.62: In der Leiterschleife wird ein Strom erzeugt, der ein starkes Magnetfeld erzeugt.

die Temperaturdifferenz genügend hoch so, fließt ein hoher Strom durch die Kupferschleife. Dabei kann man auch gleich den zweiten oben genannten Punkt verifizieren: Der Strom erzeugt ein Magnetfeld; dieses wird hier so stark, dass man damit ein 5 kg schweres Gewicht heben kann.

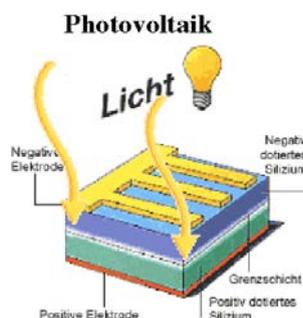


Abbildung 4.63: Prinzip der photoelektrischen Stromerzeugung.

Weitere Möglichkeiten zur Erzeugung von Strom umfassen Solarzellen (=Photodioden), bei denen Licht absorbiert wird und dabei Elektronen-Loch Paare (=fehlende Elektronen, "positive" Elektronen). Diese werden von metallischen Kontakten gesammelt und über den Verbraucher zurückgeführt. Abb. 4.63 zeigt die Funktionsweise eines solchen Elements.

4.4.3 Definitionen

Neben dem Strom benötigen wir die elektrische Spannung. Sie ist definiert über die Arbeit, die

für die Trennung von Ladungen verrichtet werden muss:

$$U = \frac{W}{Q} \quad [U] = \text{V} = \text{Volt} = \frac{\text{J}}{\text{C}}.$$



Abbildung 4.64: Alessandro Volta (1745-1827) und Georg Simon Ohm (1789-1854)

Die Einheit Volt erinnert an Alessandro Volta (1745-1827) (→Abb. 4.64). Somit wird beim Transport von 1 Coulomb über eine Spannungsdifferenz von 1 V eine Energie von 1 Joule benötigt, resp. frei. Der elektrische Widerstand R ist ein Maß für die Hinderung des Ladungstransportes

$$R = \frac{V}{I} \quad [R] = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega = \text{Ohm}, \quad (4.4)$$

d.h. der Widerstand eines Leiters beträgt ein Ohm wenn bei einem Stromfluss von 1 Ampère eine Spannung von 1 V anliegt. Die Einheit Ohm erinnert an Georg Simon Ohm (1789-1854) (→Abb. 4.64).

Der Kehrwert des Widerstandes ist der

$$\text{Leitwert } G = \frac{1}{R} \quad [G] = \text{S} = \text{Siemens} = \frac{1}{\Omega}.$$

Die Proportionalität 4.4 zwischen Strom und Spannung wird als Ohm'sches Gesetz bezeichnet. Sie kann experimentell z.B. mit Hilfe des in Abb. 4.65 gezeigten Aufbaus realisiert werden.. Schaltet man zwei Widerstände in Reihe,

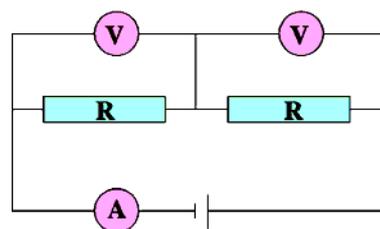


Abbildung 4.65: Messanordnung zur Verifizierung des Ohm'schen Gesetzes.

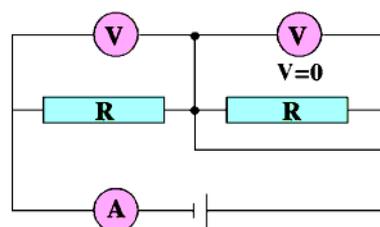


Abbildung 4.66: Geänderte Messanordnung mit halbem Widerstand.

so dass durch beide der gleiche Strom fließt, so misst man auch über beiden die gleiche Spannung.

Überbrückt man den zweiten Widerstand, wie in Abb. 4.66 gezeigt, so stellt man fest, dass jetzt die ganze Spannung über dem ersten Widerstand abfällt; sie ist um den Faktor 2 gestiegen. Der Strom, welcher vom Messgerät angezeigt wird, hat sich ebenfalls verdoppelt. Man verifiziert weiterhin, dass der Strom proportional zur Spannung steigt, wenn wir diese erhöhen.

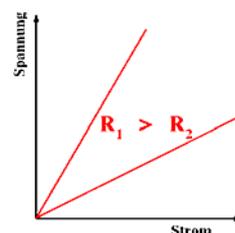


Abbildung 4.67: Lineare Abhängigkeit zwischen Strom und Spannung.

Abb. 4.67 zeigt die lineare Beziehung zwischen Spannung und Widerstand, welche als Ohm'sches Gesetz bezeichnet wird. Es handelt

sich aber nicht um ein Naturgesetz, sondern um die Beschreibung eines Verhaltens das man häufig aber nicht immer findet. Der Widerstand entspricht der Steigung der Geraden, $R = dV/dI$.

4.4.4 Spezifischer Widerstand in Ohm'schen Leitern

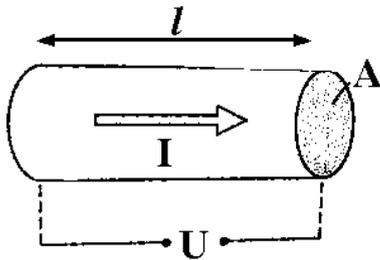


Abbildung 4.68: Dimensionen eines Leiterstücks.

Der Widerstand R eines Materialelementes hängt ab von den Dimensionen des Leiters, und vom Material, aus dem er besteht. In vielen Fällen ist er proportional zur Länge des Elementes und indirekt proportional zu seinem Querschnitt

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

Man definiert deshalb den spezifischen Widerstand ρ eines Materials. Die Einheit des spezifischen Widerstandes ist

$$[\rho] = \Omega m.$$

Dieser kann in weiten Bereichen variieren; man unterscheidet Materialklassen nach ihrem spezifischen Widerstand:

Klasse	Material	$\rho / \Omega m$
Isolatoren	Bernstein	10^{18}
	Quarzglas	$5 \cdot 10^{16}$
	Glimmer	$5 \cdot 10^{16}$
	Glas	$5 \cdot 10^{11}$
	Holz	$10^8 \dots 10^{14}$
Halbleiter	Germanium	0,46
	Tellur	$4,36 \cdot 10^{-3}$
	Silizium (rein)	640
Leiter	Kupfer	$5 \cdot 10^{-8}$
	Silber	$1,59 \cdot 10^{-8}$
	Quecksilber	$96 \cdot 10^{-8}$
	Aluminium	$2,65 \cdot 10^{-8}$
	Eisen	$9,77 \cdot 10^{-8}$
	Nickel	$6,84 \cdot 10^{-8}$

Ganz allgemein besitzen gute Isolatoren spezifische Widerstände $> 10^{10} \Omega m$, Halbleiter können in weiten Bereichen um $1 \Omega m$ variieren, während gute Leiter bei $\sim 10^{-8} \Omega m$ liegen. Die Ursachen für diese enorme Variationsbreite liegen in der quantenmechanischen Struktur der Materie.

Der Kehrwert des spezifischen Widerstandes ist die spezifische Leitfähigkeit σ . Mit ihrer Hilfe kann man z.B. die Stromdichte berechnen, als

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

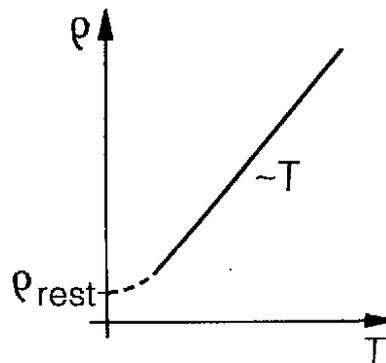


Abbildung 4.69: Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes eines Metalls.

Der Widerstand variiert mit der Temperatur. Für Metalle findet man meist ein lineares Ansteigen mit der Temperatur, während er bei niedrigen Temperaturen näherungsweise konstant

bleibt. Abb. 4.69 zeigt qualitativ diese Abhängigkeit.

Wir vergleichen z.B. experimentell den Widerstand bei Raumtemperatur und bei der Temperatur von flüssigem Stickstoff. Bei Kupfer nimmt der Widerstand um fast eine Größenordnung ab.

Dieser Befund kann in der Festkörperphysik interpretiert werden. Ganz grob kann man ihn so erklären, dass ideale metallische Festkörper bei tiefen Temperaturen keinen Widerstand für die elektrische Leitung bieten. Bei endlichen Temperaturen finden Schwingungen der Ionen um ihre Gleichgewichtsposition statt, und diese Schwingungen behindern den Ladungstransport. Je höher die Temperatur, desto stärker die Schwingungen und desto schlechter die elektrische Leitung. Der endliche Widerstand bei tiefen Temperaturen kann auf Kristallfehler zurückgeführt werden.

Während bei den meisten Festkörpern Elektronen für den Ladungstransport verantwortlich sind, können auch Ionen Ladung transportieren. Materialien, bei denen dies auftritt, werden als feste Elektrolyte bezeichnet. Ihre technologische Bedeutung steigt momentan da sie eine Grundlage für Brennstoffzellen und Batterien bilden. Die Leitfähigkeit für Ionen steigt mit der Temperatur stark an.

4.4.5 Driftgeschwindigkeit

Um den Strom als lokale Größe zu definieren verwendet man die Stromdichte

$$j = \frac{dI}{dA},$$

also den Strom pro Fläche. Sie kann mikroskopisch als Produkt aus Ladungsdichte nq und Geschwindigkeit v der Ladungsträger geschrieben werden:

$$j = nqv.$$

Wir verwenden diese Beziehung, um die Driftgeschwindigkeit v der Ladungsträger zu berechnen,

wobei wir annehmen, dass die Dichte der Ladungsträger von der Größenordnung der Dichte der Atome in einem Metall ist. Die Anzahl Atome berechnen wir z.B. für Kupfer. Die Atommasse ist 63.5 u, die Dichte = 8950 kg m⁻³. Somit enthält 1 m³ Kupfer $8,95 \cdot 10^3 / 63,5 = 141$ kmol Atome. Mit der Avogadrozahl $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ erhalten wir die Anzahl Atome pro m³:

$$n = 6 \cdot 10^{23} \cdot 141 \cdot 10^3 \text{ m}^{-3} = 0,85 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3} \\ \approx 10^{29} \text{ Atome/m}^3$$

Für die Stromdichte nehmen wir $1 \text{ A/mm}^2 = 10^6 \text{ A/m}^2$ an, einen typischen Wert. Wir erhalten

$$v = j/(nq) = \frac{10^6}{10^{29} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \frac{\text{A}}{\text{m}^2 \text{m}^{-3} \text{C}} \\ = 6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 60 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}.$$

Elektronen in einem Draht bewegen sich somit sehr langsam!

Interessant ist auch, dass die Geschwindigkeit direkt proportional zum Feld, also zur äußeren Kraft ist. Dies kontrastiert mit dem Bild eines freien Ladungsträgers, bei dem die Beschleunigung proportional zur Kraft ist. Ein solches Verhalten erhält man bei einer reibungsbehafteten Bewegung, d.h. für eine Bewegungsgleichung

$$m \frac{dv}{dt} = qE - \gamma v.$$

Ein stationärer Zustand wird dann erreicht wenn die resultierende Kraft auf der rechten Seite verschwindet, $qE = \gamma v$. Die berechnete Driftgeschwindigkeit ist somit gegeben durch das Verhältnis

$$v_D = \frac{qE}{\gamma},$$

d.h. sie wird bestimmt durch das Verhältnis von elektrischer Kraft zur inneren Reibung für die Ladungsträger.

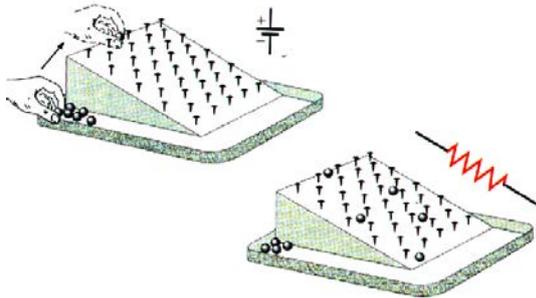


Abbildung 4.70: Modell für die spezifische Leitfähigkeit.

4.4.6 Modelle für die Leitfähigkeit

In einem mechanischen Modell kann man sich das so vorstellen, dass die Ladungsträger als Kugeln eine schiefe Ebene hinunterrollen (\rightarrow Abb. 4.70). Normalerweise würden sie durch die Schwerkraft beschleunigt. Sind jedoch auf dieser schiefen Ebene Hindernisse vorhanden, so stoßen die Kugeln damit und werden so langsamer hinunterrollen. Die Energie, welche die Kugeln bei den Stößen an die Hindernisse abgeben, wird durch das Anheben in das System hineingegeben. Im elektrischen Leiter wird diese Energie durch die Spannung zugeführt und an die Ionen übergeben. Dies führt zu einer Aufheizung des Materials.

Elektrische Signale werden praktisch mit Lichtgeschwindigkeit übertragen: die Signalübertragungsgeschwindigkeit ist durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Spannung, also des elektrischen Feldes bestimmt, nicht durch die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger.

Eine ähnliche Situation findet man auch bei der Signalübertragung in Nerven: die Signale werden elektrisch übertragen, wie in Abb. 4.71 gezeigt. Allerdings findet der Ladungstransport senkrecht zur Reizleitungsrichtung statt, welche mit der Richtung der Nervenfasern zusammenfällt. Das Signal wird durch die Spannung definiert, welche zwischen dem Inneren der Zelle und ihrer Umgebung anliegt. Ladungsträger sind hier nicht Elektronen, sondern Natrium (Na^+) und

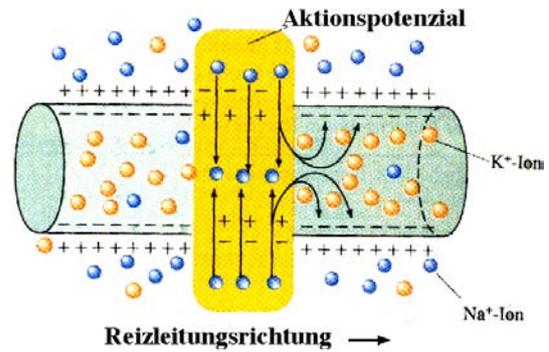


Abbildung 4.71: Modell für die Nervenleitung.

Kalium (K^+) Ionen.

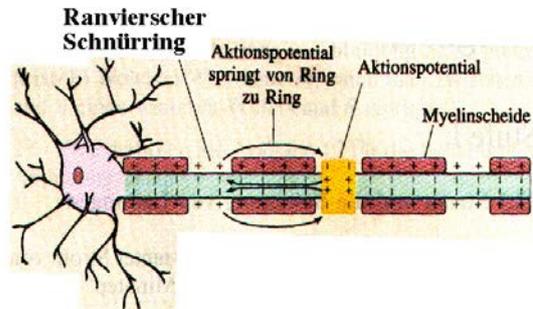


Abbildung 4.72: Einfluss der Myelinscheide auf die Nervenleitung.

Die Nervenfasern sind von einer Hülle umgeben, welche eine abschirmende Wirkung hat (\rightarrow Abb. 4.72). Die Signalübertragung findet so statt, dass das Aktionspotential von einem Ring (= "Ranvierscher Schnürring") zwischen zwei Myelinscheiden zum nächsten springt.

4.4.7 Supraleiter

Bei Supraleitern findet bei tiefen Temperaturen ein Übergang statt zu einem Zustand, wo der elektrische Widerstand verschwindet. Dieser Effekt wurde 1911 von Kamerlingh Onnes entdeckt, nachdem es ihm gelungen war, Helium zu verflüssigen. Abb. 4.73 zeigt die Original-Messkurve für Quecksilber aufgetragen: bei 4,2 K sinkt der Widerstand auf Null. Der plötzliche Übergang entspricht einem Phasenübergang, ähnlich wie der Siedepunkt; er tritt bei ei-

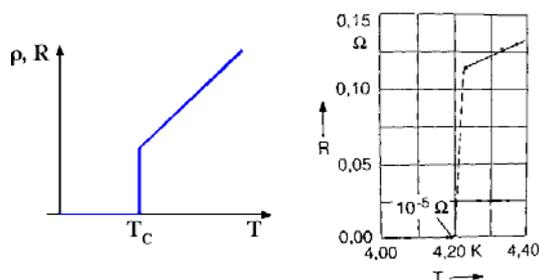


Abbildung 4.73: Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit bei Supraleitern.

ner kritischen Temperatur T_c auf. Viele Elemente und Verbindungen werden bei unterschiedlichen Temperaturen supraleitend. Einige kritische Temperaturen sind

Stoff	T_c/K
Al	1,19
Be	0,026
Hg	4,15
Zn	0,9
Wo	0,012
Pb	7,2
V_3Si	17,1
Nb_3Si	18,0
$Nb_3Al_8Ge_{0,2}$	20,7
$YBa_2Cu_3O_{6+x}$	90
$HgBa_2CuO_{4+x}$	133
$CsRb_2C_{60}$	31

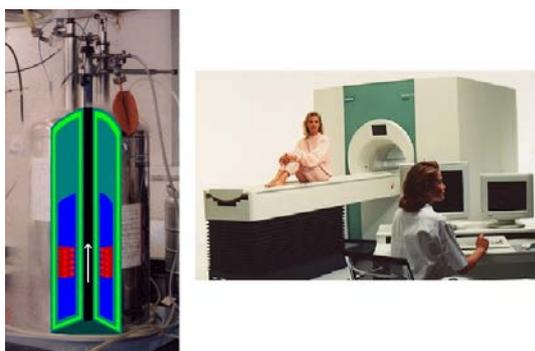


Abbildung 4.74: Supraleitende Magneten.

Die verlustlose Leitung von elektrischem Strom ist für verschiedene Anwendungen interessant, so für die Erzeugung von starken Magnetfeldern,

wie sie z.B. in Kernspintomographen benötigt werden. Abb. 4.74 zeigt 2 Beispiele für solche Magneten.

4.4.8 Halbleiter

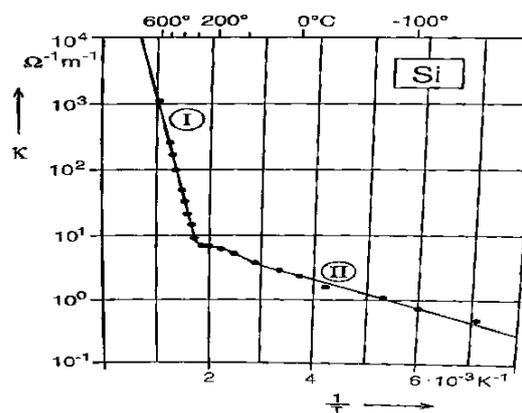


Abbildung 4.75: Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes in einem Halbleiter (Si).

Im Gegensatz zu Metallen sinkt bei Halbleitern der Widerstand mit zunehmender Temperatur, d.h. die Leitfähigkeit nimmt zu, wie in Abb. 4.75 gezeigt. Man unterscheidet hier zwei Bereiche: im Hochtemperaturbereich I dominieren die intrinsischen Ladungsträger; ihre Zahl nimmt mit der Temperatur exponentiell zu. Bei niedrigeren Temperaturen (II) dominieren Ladungsträger, welche durch Fremdatome eingebracht wurden, wie z.B. Phosphor. Durch das Einbringen von Fremdatomen kann man die elektrischen Eigenschaften von Halbleitern in weiten Grenzen variieren; dies ist der wichtigste Grund für die enorme Rolle, welche Halbleiter heute spielen.

Ob ein Material als Halbleiter oder Isolator betrachtet wird, ist zu einem guten Teil temperaturabhängig.

So ist Glas bei tiefen Temperaturen ein sehr guter Isolator; bei hohen Temperaturen werden jedoch einzelne Ionen beweglich und man erhält eine erhebliche Leitfähigkeit.

4.4.9 Ladungstransport in Gasen und Flüssigkeiten

Auch in Gasen können Ladungen transportiert werden. Die Elektronen werden dabei beschleunigt bis sie wieder auf Gasteilchen treffen und schlagen weitere Elektronen aus diesen heraus.

Man kann den Effekt z.B. in Luft nachweisen. Dadurch findet man häufig ein nichtlineares Verhalten, da die Ladungen in einem elektrischen Feld beschleunigt werden, dadurch genügend kinetische Energie erhalten um weitere Ladungen durch Stoßionisation zu erzeugen, welche selber ebenfalls kinetische Energie erhalten.

In Flüssigkeiten und Gasen können Ladungen durch Ionen transportiert werden. Sind keine geladenen Teilchen vorhanden können diese z. T. auch durch Dissoziation (Elektrolyse) erzeugt werden.

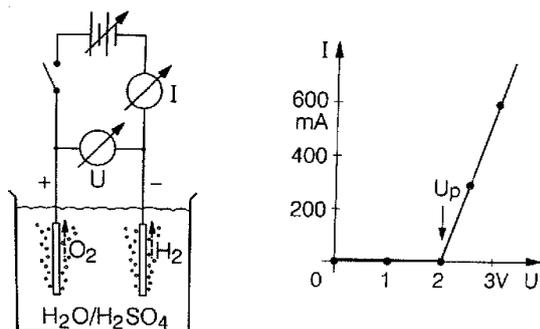


Abbildung 4.76: Stromleitung in Elektrolyten.

So findet man in verdünnter Schwefelsäure H^+ , HSO_4^- und SO_4^{2-} Ionen, welche im elektrischen Feld diffundieren. Hier wird der Strom somit von positiven und negativen Ladungsträgern transportiert (\rightarrow Abb. 4.76).

Bei niedrigen Spannungen fließt in Elektrolyten kein Strom; die Polarisationsspannung U_p wird durch das unterschiedliche chemische Potenzial der beiden Elektroden hervorgerufen. Oberhalb dieser Spannung verhält sich das System in guter Näherung wie ein Ohm'scher Leiter.

Wenn die Ionen die Elektroden erreichen geben sie ein Elektron an die Elektrode ab, resp. nehmen es von dort auf. Diese Art von Reaktion

wird als Elektrolyse bezeichnet. Sie wird für verschiedene technische Anwendungen verwendet, wie z.B. die Spaltung von Wasser in Sauerstoff und Wasserstoff.

Die umgekehrte Reaktion verwendet man in Batterien; sind die Prozesse reversibel, so kann man entsprechende Elemente zur Speicherung von elektrischem Strom verwenden.

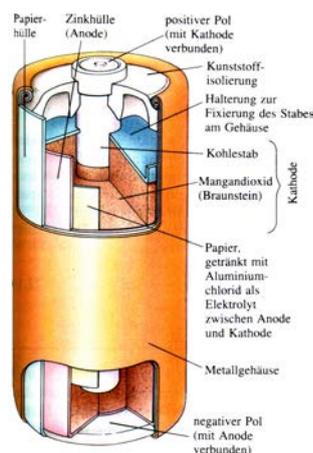


Abbildung 4.77: Aufbau einer Batterie.

Bei gewöhnlichen Batterien besteht die Kathode aus einem Kohlestab und Manganoxid als Reaktionsmittel, während die Anode aus einem Zinkblech besteht. Abb. 4.77 zeigt schematisch den Aufbau einer solchen Batterie.

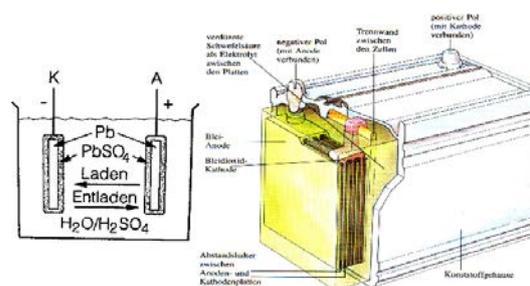


Abbildung 4.78: Blei-Akku.

Das am weitesten verbreitete System ist wohl die Bleibatterie (\rightarrow Abb. 4.78), wo die Umwandlung von Blei in Bleisulfat in verdünnter Schwefelsäure verwendet wird. Bei anderen Elektrolyten (z.B. AgNO_3) wird an einer der Elektroden Metall (Ag) abgeschieden. Solche Systeme wer-

den verwendet für das Veredeln von Werkstücken durch Beschichten mit einer Metallschicht.

4.4.10 Elektrische Leistung

Ein Strom, der durch einen Widerstand fließt, leistet Arbeit: der Widerstand wird aufgeheizt. Die Leistung ist gegeben durch das Produkt aus Spannung und Strom,

$$P = UI = U^2/R = I^2R.$$

$$[P] = \text{Watt} = W$$

Die zeitlich integrierte Leistung ergibt die Arbeit, welche auch als Produkt aus Ladung und Potenzialdifferent U geschrieben werden kann:

$$W = \int P dt = QU.$$

Sind mehrere Widerstände hintereinander angeordnet, so hängt die Leistung, welche an einem Widerstand anfällt, von beiden Widerständen ab.

Daraus kann man Messinstrumente bauen.

4.4.11 Kirchhoff'sche Gesetze

Die Kirchhoff'schen "Gesetze" sind nützliche Regeln für die Analyse elektrischer Stromkreise. Das 1. Kirchhoff'sche Gesetz wird auch als Knotenregel bezeichnet (\rightarrow Abb. 4.79); es ist eine direkte Konsequenz des Erhaltungsgesetzes für elektrische Ladung.

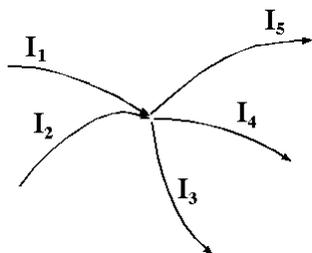


Abbildung 4.79: Knotenregel.

Es lautet: die Summe aller Ströme die in einen Knoten hinein fließen ist gleich der Summe aller Ströme die aus dem Knoten heraus fließen

$$\sum_i I_i = 0.$$

Dies bedeutet im Wesentlichen, dass im Knoten keine Ladungen gespeichert, erzeugt oder vernichtet werden.

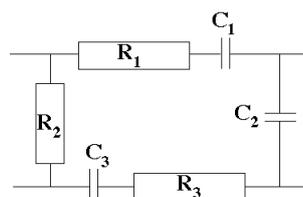


Abbildung 4.80: Maschenregel.

Das zweite Kirchhoff'sche Gesetz wird auch als Maschenregel bezeichnet: In einem geschlossenen Stromkreis (=Masche; Abb. 4.80) ist die Summe aller Spannungen gleich Null. Die Spannung als vorzeichenbehaftete Größe muss dabei immer in der gleichen Richtung gemessen werden.

4.4.12 Einfache Schaltungen

Als einfaches Anwendungsbeispiel betrachten wir den Spannungsabfall über zwei in Reihe geschalteten Widerständen, wie in Abb. 4.81 gezeigt.

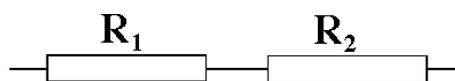


Abbildung 4.81: Reihenschaltung von 2 Widerständen.

Der Strom muss gemäss Maschenregel überall gleich sein,

$$I = I_1 = I_2 = I_3 = \dots$$

Für die Spannung finden wir

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots = R_1 I + R_2 I + R_3 I + \dots$$

Wir berechnen nun den Widerstand, welcher die gleiche Wirkung hat wie zwei in Serie geschaltete Widerstände. Nach Definition ist das

$$R = U/I = \sum_i R_i,$$

d.h. der Gesamtwiderstand ist gleich der Summe der einzelnen Widerstände.

Im Experiment verbinden wir zwei Widerstände von $R_1 = R_2 = R = 80\Omega$. Wenn wir eine konstante Spannung von 20 V über einen Widerstand legen beträgt der Strom 250 mA; liegt die gleiche Spannung an der Serienschaltung so sinkt der Strom auf 125 mA, entsprechend einem Widerstand von 160Ω . Dies kann auch direkt durch eine Widerstandsmessung verifiziert werden.

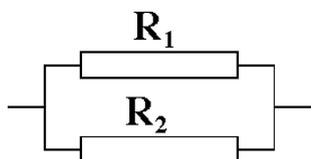


Abbildung 4.82: Parallelschaltung von Widerständen.

Als zweites Anwendungsbeispiel betrachten wir den Spannungsabfall über zwei parallel geschalteten Widerständen (\rightarrow Abb. 4.82). Gemäss dem zweitem Kirchhoff'schen Gesetz muss die Summe der beiden Spannungen (im Kreis gemessen) verschwinden, d.h. sie müssen entgegengesetzt gleich sein. Messen wir beide Spannungen von links nach rechts müssen die Spannungen gleich sein, $U_1 = U_2 = U$. Somit fließen über die beiden Widerstände die Ströme

$$I_1 = U/R_1 \quad I_2 = U/R_2,$$

oder

$$I_1/I_2 = R_2/R_1.$$

Gemäss dem ersten Kirchhoff'schen Gesetz muss die Summe der Ströme über die beiden Widerstände gleich dem zugeführten Strom sein, $I_1 + I_2 = I$. Daraus können wir den Widerstand der Parallelschaltung bestimmen:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_1 + I_2} = \frac{U}{U/R_1 + U/R_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

oder

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Auch dieses Resultat wird im Experiment verifiziert.

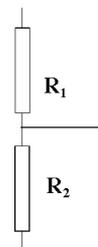


Abbildung 4.83: Spannungsteiler.

Als nächstes Beispiel betrachten wir einen Spannungsteiler (\rightarrow Abb. 4.83). Er besteht aus zwei in Serie geschalteten Widerständen. Gemäss Knotenregel fließt durch beide Widerstände der gleiche Strom $I = I_1 = I_2$. Der Spannungsabfall über dem ersten Widerstand $U_1 = IR_1$ und über dem zweiten Widerstand $U_2 = IR_2$. Da der gesamte Spannungsabfall gemäss der Maschenregel der treibenden Spannung U_0 entsprechen muss, erhalten wir

$$U_1 = U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad U_2 = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

d.h. die Spannung wird im Verhältnis der Widerstände geteilt.

Wir verifizieren dies für einen Schiebewiderstand.

4.4.13 Wheatstone'sche Brückenschaltung

Ein solcher Spannungsteiler wird auch verwendet in der Wheatstone'schen ⁴ Brücke, welche als Grundlage für die Messung von Widerständen verwendet wird (\rightarrow Abb. 4.84). Der zu messende Widerstand R_x wird dabei mit bekannten Widerständen R_0 , R_1 und R_2 verglichen, wobei das Verhältnis von R_1 zu R_2 so eingestellt wird,

⁴Charles Wheatstone 1802-1875

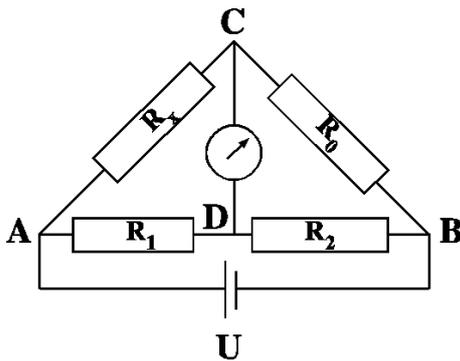


Abbildung 4.84: Wheatstone'sche Brückenschaltung.

dass durch das Strommessgerät kein Strom fließt und somit auch keine Spannung abfällt. Solche Messungen sind besonders empfindlich und wenig stör anfällig.

Der Strom durch das Messinstrument verschwindet wenn für die Masche ACD $U_1 = U_x = R_1 I_1 = R_x I_x$ und für die Masche CBD $R_2 I_2 = R_0 I_0$. Außerdem muss gelten $I_1 = I_2$ und $I_x = I_0$. Division der beiden ersten Gleichungen ergibt

$$\frac{R_1 I_1}{R_2 I_2} = \frac{R_x I_x}{R_0 I_0} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x}{R_0}$$

oder

$$R_x = R_0 \frac{R_1}{R_2}.$$

Im Experiment verwenden wir $R_0 = 25 \Omega$. Die Messung ergibt ein Verhältnis $R_1/R_2 = 30,2/69,8 = 0,433$. Somit erhalten wir

$$R_x = R_0 \frac{R_1}{R_2} = 10,82 \Omega$$

Die direkte Messung ergibt $R_x = 11,2 \Omega$.

4.4.14 Elektrische Schaltelemente

Elektrische Schaltungen werden aus unterschiedlichen Elementen aufgebaut. Die Menge an möglichen Elementen ist natürlich unbegrenzt. Es ist aber sinnvoll, einige besonders wichtige Elemente aufzulisten, wobei sie immer idealisiert werden.

- Ohm'sche Widerstände; sie zeichnen sich durch eine lineare Beziehung zwischen Strom und Spannung aus:

$$V = RI.$$

- Kondensatoren; wie bereits diskutiert findet man hier (im Idealfall) eine lineare Beziehung zwischen der gespeicherten Ladung und der Spannung:

$$V = \frac{Q}{C}.$$

- Induktivitäten (Spulen). Hier besteht eine lineare Beziehung zwischen der zeitlichen Änderung des Stroms und der Spannung

$$V = L \frac{dI}{dt}.$$

- Dioden zeigen für negative Spannungen einen geringen Strom; für positive Spannungen ist der Strom deutlich größer und nicht-linear. Bei Röhrendioden erreicht er einen Sättigungswert, der von der Heizleistung abhängt. Bei Halbleiterdioden steigt der Strom an, bis die Schädigungsgrenze erreicht wird.
- Man kann Dioden u.a. dazu verwenden, um den Strom gleichzurichten oder um eine Begrenzung einzubauen.
- In einer Gasentladung nimmt der Widerstand mit zunehmendem Strom so stark ab, dass die nötige Spannung sogar absinkt. Man spricht hier von einem negativen differentiellen Widerstand.

4.5 Magnetfelder

4.5.1 Grundlagen

Während die Wechselwirkungen zwischen statischen elektrischen Ladungen sich durch das Coulomb'sche Gesetz, resp. ein elektrisches Feld beschreiben lassen, treten bei bewegten Ladungen zusätzlich magnetische Wechselwirkungen auf.

Diese können ebenso durch ein magnetisches Feld beschrieben werden. Das Magnetfeld wird mit dem Buchstaben B , resp. H bezeichnet. Die Unterscheidung zwischen diesen beiden Magnetfeldern wird etwas später diskutiert. Die Einheiten sind

$$[B] = \text{T} = \text{Tesla} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \quad [H] = \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

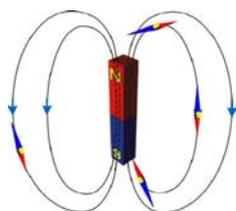


Abbildung 4.85: Magnetischer Dipol mit Feldlinien.

Im Falle des elektrischen Feldes wirken die elektrischen Ladungen als Quellen des Feldes; es existieren jedoch keine magnetischen ‘‘Ladungen’’ (d.h. Monopole), und somit keine Quellen für das magnetische Feld. Magnetische Feldlinien haben deshalb nie einen Anfang oder ein Ende, wie in Abb. 4.85 gezeigt. Als magnetische Grundeinheiten kann man die magnetischen Dipole betrachten.

Das Wegintegral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ eines Magnetfeldes ist abhängig vom Weg, im Gegensatz zum elektrischen Feld: Magnetfelder können somit nicht als Gradienten eines Potentials geschrieben werden. Dies ist eine direkte Konsequenz davon, dass die Feldlinien geschlossene Kurven darstellen. Man kann das Magnetfeld statt dessen als Rotation eines Vektorpotentials schreiben,

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}.$$

Darauf soll hier aber nicht weiter eingegangen werden.

4.5.2 Dipole im Magnetfeld

Genau wie auf elektrische Dipole in einem elektrischen Feld ein Drehmoment wirkt, erfahren

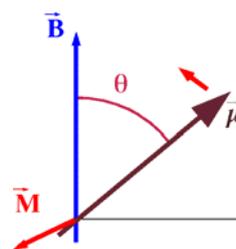


Abbildung 4.86: Magnetischer Dipol im Magnetfeld.

magnetische Dipole $\vec{\mu}$ ($[\mu] = \text{Am}^2$) im Magnetfeld \vec{B} ein Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}.$$

Das Drehmoment ist somit maximal wenn der Dipol senkrecht zur Feldrichtung orientiert ist und verschwindet für parallele Orientierung.

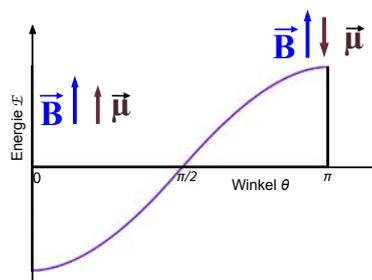


Abbildung 4.87: Energie des Dipols als Funktion der Orientierung.

Die potentielle Energie ist wie beim elektrischen Dipol

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu \cdot B \cos \theta,$$

wobei θ den Winkel zwischen Dipol- und Feldrichtung darstellt (\rightarrow Abb. 4.87). Die Gleichgewichtsstellung entspricht somit der Orientierung parallel zu den Feldlinien, also bei $\theta = 0$.

Genau wie bei elektrischen Dipolen wirkt auch auf magnetische Dipole in einem inhomogenen Feld eine Kraft, die von der Orientierung der Dipole bezüglich dem Magnetfeld abhängt (\rightarrow Abb. 4.88). Sind sie im Gleichgewicht, d.h. parallel zum Feld orientiert, so werden sie in Richtung des stärkeren Feldes gezogen.

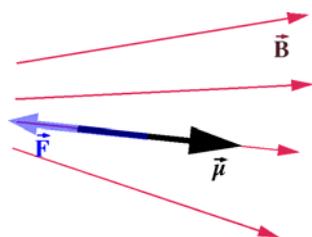


Abbildung 4.88: Dipol in einem inhomogenen Feld.

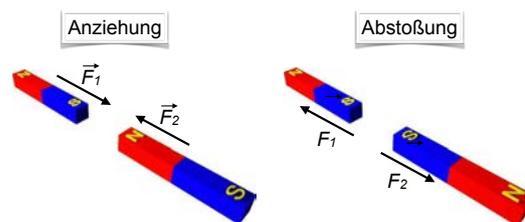


Abbildung 4.90: Anziehung und Abstoßung von Magneten.

4.5.3 Feldlinien, Pole

Genau wie beim elektrischen Feld beschreibt man auch das magnetische Feld mit Hilfe von Feldlinien. diese können z.B. über die Orientierung von magnetischen Dipolen gemessen werden. Da keine Quellen für magnetische Felder existieren sind magnetische Feldlinien immer geschlossene Schleifen.

Feldlinien können auf unterschiedliche Arten sichtbar gemacht werden. Meist verwendet man dafür Eisen-Feilspäne oder kleine, drehbar gelagerte Magnetchen.

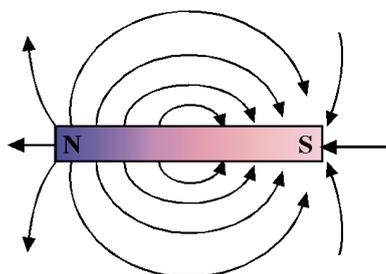


Abbildung 4.89: Stabmagnet, Pole, Feldlinien.

Die beiden wichtigsten Quellen für Magnetfelder sind elektrische Ströme und magnetische Körpern. Ein typisches Beispiel ist ein Stabmagnet. Abb. 4.89 zeigt schematisch einen Stabmagneten. Er besitzt zwei magnetische Pole, d.h. er bildet einen magnetischen Dipol. Die Feldlinien beginnen am einen Pol, welcher magnetischer Nordpol genannt wird, laufen durch die Umgebung zum andern Ende, dem magnetischen Südpol, und im Material zurück. Bringt man mehrere Stabmagnete zusammen so richtet sich der eine nach den Magnetfeldlinien des anderen aus.

Die niedrigste Energie hat die Kombination offenbar dann wenn ungleiche Pole benachbart sind: entgegengesetzt Pole ziehen sich an, gleiche Pole stoßen sich ab (siehe Abb. 4.90), in Analogie zu elektrischen Ladungen.

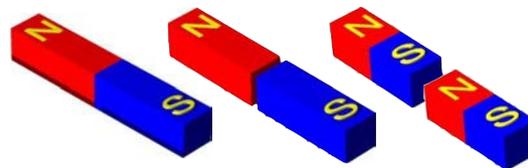


Abbildung 4.91: Teilung eines Stabmagneten ergibt 2 Stabmagneten.

Magnetpole lassen sich nicht trennen. Zerbricht man einen Stabmagneten, dann ergeben sich zwei kürzere Magnete mit beiden Polen, wie in Abb. 4.91 gezeigt.

4.5.4 Erdmagnetfeld und Kompass

Auf Grund des Drehmomentes können magnetische Dipole dazu verwendet werden, die Orientierung und Stärke eines Magnetfeldes zu messen, sofern sie nicht parallel zum Feld angeordnet sind. Ein gutes Beispiel für einen magnetischen Dipol ist eine Kompassnadel, wiederum ein magnetischer Dipol. Dieser richtet sich im Magnetfeld der Erde so aus, dass eines seiner Enden nach Norden weist. Man bezeichnet dieses Ende als magnetischen Nordpol. Da der magnetische Nordpol einer Nadel von einem magnetischen Südpol angezogen wird und nach Norden zeigt ist offenbar der magnetische Südpol der Erde in der Nähe des geographischen Nordpols (genauer: 78.5°N , 103.4°W), der magnetische Nordpol

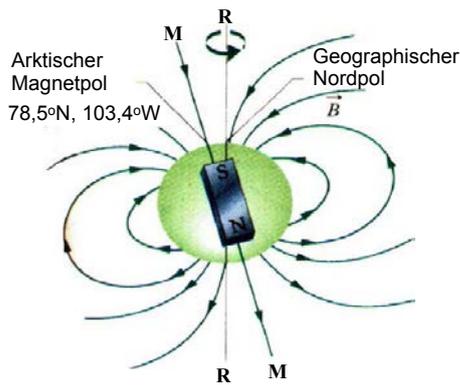


Abbildung 4.92: Magnetfeld der Erde. Der arktische Magnetpol befindet sich in der Nähe des geographischen Nordpols und ist ein magnetischer Südpol.

in der Nähe des geographischen Südpols (65°S , 139°E). Wie in Abb. 4.92 gezeigt, liegen die magnetischen Pole sich in der Nähe aber nicht exakt beim geographischen Pol befinden zeigt ein Kompass nicht exakt nach Norden (in Deutschland: Abweichung (Deklination) 2°). Die Feldlinien sind außerdem nicht horizontal (in Deutschland: Inklination 55°).

Die Nutzung des magnetischen Kompass wurde in China um das Jahr 1000 entwickelt; Kolumbus nutzte ihn für die Fahrt nach Amerika. In beiden Fällen wussten die Seefahrer wie sie ihn benutzen konnten, ohne aber die Funktionsweise zu kennen. Erst im Jahre 1600 konnte William Gilbert zeigen, dass man den Kompass verstehen kann wenn man annimmt, dass die Erde ein Magnetfeld besitzt.

4.5.5 Magnetfeld elektrischer Ströme

Magnetfelder können nicht nur von Dipolen erzeugt werden, sondern auch von bewegten elektrischen Ladungen. Dies weiss man erst seit dem 19. Jahrhundert.

Oersted stellte 1821 fest, dass stromdurchflossene Leiter eine Kompassnadel in der Nähe beeinflussen. Abb. 4.93 zeigt schematisch das entsprechende Experiment.

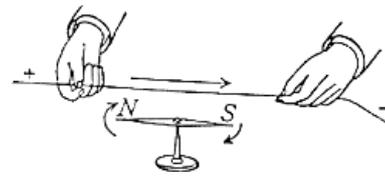


Abbildung 4.93: Experiment von Oersted zum Nachweis dass ein elektrischer Strom ein Magnetfeld erzeugt.

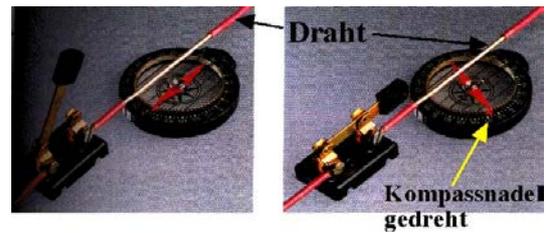


Abbildung 4.94: Nachweis des Magnetfeldes durch einen Kompass.

Abb. 4.94 zeigt eine aktuelle Version des Oersted-Experiments. Hier stellt man einen Wettbewerb zwischen dem Erdmagnetfeld und dem Magnetfeld des Drahtes fest. Wird der Strom (und damit das dadurch erzeugte Magnetfeld) stark, so richtet sich die Kompassnadel senkrecht zum Draht aus. Die Richtung der Feldlinien kann durch die "rechte Hand Regel" abgeleitet werden: weist der Daumen der rechten Hand in Stromrichtung so weisen die Finger in positiver Feldrichtung.

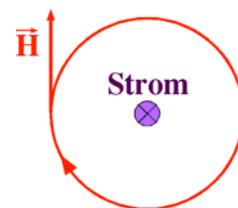
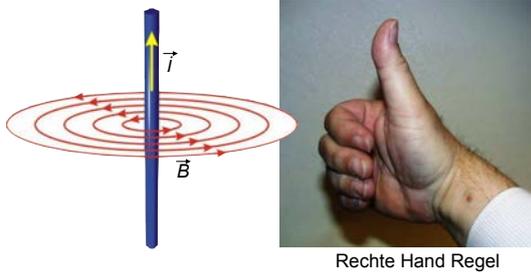


Abbildung 4.95: Feld eines Leiters.

Mit Hilfe einer Reihe von solchen Experimenten stellt man fest, dass ein Strom, der durch einen geraden Leiter fließt, kreisförmige Feldlinien erzeugt, in deren Zentrum sich der Leiter befindet, wie in Abb. 4.95 gezeigt. Die Stärke des Magnetfeldes ist dabei proportional ist zum Strom. Man

verwendet diesen Befund für die Definition der Magnetfeldstärke über das Durchflutungsgesetz.



Rechte Hand Regel

Abbildung 4.96: Rechte-Hand-Regel für das Magnetfeld.

Die Richtung des Magnetfeldes kann durch die "Rechte-Hand-Regel" bestimmt werden (\rightarrow Abb. 4.96): zeigt der Daumen der rechten Hand in Stromrichtung, so geben die anderen Finger die Richtung des B -Feldes an.

Aus der Definition der Stromdichte $\vec{j} = d\vec{I}/dA$, welche durch ein Flächenelement dA fließt (\rightarrow Kap. 4.4.4) folgt umgekehrt dass der Gesamtstrom durch eine Fläche A gegeben als das Integral der Stromdichte über diese Fläche,

$$\iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = I.$$

Dann gilt

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \sum_i I_i, \quad (4.5)$$

wobei das Flächenintegral über die Fläche läuft, die vom Pfad des Schleifenintegrals umschlossen wird. In Worten: Das Weg-Integral des magnetischen Feldes entlang einer geschlossenen Kurve ist gleich dem gesamten Strom durch die Fläche. Daraus folgt auch die Einheit für das Magnetfeld: $[H] = \text{A/m}$. Dies wird als Durchflutungsgesetz bezeichnet.

Differentielle Form:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}.$$

Das Wegintegral eines Magnetfeldes ergibt offenbar einen Strom; wir vergleichen dies mit dem

Wegintegral des elektrischen Feldes, welches eine Spannung, resp. eine Potentialdifferenz ergibt. Die Dimensionen der beiden Felder sind $[E] = \text{V/m}$ und $[H] = \text{A/m}$.

Für einen geraden, unendlichen, stromdurchflossenen Leiter ist das Feld, wie in Abb. 4.95 gezeigt, aus Symmetriegründen kreisförmig. Da der eingeschlossene Strom für alle Kreise der gleiche ist, folgt aus (4.5)

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 2\pi r H$$

oder

$$H = \frac{I}{2\pi r},$$

d.h. das Feld fällt proportional zum Abstand ab.

4.5.6 Spulen

Aus dem Durchflutungsgesetz kann man auch für weitere Leiteranordnungen die Magnetfelder berechnen. Eine wichtige Art sind Spulen.

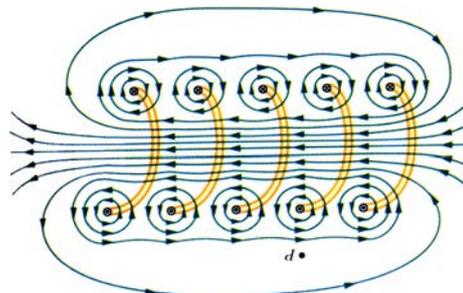


Abbildung 4.97: Verlauf der Feldlinien in einer stromdurchflossenen Spule; oben: schematisch; unten; sichtbar gemachte Feldlinien mit Hilfe von Eisenspänen.

Für eine zylinderförmige (Solenoid-) Spule befinden sich die Feldlinien vor allem innerhalb des

Zylinders, wie in Abb. 4.97 gezeigt. Außerhalb ist das Feld wesentlich schwächer. Wir vernachlässigen hier diejenigen Feldlinien, welche zwischen den einzelnen Windungen aus der Spule hinauslaufen. Alle übrigen Feldlinien umschließen in guter Näherung N mal den Leiter.

Aus dem Durchflutungsgesetz folgt

$$NI = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{innen}} \vec{H}_i \cdot d\vec{s} + \int_{\text{aussen}} \vec{H}_a \cdot d\vec{s} \\ \approx \int_{\text{innen}} \vec{H}_i \cdot d\vec{s}.$$

H_i beschreibt das Feld im Inneren der Spule, H_a außerhalb. Da das äußere Feld deutlich schwächer ist als das innere kann es in guter Näherung vernachlässigt werden. Das Feld im Inneren ist in guter Näherung konstant, so dass das Integral zu $H\ell$ wird, wobei ℓ die Länge der Spule darstellt. Damit erhalten wir für das Feld im Innern einer langen, dünnen Spule

$$H = \frac{IN}{\ell}.$$

Sowohl die Proportionalität zum Strom wie auch zur Windungszahl kann im Experiment verifiziert werden. Man sieht auch, dass das Feld im Innern der Spule recht homogen ist und außerhalb rasch abfällt.

Mit Hilfe von solchen Anordnungen werden heute die stärksten Magnetfelder erzeugt, die man im Labor erreichen kann, bis zu etwas über 100 T mit nicht-destruktiven Anordnungen, bei destruktiven Experimenten auch deutlich höher. In astrophysikalischen Objekten gibt es noch deutlich stärkere Magnetfelder: Auf der Oberfläche von Neutronensternen, wie z. B. Pulsaren, bis zu 10^8 T, bei Magnetaren, einer speziellen Sorte von Neutronensternen, bis zur 10^{11} T.

4.5.7 Das Biot-Savart Gesetz

(Benannt nach Jean Baptiste Biot (1774-1862), und Felix Savart (1791-1841))

Das Durchflutungsgesetz erlaubt einem nur für spezielle Fälle die Berechnung des Magnetfeldes, da es lediglich dessen Integral enthält.

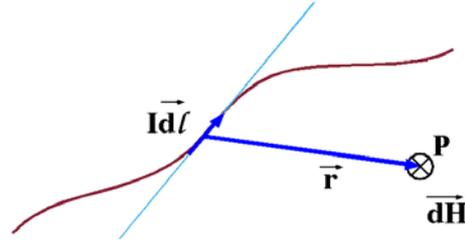


Abbildung 4.98: Magnetfeld eines Strom-Elementes.

Für beliebig geformte stromdurchflossene Leiter verwendet man eine differentielle Form und berechnet den Beitrag $d\vec{H}$ eines infinitesimalen Leiterstücks $d\ell$ zum Magnetfeld im Punkt P (\rightarrow Abb. 4.98). Er beträgt

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{r}}{4\pi r^3}.$$

\vec{r} stellt den Verbindungsvektor vom Leiterelement zum Punkt P dar, an dem das Feld berechnet werden soll. Offenbar steht das Feld senkrecht zum Verbindungsvektor \vec{r} und zum Leiterelement $d\vec{\ell}$ d.h. senkrecht auf der Ebene, welche durch P und das Leiterelement definiert wird.

Für einen beliebigen (nicht notwendigerweise geschlossenen) Leiter erhält man das Magnetfeld als Integral über den Leiter,

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Das Biot-Savart'sche Gesetz kann in einem gewissen Sinn auch als das magnetische Äquivalent zum Coulomb'schen Gesetz angesehen werden: Während das Coulomb'sche Gesetz die Felderzeugung durch elektrische Ladungselemente beschreibt, wird hier die Felderzeugung durch Stromelemente beschrieben.

4.5.8 Magnetfeld ringförmiger Spulen

Als Beispiel berechnen wir das Magnetfeld im Mittelpunkt eines kreisförmigen Leiters, wie in

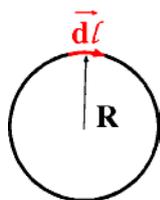


Abbildung 4.99: Kreisstrom und Längenelement $d\vec{l}$.

Abb. 4.99 zeigt. $d\vec{l}$ steht hier immer senkrecht auf \vec{r} , so dass man $d\vec{l} \times \vec{r}$ durch $ds R$ ersetzen kann, wobei R den Radius des Rings darstellt. Damit wird

$$H = \frac{I}{4\pi R^2} \oint ds = \frac{I}{4\pi R^2} 2\pi R = \frac{I}{2R}.$$

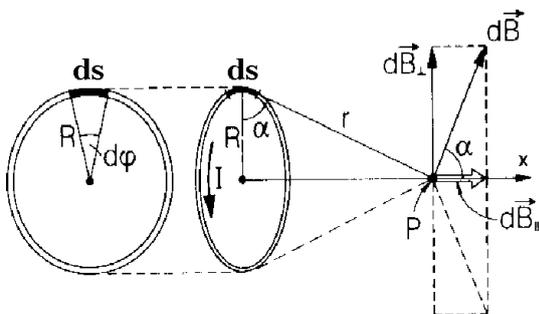


Abbildung 4.100: Magnetfeld auf der Spulenachse.

Analog kann man das Magnetfeld außerhalb der Leiterebene entlang der Symmetrieachse berechnen (\rightarrow Abb. 4.100). Aus Symmetriegründen bleibt nach Integration über die Spule lediglich die Komponente in Achsenrichtung übrig. Es genügt deshalb, wenn wir die Projektion auf die Achse berechnen, welche proportional ist zu $\cos \alpha$. Diese beträgt

$$H = \frac{I}{4\pi r^2} 2\pi R \cos \alpha.$$

Da $\cos \alpha = R/r$ wird somit

$$H = I \frac{R^2}{2r^3} = \frac{I R^2}{2(R^2 + \ell^2)^{3/2}},$$

wobei ℓ den Abstand von der Leiterebene darstellt.

Ist der Abstand ℓ groß im Vergleich zum Radius R , so kann dies vereinfacht werden zu

$$H = \frac{I R^2}{2\ell^3},$$

d.h. das Feld fällt mit der dritten Potenz des Abstandes ab. Der Kreisstrom IR^2 im Zähler entspricht einem magnetischen Dipol; dessen Stärke ist proportional zum Strom I und zur umflossenen Fläche.

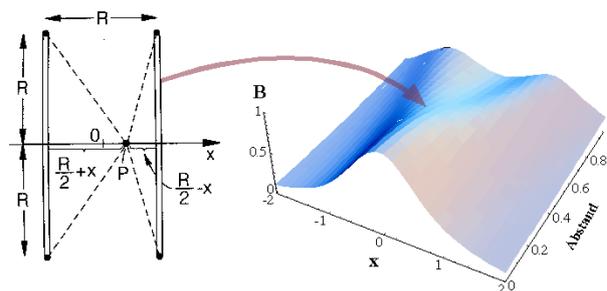


Abbildung 4.101: Ortsabhängigkeit der Magnetfeldstärke in einem Spulenpaar als Funktion des Abstandes zwischen den Spulen.

Benötigt man ein homogenes Magnetfeld, das besser zugänglich ist als für eine lange Spule, so kann man zwei (oder mehr) solche Spulen kombinieren wie in Abb. 4.101 gezeigt. In der Mitte zwischen den beiden Spulen ist die Ableitung der Stärke des Magnetfeldes aus Symmetriegründen immer Null, d.h. das Magnetfeld ist extremal und damit relativ homogen. Ist der Abstand gering, so erhält man ein Maximum, ist der Abstand groß, so handelt es sich um ein Minimum. Abb. 4.101 zeigt das Magnetfeld als Funktion des Spulenabstands und als Funktion des Ortes auf der Achse.

Helmholtz (Hermann von Helmholtz 1821-1894) hat gezeigt, dass man für zwei Spulen die beste Homogenität erhält wenn die Spulen mit Radius R im Abstand R voneinander angebracht werden: dann wechselt die Krümmung von positiv auf negativ, d.h. sie verschwindet ebenfalls. Dazu muss in beiden Spulen der gleiche Strom in die gleiche Richtung fließen.

4.5.9 Flussdichte und magnetische Feldenergie

Im Rahmen der Elektrostatik hatten wir zwei Arten von Feldern diskutiert, das elektrische Feld E und die Verschiebungsdichte D , welche Polarisierungseffekte des Mediums enthält. Genauso gibt es in der Magnetostatik zwei Felder, das Magnetfeld H und die Flussdichte B . Im Vakuum sind die beiden Felder wieder direkt proportional:

$$B = \mu_0 H \quad [B] = \text{T} = \text{Tesla} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}.$$

Die Proportionalitätskonstante

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

wird als magnetische Feldkonstante oder Permeabilität des Vakuums bezeichnet. Eine präzisere Definition wird im Zusammenhang mit dem Induktionsgesetz gegeben. In einem Material wird - in Analogie zum Magnetfeld - die Permeabilität des Vakuums mit der relativen Permeabilität μ_r multipliziert. Diese liegt für die meisten Materialien nahe bei eins.

Wie im elektrischen Feld ist auch im magnetischen Feld Energie gespeichert. Die magnetische Energiedichte ist

$$w_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} HB,$$

in offensichtlicher Analogie zur Elektrostatik (4.3). Die entsprechenden Einheiten sind

$$[HB] = \frac{\text{A Vs}}{\text{m m}^2} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}.$$

Da die Energie proportional zum Quadrat der Feldstärke ist, erhält man wiederum eine effektive Abstoßung der Feldlinien. Ein Magnetfeld speichert somit je nach Stärke eine große Energiemenge.

4.6 Bewegte Ladungen im Magnetfeld

4.6.1 Lorentzkraft

Bewegte Ladungen erzeugen Magnetfelder. Umgekehrt erzeugen Magnetfelder Kräfte auf bewegte Ladungen. Während statische Ladungen nur von elektrischen Feldern beeinflusst werden, wirken auf bewegte Ladungen auch in einem magnetischen Feld Kräfte.

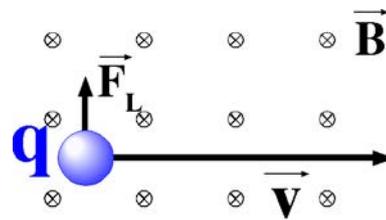


Abbildung 4.102: Kraft auf eine Ladung, die sich in einem Magnetfeld bewegt.

Bewegt sich eine Ladung q mit der Geschwindigkeit \vec{v} in einem Magnetfeld \vec{B} (\rightarrow Abb. 4.102), so spürt sie die Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Die drei Vektoren Geschwindigkeit, Magnetfeldrichtung und Kraft bilden ein rechtshändiges Koordinatensystem. Die Kraft wird maximal wenn die Bewegung senkrecht zum Magnetfeld erfolgt und verschwindet wenn sie parallel zu den Feldlinien läuft. Da die Kraft, und damit die Beschleunigung senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor stehen, ändert sich der Betrag der Geschwindigkeit nicht, sondern lediglich die Richtung. In einem homogenen Magnetfeld bewegen sich geladene Teilchen daher auf Kreisbahnen oder Spiralbahnen.

Die Ablenkung der Elektronen in einem Elektronenstrahl durch ein Magnetfeld wurde früher in Fernsehgeräten und Computermonitoren verwendet. Abb. 4.103 zeigt eine experimentelle Verifizierung des Effekts mit Hilfe des sogenannten Fadenstrahlrohrs.

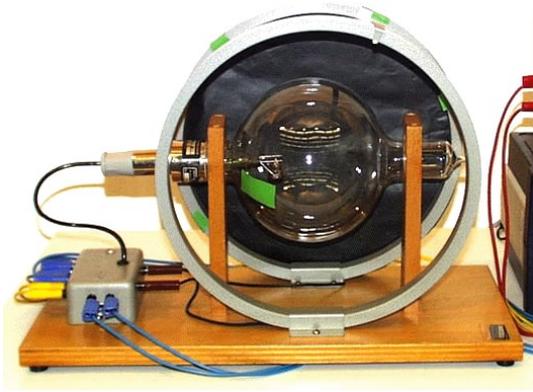


Abbildung 4.103: Fadenstrahlrohr.

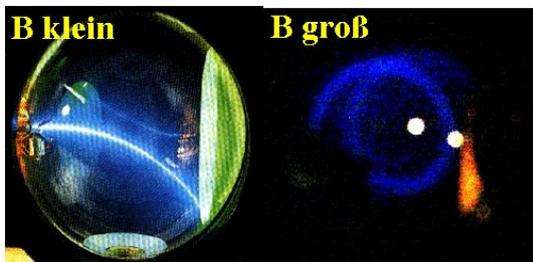


Abbildung 4.104: Spur der Elektronen in Magnetfeldern unterschiedlicher Stärke.

Um ein homogenes Magnetfeld zu erhalten verwendet man ein Spulenpaar in Helmholtz Anordnung. Die Elektronen werden über eine Beschleunigungsspannung in die Röhre “geschossen”. Um den Elektronenstrahl sichtbar zu machen, wird verdünntes Wasserstoffgas verwendet, welches durch Elektronenstöße zum Leuchten gebracht wird. Ohne ein äußeres Feld bewegen sich die Elektronen geradlinig. Legt man ein Magnetfeld an, so wird der Strahl gebogen. Je stärker das Magnetfeld, desto enger die Kurve, wie in Abb. 4.104 gezeigt. Wird der Radius genügend klein, so kann er vollständig in der Röhre beobachtet werden.

4.6.2 Spezifische Ladung

Bewegt sich ein geladenes Teilchen senkrecht zum Magnetfeld, so wirkt eine Kraft, die senkrecht zum Magnetfeld und zum Geschwindig-

keitsvektor steht. Das Teilchen wird dadurch beschleunigt, der Betrag der Geschwindigkeit ändert sich jedoch nicht. Geschwindigkeit und Beschleunigung bleiben in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld, das Teilchen bewegt sich auf einer Kreisbahn. Der Radius r dieser Kreisbahn ist gegeben durch das Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft F_{ZF} und Lorentzkraft F_L :

$$F_{ZF} = m \frac{v^2}{r} = F_L = qvB.$$

Somit ist

$$mv = qrB.$$

Wird die Geschwindigkeit v durch Beschleunigung mit einer elektrischen Potenzialdifferenz U erzeugt, so beträgt die kinetische Energie

$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{mv^2}{2} = qU.$$

Somit

$$m^2v^2 = q^2r^2B^2 = 2mqU.$$

Der Radius beträgt somit

$$r = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{q}}.$$

Umgekehrt kann aus der Messung des Radius das Verhältnis von Ladung zu Masse bestimmt werden

$$\frac{q}{m} = \frac{2U}{r^2B^2}, \tag{4.6}$$

sofern das Magnetfeld bekannt ist.

Diese Messung kann auch im Fadenstrahlrohr durchgeführt werden. Im Experiment wurde eine Beschleunigungsspannung von 200 V verwendet. Der gemessene Strom kann in ein Magnetfeld umgerechnet werden:

$$B = 0,78 I \frac{\text{mT}}{\text{A}}.$$

Es wurden folgende Werte für Strom und Bahnradius gemessen:

I [A]	B [mT]	r [cm]	q/m [10^{11} C/kg]
1,25	0,998	4,55	1,94
1,5	1,17	3,73	2,1
2,0	1,56	2,91	1,94

Der Literaturwert beträgt, mit der Elementarladung e und der Elektronenmasse m_e

$$\frac{e}{m_e} = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}}{9,109 \cdot 10^{-31} \text{kg}} = 1,760 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}.$$

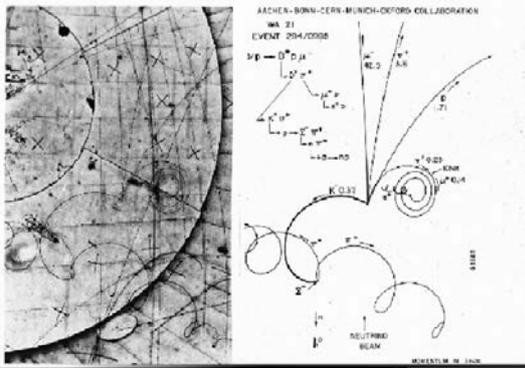


Abbildung 4.105: Teilchenspuren in der BEBC (=Big European Bubble Chamber) am CERN.

Diese Möglichkeit wird in der Teilchenphysik intensiv genutzt, z.B. in so genannten Blasenkamern, wo die Messung des Bahnradius wichtige Rückschlüsse auf die Art des erzeugten Teilchens ermöglicht. Abb. 4.105 zeigt als Beispiel einige Spuren, welche am CERN beobachtet wurden. Die Richtung der Bahnkrümmung erlaubt die Bestimmung des Vorzeichens der Ladung.

Man verwendet diesen Effekt auch, um Teilchen nach ihrer Masse (genauer: dem Verhältnis aus Ladung zu Masse) zu sortieren. Wie in Abb. 4.106 gezeigt, werden die geladenen Teilchen zunächst in einem elektrischen Feld beschleunigt. Danach werden sie in einem Magnetfeld B abgelenkt, auf eine Kreisbahn mit Radius R . durch Auflösen von Gleichung (4.6) erhält man die Masse als Funktion des Bahnradius:

$$m = q \frac{B^2 R^2}{2U}.$$

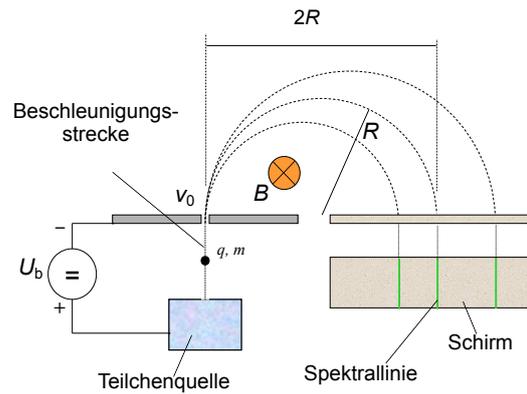


Abbildung 4.106: Massenspektrometer.

4.6.3 Bahnen im Magnetfeld

Bewegt sich das Teilchen parallel zu den Magnetfeldlinien, so verschwindet das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{B}$. Somit wirkt in diesem Fall keine Kraft auf das Teilchen, es kann sich entlang der Magnetfeldlinien frei bewegen.

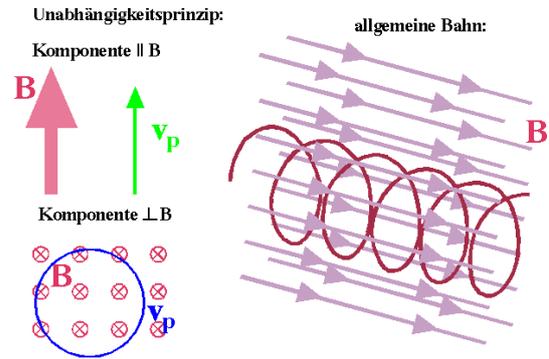


Abbildung 4.107: Allgemeine Bahn im Magnetfeld.

Im allgemeinen Fall hat das Teilchen Geschwindigkeitskomponenten parallel und senkrecht zum Magnetfeld. Während die parallele Komponente nicht beeinflusst wird und deshalb konstant bleibt, wird die senkrechte Komponente auf eine Kreisbahn gezwungen. Insgesamt resultiert somit eine Spiralbewegung um die Magnetfeldlinien, wie in Abb. 4.107 gezeigt. Dies kann wiederum im Fadenstrahlrohr beobachtet werden, indem man den Strahl verkippt, so dass er auch eine Komponente parallel zur Achse der

Helmholtz-Spulen aufweist.

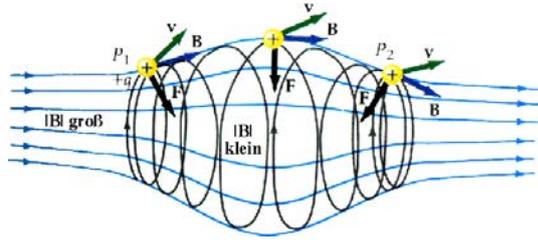


Abbildung 4.108: Magnetische Flasche.

Bewegt sich ein geladenes Teilchen in einem inhomogenen Magnetfeld mit einer Geschwindigkeitskomponente entlang der Magnetfeldrichtung, so wirkt eine Kraft gegen diese Richtung, wie in Abb. 4.108 gezeigt. Die Geschwindigkeit in Feldrichtung wird dadurch reduziert. Offenbar wirken somit Regionen starken Feldes wie ein Spiegel. "Magnetische Flaschen" können deshalb für den Einschluss von elektrisch geladenen Teilchen verwendet werden.

4.6.4 Geladene Teilchen im Erdmagnetfeld

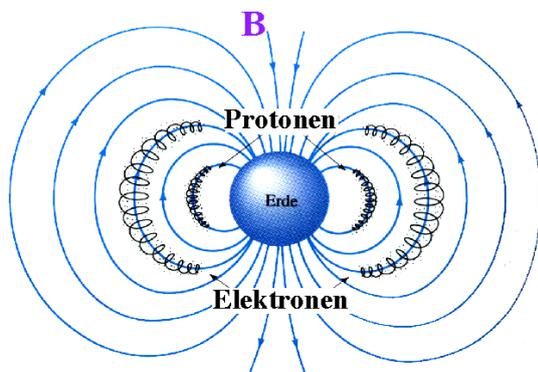


Abbildung 4.109: Geladene Teilchen im Magnetfeld der Erde.

Das Magnetfeld der Erde fängt auf ähnliche Weise elektrisch geladene Teilchen ein. Abb. 4.109 zeigt schematisch die Regionen, in denen Teilchen eingefangen werden.

Diese Bewegung von geladenen Teilchen ist u.a. für die Strahlungsgürtel (van Allen Gürtel) um

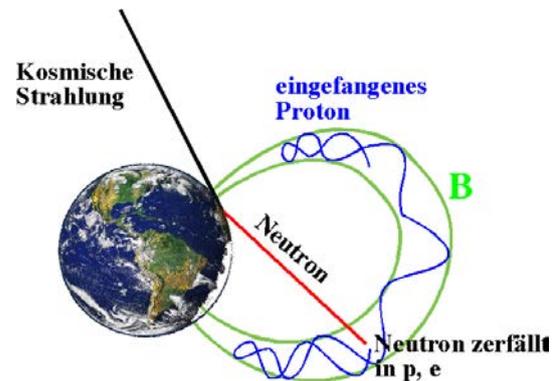


Abbildung 4.110: Einfangen der Teilchen.

die Erde verantwortlich. Allerdings können geladene Teilchen ebensowenig in diesen Bereich eindringen wie sie ihn verlassen können. Die hier gefangenen Teilchen wurden stattdessen zu einem wesentlichen Teil in der Magnetosphäre erzeugt. Wie in Abb. 4.110 gezeigt, schlagen kosmische Strahlen aus der Erdatmosphäre Neutronen heraus, welche als ungeladene Teilchen vom Magnetfeld der Erde nicht beeinflusst werden. Sie haben jedoch eine endliche Lebensdauer und zerfallen z.T. im Magnetfeld in Protonen. Diese werden vom Magnetfeld eingefangen.

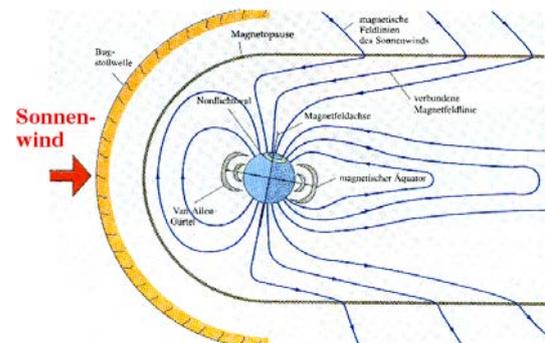


Abbildung 4.111: Verformung des Erdmagnetfeldes im Sonnenwind.

Das Magnetfeld der Erde wird verzerrt durch den Sonnenwind. Abb. 4.111 zeigt den Effekt. Dieser kommt dadurch zustande, dass die geladenen Teilchen im Magnetfeld durch die Lorentzkraft in unterschiedliche Richtungen abgelenkt werden. Dadurch fließt netto ein Strom senkrecht zum äußeren Magnetfeld. Dieser Strom erzeugt ein

zusätzliches Magnetfeld, welches sich dem vorhandenen überlagert. Das Resultat entspricht einer Kraft auf die Feldlinien: sie werden in der Richtung der bewegten Ladungen gedrückt. Das Magnetfeld der Erde ist deshalb stark asymmetrisch: Auf der Seite der Sonne fällt es nach ca. 10 Erdradien auf die Stärke des Magnetfeldes der Sonne ab; auf der sonnenabgewandten Seite reicht es bis auf ca. 1000 Erdradien hinaus.

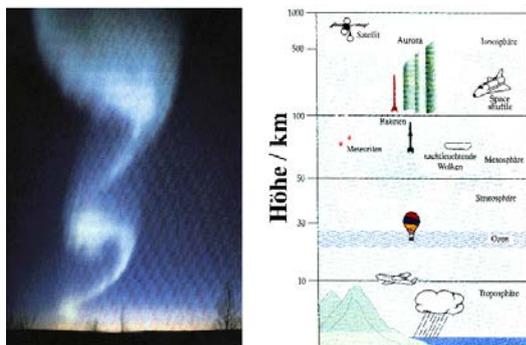


Abbildung 4.112: Polarlicht (Aurora Borealis).

Die geladenen Teilchen des Sonnenwindes werden vom Magnetfeld der Erde abgelenkt, aber nicht eingefangen. Wenn sie in die Erdatmosphäre eindringen, ionisieren sie die Luftmoleküle und regen sie zum Leuchten an, wie in Abb. 4.112 gezeigt. Das kann als Nordlicht beobachtet werden. Die Leuchterscheinungen finden in der Ionosphäre, in Höhen von mehreren hundert Kilometern statt, da die Teilchen nicht bis in niedrigere Bereiche der Atmosphäre gelangen.

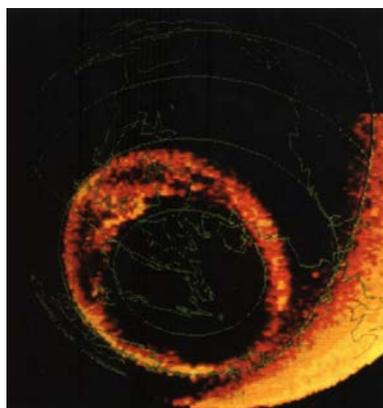


Abbildung 4.113: Polarlicht aus dem Weltraum.

Die Satellitenaufnahme in Abb. 4.113 zeigt, dass Nordlichter vor allem in der Nähe der magnetischen Pole stattfinden, wo die Magnetfeldlinien des Erdmagnetfeldes in die Erdatmosphäre eindringen.

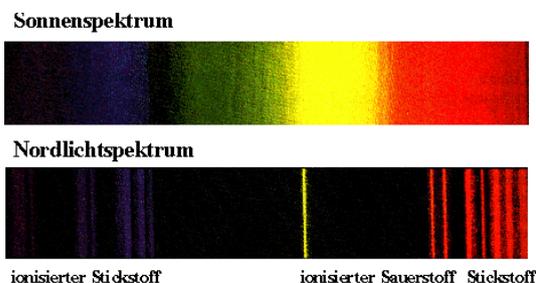


Abbildung 4.114: Spektren aus dem Nordlicht.

Wie das Licht zustande kommt lässt sich u. A. an seinem Spektrum ablesen: im Gegensatz zum Sonnenlicht, welches ein kontinuierliches Spektrum aufweist (d.h. sämtliche Wellenlängen sind vorhanden), besitzt das Nordlicht ein diskretes Linienspektrum, wie in Abb. 4.114 gezeigt. Die beobachteten Linien kommen dadurch zustande, dass die hochenergetischen Teilchen beim Eintreten in die Erdatmosphäre durch Stöße Luftmoleküle ionisieren. Wenn diese aus ihren hoch angeregten Zuständen in niedriger angeregte zurückfallen senden sie Licht von wohl definierter Wellenlänge aus.

4.6.5 Gekreuzte E- und B-Felder

Die Lorentzkraft ist genau so wie die Coulomb-Wechselwirkung proportional zur Ladung. Die Lorentzkraft ist zusätzlich aber auch proportional zur Geschwindigkeit, d.h. sie verschwindet, wenn die Ladung ruht. Man kann diesen Unterschied dazu verwenden, ein Geschwindigkeitsfilter für geladene Teilchen zu konstruieren.

Abb. 4.115 zeigt das Prinzip: Man verwendet dazu ein elektrisches und ein magnetisches Feld im rechten Winkel zueinander. Eine Ladung q , welche sich durch diese beiden Felder bewegt, erfährt die Kraft

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

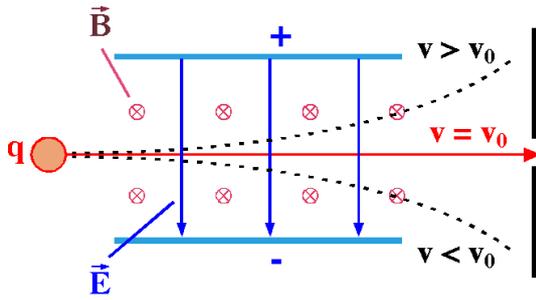


Abbildung 4.115: Gekreuzte Felder als Geschwindigkeitsfilter.



Abbildung 4.116: Zyklotron.

Diese verschwindet wenn die beiden Vektoren \vec{E} und $\vec{v} \times \vec{B}$ in entgegengesetzte Richtungen zeigen und

$$v = \frac{|E|}{|B|}.$$

Teilchen, für die diese Bedingung erfüllt ist, treffen durch die Blende am Ende des Apparates, während langsamere oder schnellere Teilchen nach unten oder oben abgelenkt werden.

Die elektrische und die magnetische Kraft sind beide proportional zur Ladung q , aber die Lorentzkraft ist außerdem proportional zur Geschwindigkeit v . Bei geringen Geschwindigkeiten ist deshalb die Coulomb-Kraft meistens wichtiger. Bei hohen Geschwindigkeiten, d.h. $v \approx c$ ändert sich dies jedoch. Ein Magnetfeld von 1 T erzeugt dann die gleiche Kraft wie ein elektrisches Feld

$$E = cB = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Dieser Wert ist deutlich höher als die üblichen Labor-Werte.

4.6.6 Zyklotron

Mit Hilfe einer Kombination von elektrischen und magnetischen Feldern können elektrische Teilchen auf räumlich begrenztem Raum auf hohe Geschwindigkeiten beschleunigt werden. Ein relativ weit verbreitetes Gerät ist das Zyklotron.

Im Zyklotron (\rightarrow Abb. 4.116) werden Protonen durch ein homogenes Magnetfeld auf

Kreisbahnen gezwungen. Zur Beschleunigung wird zwischen den beiden halbkreisförmigen (D-förmigen) Elektroden ein elektrisches Wechselfeld angelegt. Dieses wird synchron mit den umlaufenden Ionen umgepolt, typischerweise mit 10-30 MHz. Dadurch erfahren die positiven Ionen im Spalt zwischen den beiden Elektroden immer ein Feld in Vorwärtsrichtung und werden so beschleunigt. Im Bereich der Elektroden ist das Gebiet frei von elektrischen Feldern, sie werden lediglich durch das senkrecht zu den Platten angelegte magnetische Feld auf Kreisbahnen geführt.

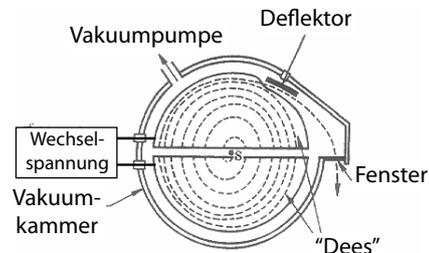


Abbildung 4.117: Bewegung der Ionen im Zyklotron.

Abb. 4.117 zeigt die Bahnen von geladene Teilchen im Magnetfeld. Bei konstanter Energie sind die entsprechenden Bahnen Kreisbahnen, wie in Kapitel 4.6.3 gezeigt. Deren Radius ist bestimmt durch das Gleichgewicht aus Lorentzkraft und Zentrifugalkraft:

$$evB = m \frac{v^2}{r}.$$

Daraus ergibt sich der Radius der Kreisbahn

$$r = \frac{mv}{eB}$$

und die Geschwindigkeit

$$v = \frac{eBr}{m}.$$

Der Radius ist somit proportional zur Geschwindigkeit und indirekt proportional zur Stärke des Magnetfeldes. Beim Beschleunigungsprozess wird den Elektronen durch Hochfrequenzfelder Energie zugeführt, sie werden also beschleunigt. Aufgrund der zunehmenden Geschwindigkeit wird der Bahnradius größer. Da der Radius proportional ist zur Geschwindigkeit, bleibt die Umlaufzeit konstant,

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{m}{eB}.$$

Somit ist die benötigte Hochfrequenz für alle Teilchen die gleiche, unabhängig von ihrer Geschwindigkeit, respektive ihrem Radius.

Die Energie der Ionen ist

$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{mv^2}{2} = \frac{(eBr)^2}{2m}.$$

Die maximale Energie wird erreicht, wenn die Teilchen den maximalen Radius erreichen. Dieser ist durch die Grenzen des Vakuumgefäßes oder des Magnetfeldes gegeben. Mit solchen Geräten können Energien von bis zu 25 MeV erreicht werden.

4.6.7 Hall Effekt

Während wir bisher nur die Bewegung geladener Teilchen im Vakuum diskutiert haben findet man die gleichen Prozesse auch in Materie. So kann die Kompensation von gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern in Halbleitern beobachtet werden. Er wird dort als Hall-Effekt bezeichnet.

Fließt ein Strom in einem dünnen Plättchen der Dicke ℓ , und ist ein Magnetfeld senkrecht dazu angelegt, so erfahren die Ladungsträger eine Lorentzkraft, welche sie in der Geometrie von

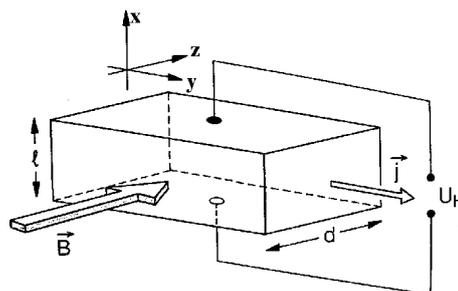


Abbildung 4.118: Hall Effekt: Strom im Magnetfeld.

Abb. 4.118 nach oben oder unten ablenkt. Abb. 4.118 zeigt die entsprechende Mess-Anordnung. Die Lorentzkraft wird dann kompensiert, wenn sich durch die abgelenkten Ladungsträger ein elektrisches Feld senkrecht zur Flussrichtung aufgebaut hat.

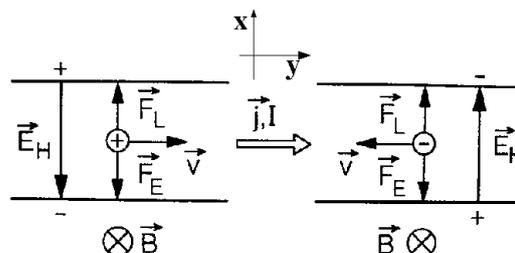


Abbildung 4.119: Kräfte beim Hall Effekt.

Abb. 4.119 zeigt den Fall, dass sich die Kräfte gerade kompensieren - einmal für positive Ladungen, einmal für negative. Handelt es sich bei den Ladungsträgern um Elektronen, so ist die Bewegungsrichtung der Ladungsträger entgegen der Stromrichtung. Dann kompensiert das Feld die Lorentzkraft wenn

$$eE_x = \frac{eU_x}{\ell} = -ev_y B_z.$$

Diese resultierende Spannung

$$U_x = -\ell v_y B_z$$

wird als Hall-Spannung bezeichnet.

Die Driftgeschwindigkeit v_y der Ladungsträger kann über die Stromdichte j und Ladungsträgerdichte n bestimmt werden:

$$j = \frac{I}{\ell d} = nqv_y.$$

Aufgelöst nach der Driftgeschwindigkeit finden wir

$$v_y = \frac{j}{nq} = \frac{I}{\ell dnq}.$$

Damit erhalten wir für die Hall Spannung

$$U_H = U_x = -\frac{\ell j B_z}{nq} = -\frac{I B_z}{nq d}.$$

Die Messung der Hall Spannung kann deshalb zur Messung der magnetischen Flussdichte B_z (bei bekannter Ladungsträgerdichte) oder zur Messung der Ladungsträgerdichte n (bei bekannter Flussdichte) verwendet werden.

Die Hall Spannung ist indirekt proportional zur Dichte der Ladungsträger. Der Grund ist, dass bei geringerer Ladungsträgerdichte die Geschwindigkeit der Ladungsträger bei gegebenem Strom größer ist und somit die Lorentzkraft stärker wirkt. Deshalb macht sich der Halleffekt bei Halbleitern, wo die Ladungsträgerdichte gering ist, stärker bemerkbar als bei Metallen mit hoher Ladungsträgerdichte.

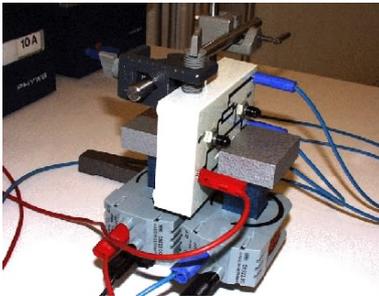


Abbildung 4.120: Messung des Hall Effektes.

Abb. 4.120 zeigt ein entsprechendes Experiment. Hier wird ein Wismut Plättchen mit einer Breite von $d = 2 \text{ mm}$ verwendet. Die Ladungsträgerdichte ne von Wismut beträgt $2 \cdot 10^6 \text{ C m}^{-3}$. Bei einem Strom von 4 A und einem Feld von $B = 35 \text{ mT}$ erhält man eine Hall Spannung von

$$U_H = \frac{4 \text{ A } 35 \cdot 10^{-3} \text{ T}}{2 \cdot 10^6 \text{ C m}^{-3} 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 35 \mu \text{ V}.$$

Wismut ist für Hall-Experimente wegen der geringen Ladungsträgerdichte besonders geeignet. Für Kupfer findet man im Experiment eine Hall-Konstante (Materialkonstante)

$$K_H = \frac{1}{nq} = -0.55 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}.$$

Das Vorzeichen besagt dass die Ladungsträger negativ (d.h. Elektronen) sind. Mit $q = -e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ findet man für die Dichte der Ladungsträger

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{K_H e} = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C } 0,55 \cdot 10^{10} \text{ m}^3 / \text{C}} \\ &= 11,3 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}. \end{aligned}$$

Diesen Wert kann man vergleichen mit der Dichte der Atome in Kupfer:

$$\begin{aligned} n_{Cu} &= \frac{N_A \rho}{M} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} 8,91 \cdot 10^6}{63,55} \text{ m}^{-3} \\ &= 8,46 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}. \end{aligned}$$

Offenbar tragen pro Cu-Atom 1,3 Elektronen zur elektrischen Leitung bei. Man kann dies verallgemeinern: In metallischen Leitern ist das Verhältnis der Leitungselektronen zu Atomen von der Größenordnung eins.

Aus dem Vorzeichen der Hall Konstanten kann man auch die Art der Ladungsträger bestimmen. In den meisten Metallen sind die Ladungsträger negativ geladen, d.h. es handelt sich um Elektronen.

4.6.8 Stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld

Befinden sich die bewegten Ladungen in einem Leiter, so wirkt eine entsprechende Kraft auf den Leiter. Die Summe der Lorentz-Kräfte auf alle $N = nV$ bewegliche Ladungen im Volumen V beträgt

$$\vec{F}_L = V n q (\vec{v} \times \vec{B}) = V (\vec{j} \times \vec{B}).$$

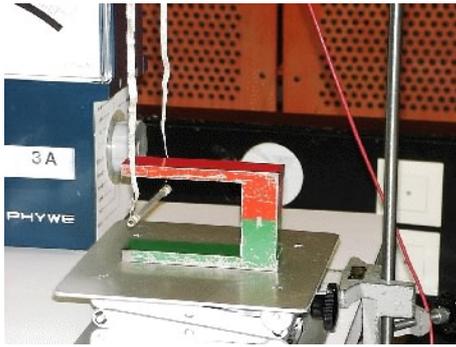


Abbildung 4.121: Leiterschaukel im Magnetfeld.

Hier wurde die Stromdichte

$$j = \frac{I}{A} = nqv$$

verwendet, wobei angenommen wurde, dass sie über das betrachtete Volumen konstant sei. Dies ist für infinitesimale Volumenelemente erfüllt; es ist deshalb sinnvoll, die Kraft auf das entsprechende Volumenelement zu beziehen:

$$\frac{\vec{F}_L}{\Delta V} = (\vec{j} \times \vec{B}).$$

Offenbar ergibt das Vektorprodukt von Stromdichte und Flussdichte die Kraftdichte. Diese Gleichung enthält keine Proportionalitätskonstante; dies ist kein Zufall: Die Flussdichte B wurde so definiert, dass in dieser Gleichung die Proportionalitätskonstante = 1 wird.

Genau wie die Ladungen wird der stromdurchflossene Leiter senkrecht aus dem Magnetfeld hinaus gedrückt. Die Kraft beträgt für ein infinitesimales Leiterstück $d\ell$

$$d\vec{F} = I(d\vec{\ell} \times \vec{B}).$$

Man verifiziert im qualitativen Vorlesungsexperiment dass sowohl eine Umkehrung der Stromrichtung wie auch eine Umkehrung der Richtung des Magnetfeldes eine Umkehr der Kraftwirkung ergeben.

Den gleichen Effekt kann man auch über das Magnetfeld erklären: Der stromdurchflossene Leiter erzeugt ein kreisförmiges Magnetfeld, welches dem äußeren Magnetfeld überlagert wird.

Das gesamte Magnetfeld ist auf einer Seite des Leiters schwächer als auf der anderen Seite. Da Magnetfeldlinien sich gegenseitig abstoßen, resultiert dies in einer Kraft auf den Leiter, welche so wirkt, dass die Feldstärke ausgeglichen wird.

4.6.9 Parallele stromdurchflossene Leiter

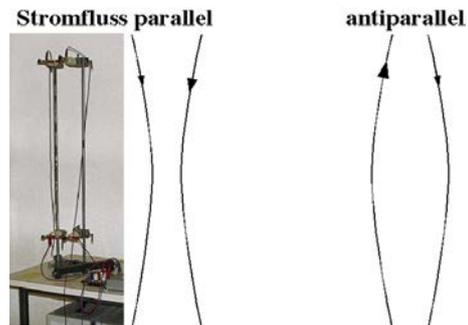


Abbildung 4.122: Parallele stromdurchflossene Leiter.

Analog wirkt eine Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern. Man kann dies verstehen, indem man die Kraft, die auf den Leiter 2 wirkt, beschreibt als Resultat des Stromflusses im Magnetfeld des Leiters 1 (und umgekehrt): Der eine Leiter erzeugt ein Magnetfeld

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi r} \rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}.$$

Der stromdurchflossene zweite Leiter der Länge ℓ erfährt damit eine Kraft

$$\vec{F}_2 = I_2 \vec{\ell} \times \vec{B}.$$

Die Richtung der Kraft ist offenbar senkrecht zum Leiter und senkrecht zum Feld. Das Feld ist wiederum senkrecht zur Ebene, in der sich die beiden Leiter befinden. Damit wirkt die Kraft in der Ebene der Leiter. Der Betrag ist

$$|F| = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi r} I_1 I_2.$$

Da die Kraft auf beide Leiter gleich wirkt, wurde hier der Index 2 weggelassen. Der numerische Wert wird mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ und

$I_1 = I_2 = 1\text{A}, \ell = r = 1\text{m}, |F| = 2 \cdot 10^{-7}\text{ N}$.
Dieser Wert ist exakt, ohne Rundung, weil die
Stromstärke im SI-System so definiert ist:

1 Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen Stroms, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorruft.

Für praktische Realisierungen werden allerdings etwas andere Geometrien verwendet. Die Richtung der Kraft ist anziehend, sofern die beiden Ströme parallel fließen, abstoßend wenn sie in entgegengesetzte Richtungen fließen.

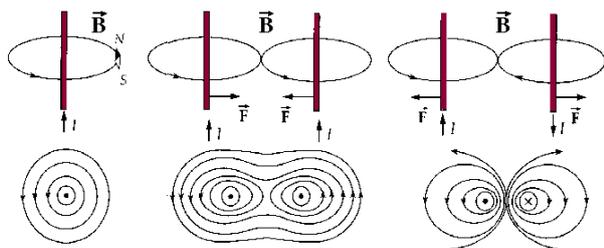


Abbildung 4.123: Feldlinien von 2 parallelen Strömen.

Man kann den Effekt auch auf eine etwas symmetrischere Weise herleiten, indem man die Überlagerung der Feldlinien betrachtet, wie in Abb. 4.123 gezeigt. Fließen die beiden Ströme parallel, so kommt es zwischen den beiden Leitern zu einer Reduktion der Feldstärke und damit zu einer anziehenden Kraft. Fließen die beiden Ströme in entgegengesetzter Richtung, so verstärken sich die Felder zwischen den Leitern und die Abstoßung der Feldlinien führt zu einer Abstoßung der Leiter.

4.6.10 Drehmoment auf Leiterschleife

Wir verwenden diese Resultate, um das Drehmoment zu berechnen, welches auf eine stromdurchflossene Leiterschleife in einem Magnetfeld

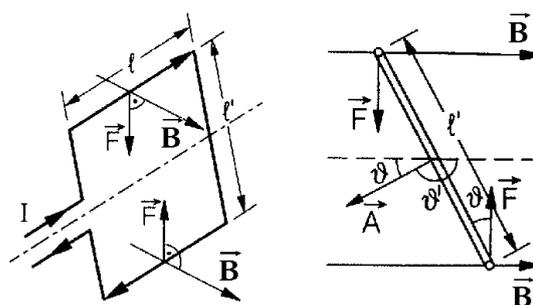


Abbildung 4.124: Kräfte auf Leiterschleife im Magneten.

wirkt. Abb. 4.124 zeigt die entsprechende Anordnung. Die Leiterschleife sei um eine Achse (in der Figur gestrichelt gezeichnet) drehbar gelagert. Wir brauchen hier nur die beiden parallelen Teilstücke der Länge ℓ zu betrachten. Sie liegen senkrecht zu den Magnetfeldlinien, so dass der Betrag der Kraft durch

$$F = I \ell B$$

gegeben ist. Zusammen bilden sie ein Kräftepaar und erzeugen ein Drehmoment

$$M = F \ell' \sin \theta' = I \ell \ell' B \sin \theta' = I A B \sin \theta',$$

also proportional zum Produkt aus Strom, stromumflossener Fläche A und Flussdichte B . Das Drehmoment wird maximal wenn die Flächennormale zur Schleife senkrecht zu den Feldlinien liegt, also bei $\theta' = \pm \pi/2$.

Man kann dieses Resultat auch sehr kompakt schreiben als

$$\vec{M} = I \vec{A} \times \vec{B},$$

wobei \vec{A} wie üblich senkrecht auf der Fläche A steht und sein Betrag gleich der Fläche ist. Dieses Resultat gilt allgemein, nicht nur für rechteckige Stromschleifen. In Analogie zum entsprechenden Resultat der Elektrostatik kann man ein magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu}$ definieren

$$\vec{\mu} = I \vec{A}$$

und erhält $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ - genau wie zu Beginn des Kapitels für elementare magnetische Dipole diskutiert.

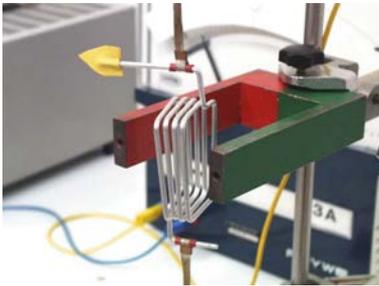


Abbildung 4.125: Demonstration des Drehmoments.

Man kann diesen Effekt leicht verifizieren, indem man eine stromdurchflossene Spule in das Magnetfeld eines Permanentmagneten bringt. Abb. 4.125 zeigt das entsprechende Experiment.

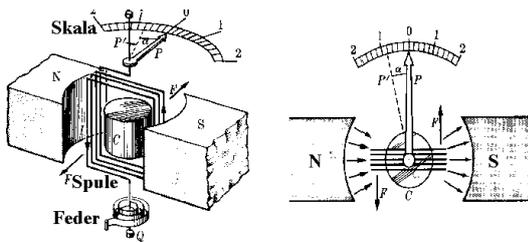


Abbildung 4.126: Schematischer Aufbau eines Drehspulinstruments.

Dieses Prinzip kann z.B. für die Messung eines Stroms verwendet werden. Wie in Abb. 4.126 gezeigt, lässt man ihn durch eine Leiterschleife fließen, welche sich in einem Magnetfeld befindet. Die beiden Teilstücke, welche senkrecht zu den Feldlinien laufen, erzeugen ein Drehmoment, welches über einen Zeiger nachgewiesen wird.

4.6.11 Elektromotoren

Das Drehmoment, welches eine stromdurchflossene Spule in einem Magnetfeld erfährt, bildet auch die Basis für Elektromotoren. Wie in Abb. 4.127 gezeigt, verwendet man einen statischen Magneten (Stator) und stromdurchflossene Leiter, welche einen magnetischen Dipol erzeugen, der sich im Magnetfeld des Stators ausrichtet.

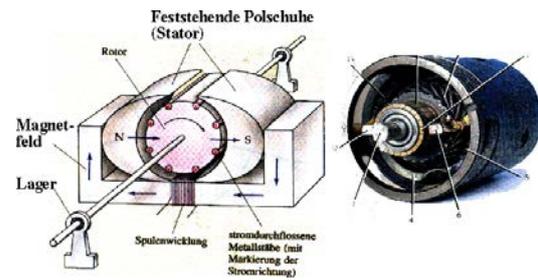


Abbildung 4.127: Aufbau eines Elektromotors.

Da man in diesem Fall im Allgemeinen eine kontinuierliche Rotation erhalten möchte, muss der Stromfluss entsprechend angepasst werden. Indem man diesen Dipol in eine andere Richtung dreht erreicht man eine Drehung des Rotors. Dazu müssen die Ströme im richtigen Moment auf andere Leitersätze übertragen werden. Dies leisten die sogenannten Bürsten oder Schleifkontakte.

4.6.12 Elektromagnetische Bezugssysteme

Die elektrischen und magnetischen Felder sind eng miteinander verknüpft; bei einem Wechsel des Bezugssystems gehen die einen (teilweise) in die andern über.

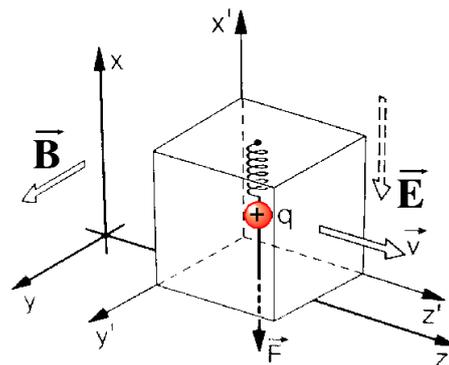


Abbildung 4.128: Kraft auf bewegte Ladung.

Abb. 4.128 zeigt eine Box, in der eine Ladung an einem Kraftmesser aufgehängt ist. Wird diese Box durch ein horizontales ($\parallel y$) Magnetfeld

bewegt wirkt eine Lorentzkraft

$$\vec{F}_1 = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

nach unten. Für einen Beobachter, der sich mit der Box mitbewegt, wird $v = 0$, und die Lorentzkraft verschwindet. Er sieht aber trotzdem die Auslenkung. Offenbar existiert in seinem Bezugssystem ein elektrisches Feld, welches eine Kraft

$$\vec{F}_2 = q\vec{E}$$

bewirkt. Offenbar entsteht durch den Übergang ins bewegte Bezugssystem ein zusätzliches Feld

$$\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}.$$

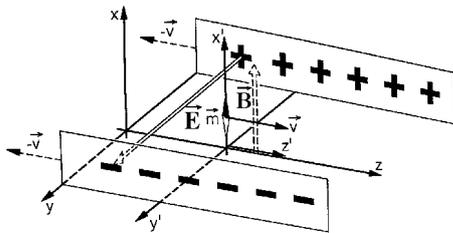


Abbildung 4.129: Felder in einem bewegten Bezugssystem.

Ein analoges Gedankenexperiment kann man für magnetische Wechselwirkungen durchführen. In Abb. 4.129 bewegt sich eine Magnetnadel zwischen zwei geladenen Platten. Ein Beobachter, der sich mit der Nadel mitbewegt, sieht auf beiden Seiten eine Flächenstromdichte, welche ein Magnetfeld erzeugt. Die Stärke dieses Magnetfeldes beträgt (ohne Herleitung)

$$B' = -\epsilon_0\mu_0(\vec{v} \times \vec{E}),$$

wobei \vec{E} das Feld ist, welches im Ruhesystem durch die Ladungsverteilung erzeugt wird.

Beide Felder - das elektrische wie das magnetische - sind jeweils senkrecht zur Bewegungsrichtung und senkrecht zum ursprünglichen Feld orientiert. Die Feldkomponenten entlang der Bewegungsrichtung werden jeweils nicht betroffen.

Die hier diskutierten Beziehungen müssen modifiziert werden wenn die Geschwindigkeit sich der Lichtgeschwindigkeit c nähert. Sie lauten dann für eine Bewegung in x -Richtung mit Geschwindigkeit $v_x = \beta c$:

$E'_x = E_x$	$H'_x = H_x$
$E'_y = \gamma(E_y - v_x B_z)$	$H'_y = \gamma(H_y + v_x D_z)$
$E'_z = \gamma(E_z + v_x B_y)$	$H'_z = \gamma(H_z - v_x D_y)$

Die Größe

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ist ~ 1 so lange die Geschwindigkeit klein ist im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit. Wie in der Relativitätstheorie gezeigt wird kann die Geschwindigkeit nicht größer als c werden. Wenn $v \rightarrow c$ geht, wird γ sehr groß. Diese Transformation der Feldgleichungen kann auch verwendet werden, um z.B. das Biot-Savart'sche Gesetz aus dem Coulomb-Gesetz herzuleiten.

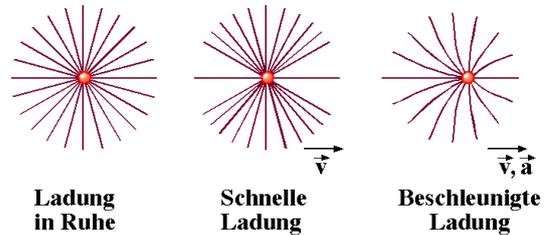


Abbildung 4.130: Feldlinien von relativistisch bewegten Ladungen.

Die Feldlinien sehen dementsprechend anders aus: für sehr schnelle Teilchen sind die Feldlinien in einer Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung konzentriert, wie in Abb. 4.130 gezeigt. Bei beschleunigten Ladungen werden sie außerdem gekrümmt.

Dies ist auch der Grund dafür dass die Strahlung bei relativistischen Teilchen grösstenteils in Vorwärtsrichtung abgestrahlt wird. Abb. 4.131 zeigt den Strahlungskegel für eine Ladung, welche sich mit 90 % der Lichtgeschwindigkeit bewegt. Ein Beispiel dafür solche relativistischen Teilchen sind Elektronen in einem Speicherring (wie z.B. DELTA).

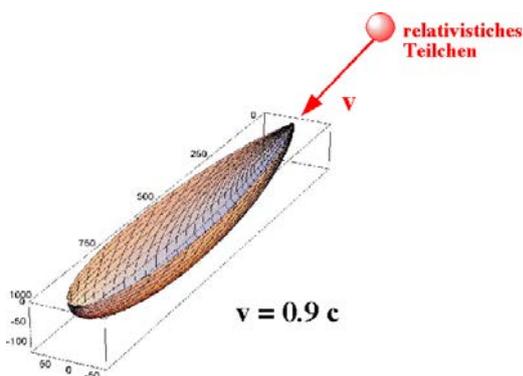


Abbildung 4.131: Relativistische Verengung des Strahlungskegels in Vorwärtsrichtung.

4.7 Materie im Magnetfeld

4.7.1 Magnetische Dipole

Ein Stahldraht kann magnetisiert werden indem man ihn in ein Magnetfeld bringt. Der Draht enthält anschließend einen Nord- und einen Südpol, wie man anhand der Wechselwirkung mit einer Kompassnadel nachweisen kann.

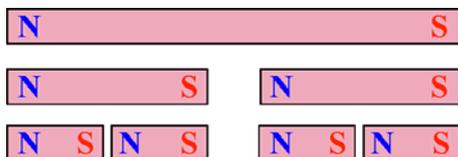


Abbildung 4.132: Dipole in einem magnetisierten Draht.

Dass es sich hier um mikroskopische Dipole handelt, und nicht um jeweils einen magnetischen Monopol am Ende des Drahtes, sieht man daran, dass man beim Teilen des Drahtes in zwei Teile die Teile nicht eine "Ladung" enthalten, sondern selber wieder als Dipole wirken, wie in Abb. 4.132 gezeigt.

Die Aufteilung in immer kleinere Dipole funktioniert geht weiter bis auf die atomare Ebene. Wie bei der Diskussion der stromdurchflossenen Leiterschleife gezeigt, erzeugen elektrische Kreisströme magnetische Dipolmomente

$$\vec{\mu} = IA\vec{n} \quad [\mu] = \text{Am}^2,$$

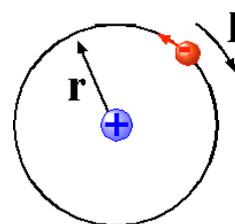


Abbildung 4.133: Elementarer Dipol = Kreisstrom.

wobei I den Strom, A die Fläche und \vec{n} den Normalenvektor auf die Fläche darstellt. Solche Dipole existieren auch in mikroskopischer Form in unterschiedlichen Materialien. Als ein einfaches Modell berechnen wir das magnetische Moment eines Elektrons, welches wie in Abb. 4.133 gezeigt um einen Atomkern kreist. In einem klassischen Modell beschreiben wir den Kreisstrom durch ein einzelnes Elektron. Dieses erzeugt einen Strom

$$|I| = e \frac{\omega}{2\pi}.$$

Damit wird das magnetische Moment

$$\mu = I\pi r^2 = \frac{r^2 e \omega}{2}.$$

In der Quantenmechanik wird gezeigt, dass der Drehimpuls von Elektronen in Atomen nur Werte annehmen kann, die einem Vielfachen der Planck'schen Konstanten

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05459 \cdot 10^{-34} \text{Js}$$

besitzen; im klassischen Modell entspricht dies

$$\hbar = m_e r^2 \omega.$$

Damit wird das magnetische Moment dieses atomaren Kreisstroms

$$\begin{aligned} \mu_B &= \frac{e\hbar}{2m_e} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{C} \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \text{Js}}{2,9 \cdot 10^{-31} \text{kg}} \\ &= 9,27 \cdot 10^{-24} \text{Am}^2. \end{aligned}$$

Dieses elementare magnetische Moment wird als Bohr'sches Magneton bezeichnet. Es stellt die Einheit für mikroskopische magnetische Momente dar. In realen Systemen ergeben sich Korrekturen, die aber von der Größenordnung von eins sind.

4.7.2 Magnetisierung

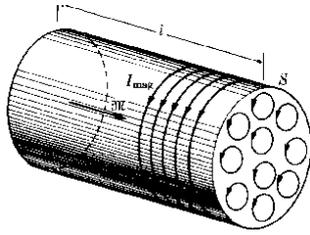


Abbildung 4.134: Induzierte Kreisströme.

Analog zum elektrischen Feld wird auch bei magnetischen Feldern im Material eine magnetische Polarisation induziert, wie in Abb. 4.134 gezeigt.

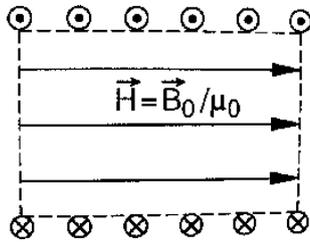


Abbildung 4.135: Spule erzeugt Magnetfeld.

Wir betrachten zunächst die Anordnung von Abb. 4.135 : eine gewöhnliche Spule mit Magnetfeld H im Inneren.

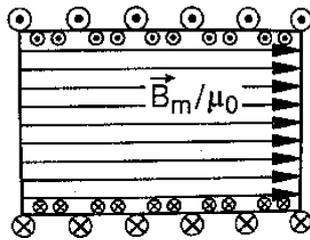


Abbildung 4.136: Spule mit magnetisierbarem Material.

Bringt man ein magnetisches Material in diese Spule so stellt man fest, dass die magnetische Flussdichte B bei gleichem Strom zunimmt, wie in Abb. 4.136 gezeigt.

Die Zunahme der Flussdichte B kann man mit einer Hall-Sonde messen wenn der Eisenkern hineingeschoben wird. Man kann sich dies so vorstellen, dass im magnetischen Stab Ringströme flie-

ßen, welche ein zusätzliches Feld erzeugen, das parallel zum externen Feld μH liegt.

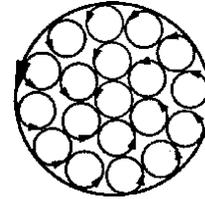


Abbildung 4.137: Ringströme im Querschnitt.

Wie in Abb. 4.137 gezeigt, kann man sich diese zusätzlichen Ringströme entweder als an der Oberfläche liegend (wie die Oberflächenladungen bei Dielektrika) vorstellen, oder als kleine Ringströme im gesamten Volumen des Stabes. Die gesamte magnetische Flussdichte im Material ist

$$B_m = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 H_0 = B_0 + \mu_0 J,$$

wobei sich H_0 und B_0 auf die Situation ohne Material, d.h. auf die leere Spule beziehen. μ_r ist die relative Permeabilität des Mediums.

In der letzten Gleichung stellt der Term $\mu_0 J$ den Beitrag des Materials zum gesamten Feld dar. J wird als magnetische Polarisation bezeichnet, und ist durch die Stärke, Dichte und Ausrichtung der mikroskopischen Dipole gegeben. Sie ist häufig proportional zum äußeren Feld,

$$\vec{J} = (\mu_r - 1)\vec{H}_0 = \chi_m \vec{H}_0.$$

Die Proportionalitätskonstante χ_m wird als magnetische Suszeptibilität bezeichnet. Sie kann wahlweise anstelle der Permeabilität μ_r verwendet werden.

Permeabilität und magnetische Suszeptibilität können gemessen werden, indem man die Änderung der Induktivität einer Spule beim Einführen des entsprechenden Materials misst - in enger Analogie zum Dielektrikum im Plattenkondensator.

4.7.3 Klassifikation magnetischen Verhaltens

Man unterscheidet drei Arten von magnetischen Materialien, welche sich durch die Werte von χ_m unterscheiden:

- in diamagnetischen Materialien ist die magnetische Polarisation klein und entgegen dem äußeren Feld ausgerichtet, $\chi_m < 0$.
- in paramagnetischen Materialien ist die magnetische Polarisation klein und parallel zum äußeren Feld ausgerichtet, $\chi_m > 0$.
- in ferromagnetischen Materialien ist die magnetische Polarisation groß und parallel zum äußeren Feld ausgerichtet, $\chi_m \gg 0$. Häufig ist sie aber nicht mehr proportional zum äußeren Feld.

Ist die Suszeptibilität negativ, so ist die induzierte Magnetisierung dem äußeren Magnetfeld entgegen-gerichtet. Die Energie des so induzierten magnetischen Dipols ist damit positiv und proportional zur Stärke des Magnetfeldes. Auf ein diamagnetisches Material wirkt deshalb eine Kraft in Richtung des schwächeren Feldes.

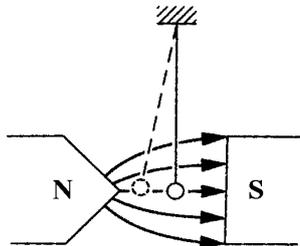


Abbildung 4.138: Kraft in einem inhomogenen Magnetfeld.

Diesen Fall erhält man z.B. wenn man eine Glaskugel in ein inhomogenes magnetisches Feld bringt, wie in Abb. 4.138 gezeigt. Dabei spielt es keine Rolle welches der Nord- und welches der Südpol ist, die Glaskugel wird immer in Richtung des schwächeren Feldes bewegt. Im Gegensatz dazu ist die Magnetisierung in einem paramagnetischen Material parallel zum äußeren Feld orientiert. Es kann seine Energie somit erniedrigen indem es sich in Richtung des stärkeren

Feldes bewegt. Diesen Fall kann man mit einer Aluminiumkugel nachvollziehen.

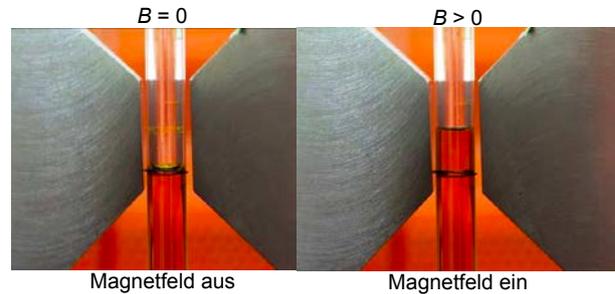


Abbildung 4.139: Eine rote paramagnetische Flüssigkeit wird in ein Magnetfeld hinein gezogen.

Magnetische Eigenschaften findet man nicht nur in Festkörpern; auch Flüssigkeiten sind paramagnetisch wenn sie entsprechende Ionen enthalten. Abb. 4.139 zeigt als Beispiel eine Lösung von FeCl_3 , welche paramagnetische Eisenionen enthält. Auch in diesem Fall kann das Material Energie gewinnen indem es sich in das Gebiet mit höherer Energie bewegt, also im Rohr hochsteigt.

Stoffmagnetismus	Diamagnetismus	Paramagnetismus	Ferromagnetismus	Antiferromagnetismus	Ferri-magnetismus
Ursachen	abgeschlossene Elektronenschalen	unaufgefüllte innere Elektronenschalen	unaufgefüllte innere Elektronenschalen	unaufgefüllte innere Elektronenschalen; sehr kleine Atomabstände; NaCl-Struktur	unaufgefüllte innere Elektronenschalen; Spinellstruktur (MgO, Al ₂ O ₃)
Wirkungen (magnetische Momente)	jeder Stoff: Kompensation der Spinnmomente; nur bei äußerem Feld vorhanden	regellose Verteilung	parallele Spinausrichtung in Wolffschen Böden	zwei ferromagnetische Untergitter gleicher Spinnmomente	zwei ferromagnetische Untergitter mit ungleichen Spinnmomenten
Temperaturabhängigkeit des Kurvenwerts der magnetischen Suszeptibilität	keine	$\frac{1}{\chi_m}$ vs T (Curiesches Gesetz: $\chi_m = \frac{C}{T}$)	$\frac{1}{\chi_m}$ vs T (Curie-Weissesches Gesetz: $\chi_m = \frac{C}{T - T_c}$)	$\frac{1}{\chi_m}$ vs T (Curie-Weissesches Gesetz: $\chi_m = \frac{C}{T - T_c}$)	$\frac{1}{\chi_m}$ vs T (Curie-Weissesches Gesetz: $\chi_m = \frac{C}{T - T_c}$)
magnetische Suszeptibilität	$-1 < \chi_m < 0$	$10^{-4} < \chi_m < 10^{-3}$	$10^1 < \chi_m < 10^4$		
Werkstoffe	Ag, Au, Bi, Cu, H ₂ , N ₂	Sr, Hf, W, Al, O ₂	Co, Fe, Gd, Ni	FeO, NiO, CoO, CrF ₂ , FeF ₂ , CoF ₂	MnO, Fe ₃ O ₄ , (Mn, Fe, Ni, Co) Flimite

Abbildung 4.140: Übersicht über magnetische Materialeigenschaften.

4.7.4 Mikroskopisches Modell

Das magnetische Verhalten unterschiedlicher Materialien kann auf mikroskopische Eigenschaften zurückgeführt werden. Die wichtigsten Bei-

träge stammen von den magnetischen Momenten der Elektronen, wobei unterschieden werden kann zwischen deren Bahnmoment \vec{m}_{Bahn} und Spin-Moment \vec{m}_{Spin} , welcher der Eigenrotation der Elektronen entspricht.

Der Diamagnetismus existiert in allen Körpern; er kann jedoch durch andere Effekte überdeckt werden. In diamagnetischen Materialien sind die Elektronen jeweils in Paaren vorhanden, deren magnetische Spin-Momente entgegengesetzt ausgerichtet sind. Dadurch tragen diese nicht zum Magnetismus bei. Hingegen erzeugt das äußere Magnetfeld eine Präzession der Elektronenhülle. Der daraus resultierende Kreisstrom erzeugt eine magnetische Polarisierung in entgegengesetzter Richtung. Typische Werte der magnetischen Suszeptibilität in diamagnetischen Materialien sind

Cu	$-9.6 \cdot 10^{-6}$		
Ag	$-25.2 \cdot 10^{-6}$		
Sb	$-70.9 \cdot 10^{-6}$	Al	$+20.85 \cdot 10^{-6}$
Bi	$-156.0 \cdot 10^{-6}$	Pt	$+257.4 \cdot 10^{-6}$
NaCl	$-13.9 \cdot 10^{-6}$	Mn	$+883.0 \cdot 10^{-6}$
SiO ₂	$-29.6 \cdot 10^{-6}$	V	$+340.0 \cdot 10^{-6}$
H ₂ O	$-7 \cdot 10^{-6}$	O ₂ (g)	$+1.9 \cdot 10^{-6}$
N ₂ (g)	$-6.75 \cdot 10^{-9}$	O ₂ (fl)	$+3.6 \cdot 10^{-3}$

Abbildung 4.141: Suszeptibilität in diamagnetischen (links) und paramagnetischen Materialien (rechts).

Generell ist der Diamagnetismus umso stärker je größer die Elektronendichte ist und je weiter die Elektronen vom Atomkern entfernt sind. Abb. 4.141 fasst einige Materialkonstanten zusammen.

In paramagnetischen Materialien existieren magnetische Spin-Momente, welche ohne Magnetfeld zufällig orientiert sind und sich deshalb gegenseitig kompensieren. Liegt ein äußeres Magnetfeld an, so werden die magnetischen Momente teilweise ausgerichtet und erzeugen eine Polarisierung parallel zum äußeren Feld. Die Stärke dieser Polarisierung ist durch das Gleichgewicht zwischen dem Energiegewinn durch parallele Orientierung und der thermischen Bewegung gegeben. Abb. 4.141 zeigt typische Werte der magnetischen Suszeptibilität in paramagnetischen Materialien.

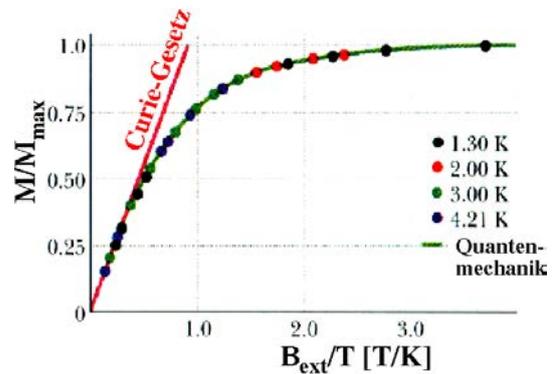


Abbildung 4.142: Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung.

Die Ausrichtung der magnetischen Dipole im Magnetfeld ist teilweise statistischer Natur, wobei ein starkes Magnetfeld eine stärkere Ausrichtung bevorzugt, während hohe Temperaturen zu einer rein zufälligen und damit gleich verteilten Orientierung führen. Insgesamt wird die Suszeptibilität in einem gewissen Bereich durch das Curie-Gesetz

$$\chi_m = \frac{C}{T}$$

beschrieben. Die Curie-Konstante C ist eine materialabhängige Konstante, welche die Stärke der internen magnetischen Momente enthält. In Abb. 4.142 entspricht dies der roten Geraden.

Bei tiefen Temperaturen und hohen Feldern findet man Abweichungen von diesem linearen Verhalten, wie in Abb. 4.142 gezeigt. Sie können dadurch erklärt werden, dass dann alle Dipole vollständig ausgerichtet sind. Eine quantitative Behandlung ist jedoch nur mit Hilfe der Quantenmechanik möglich.

4.7.5 Ferromagnetismus

In Materialien mit nur teilweise gefüllten Elektronenschalen kann die starke Wechselwirkung zwischen den Elektronen zu einer bevorzugten parallelen Ausrichtung ihrer magnetischen Momente führen. Dies führt dazu, dass sie auch ohne externes Magnetfeld eine endliche Magnetisierung zeigen. Dieses Verhalten wird als Ferro-

magnetismus bezeichnet. Man beobachtet es in Permanentmagneten.

Gegen diese Ausrichtung wirkt die thermische Bewegung. Es gibt deshalb eine Temperatur T_C , oberhalb der sich solche Materialien wie ein Paramagnet verhalten, während sie sich unterhalb ferromagnetisch verhalten. Die genaue Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität ist jedoch etwas anders als bei reinen Paramagneten:

$$\chi_m(\text{Ferromagnet}) = \frac{C}{T - T_C} \quad \text{für } T > T_C.$$

Dies wird als Curie-Weiss-Gesetz bezeichnet. Hier nimmt die Suszeptibilität mit abnehmender Temperatur zu und divergiert bei der kritischen Temperatur T_C , der Curie-Temperatur. Bei dieser Temperatur genügt somit (idealisiert) schon ein beliebig kleines Feld, um eine makroskopische magnetische Polarisation zu erzeugen, es entsteht eine spontane Polarisation.

	T_C / K
Dy	87
Gd	289
Cu_2MnAl	603
Ni	631
Fe	1042
Co	1400

Abbildung 4.143: Curie-Temperatur.

Diese kritischen Temperaturen sind stark materialabhängig. Wie in Abb. 4.143 gezeigt, können sie weniger als 1 K oder > 1000 K betragen.

Indem man ein ferromagnetisches Material über die Curie-Temperatur erwärmt, macht man es zu einem Paramagneten; kühlt man es wieder ab so wird es wieder zu einem Ferromagneten. Abb. 4.144 zeigt ein Experiment, welches die Erwärmung des Nickelrades ausnutzt, um das Material paramagnetisch zu machen (also im Vergleich zum ferromagnetischen Material nichtmagnetisch. Es wird deshalb weniger stark vom Magneten angezogen als der ferromagnetische Teil des Rings, es entsteht netto ein Drehmoment, welches auf den Ring wirkt und er beginnt sich zu drehen. Dadurch wird ein anderer Teil erwärmt und das Drehmoment dadurch aufrecht erhalten.

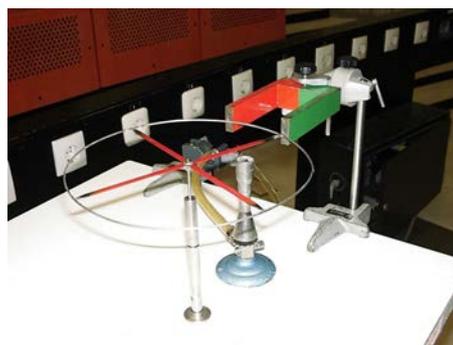


Abbildung 4.144: Änderung der magnetischen Eigenschaften bei der Curie-Temperatur.

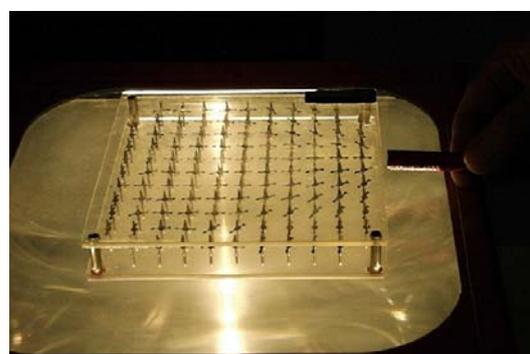


Abbildung 4.145: Modell für ferromagnetische Materialien.

Die spontane Polarisierung des ferromagnetischen Materials entsteht zunächst nur lokal, d.h. die Momente orientieren sich auf einer Skala von um parallel zueinander. Es entstehen Bereiche, in denen die Momente alle in die gleiche Richtung orientiert sind. Abb. 4.145 zeigt diesen Effekt anhand eines einfachen Modells.

4.7.6 Magnetische Domänen

Diese kleinen magnetischen Domänen werden als Weiss'sche Bezirke (Pierre Weiss 1865-1940) bezeichnet und sind die grössten magnetisch homogenen Bereiche. Abb. 4.146 zeigt ein Beispiel. Auf einer größeren Skala treten alle Orientierungen gleichwertig auf. Weiss'sche Bezirke kann man u.a. im Polarisationsmikroskop beobachten. Je nach Art des Kristallgitters gibt es verschie-

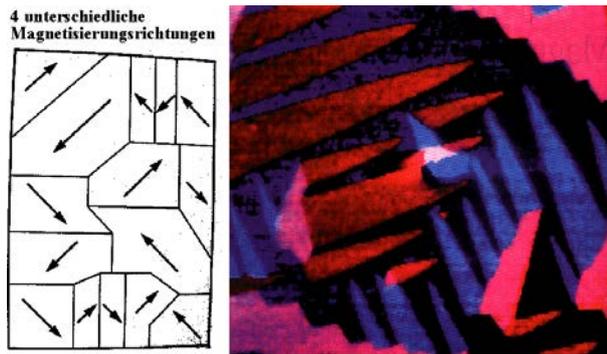


Abbildung 4.146: Weiss'sche Bezirke in einem ferromagnetischen Material.

dene mögliche Vorzugsorientierungen für die Domänen. In diesem kubischen Modell z.B. gibt es vier äquivalente Orientierungen, im hexagonalen Modell sechs.

Wird ein äußeres Feld angelegt so wachsen die Bezirke, in denen die Magnetisierung parallel zum äußeren Feld liegt auf Kosten der anderen Bezirke. Bei noch stärkeren Feldern können auch ganze Domänen umklappen. Dieser Effekt wird als Barkhausen-Effekt bezeichnet.

Diesen Effekt kann man auch akustisch hörbar machen. In diesem Experiment werden drei dünne Drähte aus Nickel, geglühtem Eisen und Stahldraht verglichen: Jedesmal wenn eine Domäne umklappt wird in der Spule ein Spannungspuls induziert, der als Knacken hörbar wird.

Wenn das Feld genügend groß wird stellen sich alle atomaren Dipole parallel zum äußeren Feld, das Material ist vollständig polarisiert. Diese Materialien können deshalb auch ohne äußeres Magnetfeld eine Magnetisierung zeigen. Die Beziehung zwischen B und H ist somit nicht mehr linear. Man kann eine Permeabilität nur noch differentiell definieren:

$$\mu = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}.$$

Diese Permeabilitäten / Suszeptibilitäten können sehr groß sein, im Bereich von 1000 bis 100'000. Abb. 4.147 zeigt einige Beispiele.

	μ_r
Ferrite	1000
Fe (rein)	10000
Co	1400
Ni-Fe (μ -Metall)	< 90000

Abbildung 4.147: Suszeptibilitäten ferromagnetischer Materialien.

Das Material mit der grössten Suszeptibilität, μ -Metall, wird insbesondere verwendet, um magnetische Felder abzuschirmen.

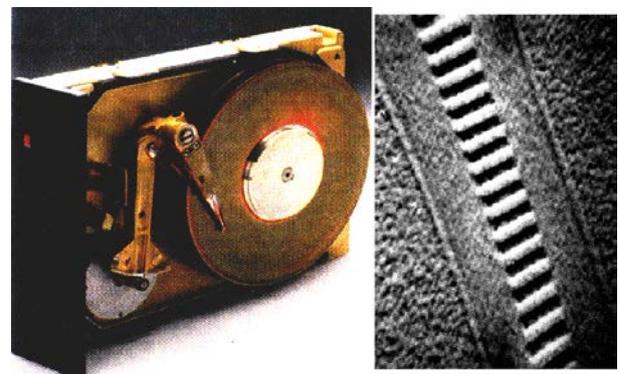


Abbildung 4.148: Magnetische Datenspeicherung; links: Festplatte; rechts: Spur aus magnetischen Zellen (bits).

Es existiert eine ganze Reihe von weiteren Anwendungen für ferromagnetische Materialien. Eine davon ist die Verwendung für die Speicherung von Daten. In einer Festplatte sind, wie in Abbildung 4.148 gezeigt, einzelne Bezirke mit einer bestimmten Richtung polarisiert.

Neben ferromagnetischem Verhalten gibt es auch antiferromagnetisches Verhalten. Abb. 4.149 vergleicht die beiden Arten magnetische Ordnung. In diesem Fall ist die Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn so, dass antiparallele Orientierung energetisch günstiger ist. Die kritische Temperatur wird hier als Neel-Temperatur T_N bezeichnet. Oberhalb der Neel-Temperatur gilt ein abgewandeltes Curie-Weiss Gesetz

$$\chi_m = \frac{C}{T + T_N}.$$

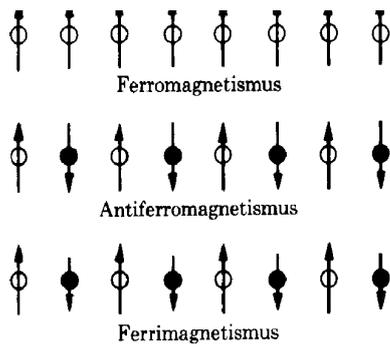


Abbildung 4.149: Unterschiedliche Arten magnetischer Ordnung.

Unterhalb T_N ist m stark materialabhängig.

Eine weitere Klasse von magnetischen Materialien sind die Ferrimagnete oder Ferrite. Hier sind magnetische Momente unterschiedlicher Größe antiparallel ausgerichtet und kompensieren sich teilweise.

Die Ausrichtung der magnetischen Momente kann auch Auswirkungen auf die Form des Materials haben. Bei piezoelektrischen Materialien konnte die Form mit Hilfe eines angelegten elektrischen Feldes verändert werden.

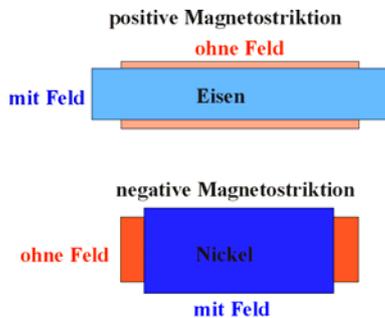


Abbildung 4.150: Magnetostriktion.

Ähnlich kann mit Hilfe von magnetischen Feldern die Form von magnetischen Materialien geändert werden. Dieser Effekt wird als Magnetostriktion bezeichnet. Bei positiver Magnetostriktion (z.B. Fe; Abb. 4.150 oben) verlängert sich das Material beim Anlegen eines Feldes; bei negativer Magnetostriktion (z.B. Nickel) verkürzt und verbreitert sich das Material.

4.7.7 Magnetische Hysterese

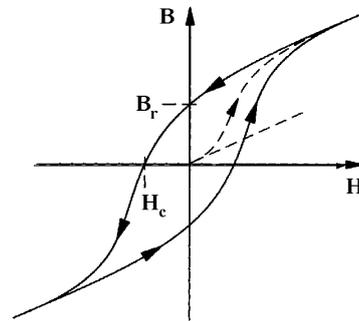


Abbildung 4.151: Magnetische Hysterese.

Trägt man für ein ferromagnetisches Material die magnetische Flussdichte gegen das äußere Magnetfeld auf, so erhält man eine Kurve, die von der zeitlichen Änderung der Felder abhängt. Abb. 4.151 zeigt das generelle Verhalten. Beginnt man mit einem nicht magnetisierten Material, so findet man ein näherungsweise lineares Verhalten. Bei größeren Feldern treten Sättigungseffekte auf. Diese können auf die vollständige Ausrichtung der Weiß'schen Bezirke zurückgeführt werden. Wird das Feld wieder verringert so bleibt die Orientierung zunächst erhalten. Auch ohne äußeres Feld findet man eine Magnetisierung, die sogenannte Remanenz B_r . Dies ist die charakteristische Eigenschaft eines Permanentmagneten. Erst wenn ein Gegenfeld (das Koerzitivfeld H_c) angelegt wird kann diese Magnetisierung auf Null reduziert werden. Für stärker negatives Feld wird tritt eine negative Magnetisierung auf, welche schließlich ebenfalls sättigt.

Im Experiment wird das äußere Magnetfeld H und die magnetische Flussdichte B gemessen, welches in einem Eisenkern einer Solenoidspule erzeugt wird. Das äußere Magnetfeld wird periodisch variiert, während die Flussdichte über eine zweite Spule gemessen wird.

Gute Permanentmagnete haben hohe Koerzitivfeldstärken und hohe Remanenzen (\rightarrow Abb. 4.152). Die Remanenzfelder liegen in der Größenordnung von 1 T, während die Koerzitivfelder von einigen 1000 bis zu einigen 100000 A/m gehen können. Die höchsten Werte erzielt man

	B_r/T	$H_c / A/m$
C-Stahl	1	3600
Cr-Stahl	0.95	5000
AlNiCo Stahl	1.25	44000
Co-Stahl	0.95	19000
seltene Erden	0.9	700000

Abbildung 4.152: Remanenz und Koerzitivfeld einiger Materialien.

mit seltenen Erden, da diese eine große Zahl ungepaarter Elektronen enthalten.

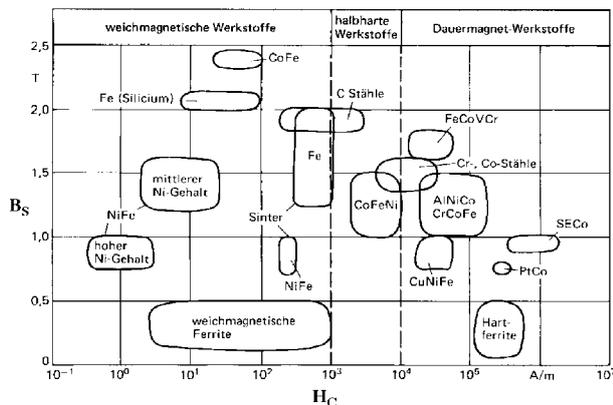


Abbildung 4.153: Sättigungsfeld und Koerzitivfeld unterschiedlicher magnetischer Werkstoffe.

Während die Sättigungsfeldstärken alle im Bereich von 1 T liegen können die Koerzitivfelder über viele Größenordnungen variieren. Man beachte die logarithmische Skala in Abb. 4.153.

Die Fläche der Hysterese im $B-H$ Diagramm hat die Einheit einer Energiedichte; sie entspricht der Energie, welche in einem Zyklus des äußeren H -Feldes im Material deponiert wird. Bei Transformatoren (siehe Kapitel 3.6) finden viele solche Zyklen statt. Man versucht deshalb die Hysteresen für solche Anwendungen möglichst gering zu machen. Materialien, welche diese Bedingung erfüllen, werden als magnetisch weich bezeichnet; sie zeichnen sich dadurch aus, dass die Magnetisierung nach Entfernung des äußeren Feldes wieder verschwindet. Für solche Anwendungen sind z.B. Ferrite gut geeignet, da sie schon bei geringen Koerzitivfeldern umpolarisiert werden.

4.7.8 Ferrofluide



Abbildung 4.154: Oberfläche eines Ferrofluids im Feld eines Stabmagneten.

Auch Flüssigkeiten können ferromagnetische Eigenschaften haben - man bezeichnet sie dann als Ferrofluide. Sie bestehen aus wenigen Nanometer großen magnetischen Partikeln, die in einer Trägerflüssigkeit kolloidal suspendiert sind. Die Partikel werden in der Regel mit einer polymeren Oberflächenbeschichtung stabilisiert. Echte Ferrofluide sind stabile Dispersionen, was bedeutet, dass sich die festen Teilchen nicht mit der Zeit absetzen und selbst in extrem starken Magnetfeldern nicht aneinander anlagern oder sich von der Flüssigkeit als andere Phase abscheiden. Ferrofluide sind superparamagnetisch und besitzen eine sehr geringe Hysterese. Abb. 4.154 zeigt die Oberfläche eines Ferrofluids im Feld eines Stabmagneten.

4.7.9 Magnetische Eigenschaften von Supraleitern

Neben der verlustlosen Leitung von Elektrizität haben Supraleiter auch außergewöhnliche magnetische Eigenschaften.

Insbesondere sind sie perfekte Diamagneten. Dies bedeutet, dass magnetische Felder nicht ins innere eines Supraleiters eindringen können. Wie in Abb. 4.155 gezeigt gilt dies allerdings nur bis ein kritisches Feld erreicht ist; oberhalb dieser Feldstärke dringt das Magnetfeld wieder ein.

Dies geschieht dadurch, dass an der Oberfläche

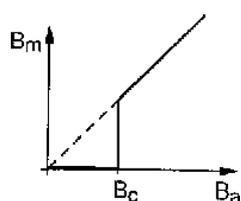


Abbildung 4.155: Temperaturabhängigkeit der Flussdichte im Innern eines Supraleiters.

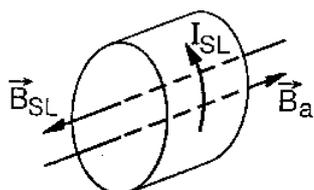


Abbildung 4.156: Kreisströme an der Oberfläche eines Supraleiters.

des Supraleiters Kreisströme entstehen, die ein Magnetfeld erzeugen, welches das äußere Feld gerade kompensiert. Abb. 4.155 zeigt schematisch den Oberflächenstrom.

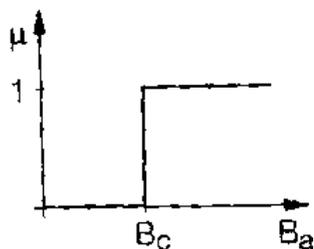


Abbildung 4.157: Temperaturabhängigkeit der magnetischen Permeabilität eines Supraleiters.

Man kann dies durch die Permeabilität μ ausdrücken: sie beträgt im supraleitenden Bereich 0, wie in Abb. 4.157 gezeigt. Wenn ein kritisches Feld erreicht wird, dringt das Feld wieder in das Material ein, die Permeabilität wird 1. Diese Eigenschaft, das Magnetfeld auszustoßen, wird als Meissner-Ochsenfeld Effekt bezeichnet (Fritz Walther Meissner, 1882-1974; R. Ochsenfeld, 1901-1993).

In sogenannten Typ II Supraleitern wird dieses

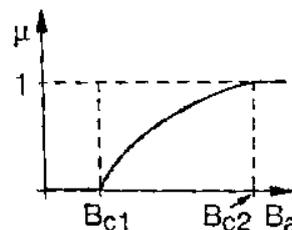


Abbildung 4.158: Permeabilität in einem Typ-II Supraleiter.

Verhalten etwas modifiziert: hier dringt das Feld nicht mehr schlagartig ein, sondern die Permeabilität steigt über einen Bereich von Feldstärken an bis sie den Wert 1 erreicht. Abb. 4.158 zeigt die Permeabilität als Funktion der Temperatur.

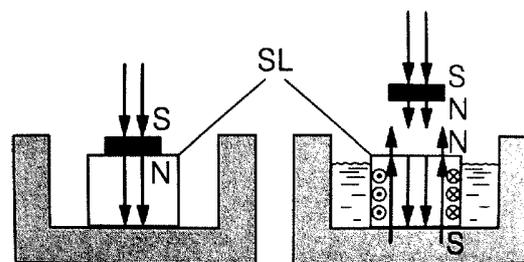


Abbildung 4.159: Meissner-Effekt.

Dieses Verhalten wird gerne mit einem Experiment demonstriert, bei dem ein Magnet auf einen Supraleiter gelegt wird. Handelt es sich um einen Hoch-TC Supraleiter so genügt flüssiger Stickstoff, um ihn unter die kritische Temperatur abzukühlen. Wie in Abb. 4.159 gezeigt, wird dadurch das Feld aus dem Supraleiter ausgestoßen und der Magnet schwebt über dem Supraleiter.

Eine Möglichkeit, den Meissner-Effekt nachzuweisen ist, ein Stück Supraleiter mit flüssigem Stickstoff unter die kritische Temperatur abzukühlen. Legt man dann einen kleinen Permanentmagneten auf den Supraleiter, so können die Magnetfeldlinien nicht in den Supraleiter eindringen und der Magnet schwebt über dem Supraleiter, wie in Abb. 4.160 gezeigt.

Dieser Effekt wird z.B. bei einem japanischen Konkurrenzprodukt zum Transrapid verwendet,

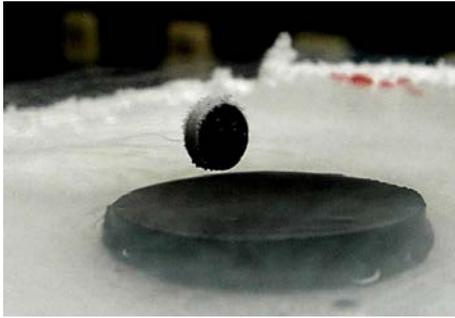


Abbildung 4.160: Magnet schwebt über Supraleiter.



Abbildung 4.161: Zug schwebt mit Hilfe von supraleitenden Magneten.

um ihn über der Schiene schweben zu lassen. Abb. 4.161 zeigt einen Prototypen.

4.8 Zeitabhängige Felder und Ströme

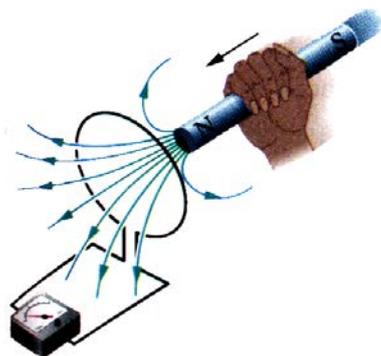


Abbildung 4.162: Flussänderung induziert Spannung.

Bisher hatten wir diskutiert, wie elektrische Ströme magnetische Felder erzeugen. Jetzt wird der umgekehrte Prozess diskutiert: wie ein zeitlich

veränderliches Magnetfeld eine Spannung und damit einen Strom induziert.

4.8.1 Induktion: Phänomenologie



Abbildung 4.163: Ein Magnet wird in eine Leiterschleife geschoben und induziert dadurch eine Spannung.

Das Phänomen der Induktion kann anhand eines einfachen Experimentes gezeigt werden, wie in Abb. 4.163 gezeigt. Hier wird ein Stabmagnet in eine Leiterschleife geschoben, während die Spannung über der Leiterschleife gemessen wird. Man stellt fest, dass beim Hineinschieben eine positive Spannung gemessen wird, welche wieder auf Null fällt, wenn der Magnet nicht mehr verschoben wird. Beim Herausziehen findet man wieder eine Spannung, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen. Dreht man den Stabmagneten, schiebt also den entgegengesetzten Pol in die Leiterschleife, so misst man einen negativen Spannungspuls, beim Herausziehen einen positiven.

Wird die Bewegung schneller durchgeführt, so wird der Spannungsstoß kürzer, aber intensiver; die Fläche

$$\int U(t) dt$$

bleibt konstant. Abb. 4.164 zeigt zwei Beispiele in roter respektive blauer Farbe. In beiden Fällen steigt der magnetische Fluss durch die Spule

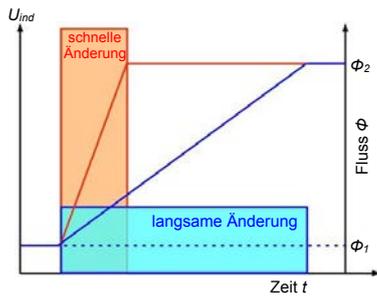


Abbildung 4.164: Fluss als Funktion der Zeit und induzierte Spannung.

von Φ_1 auf Φ_2 , aber über unterschiedliche Zeiten. Im roten Fall entsteht ein kurzer aber starker Spannungspuls, im blauen Fall ein schwacher aber langer Puls.

Aus einer Reihe von Experimenten dieser Art findet man, dass dieses Integral gegeben ist durch die Änderung des magnetischen Flusses durch die Spule. Steigt der Fluss durch die Leiterschleife linear mit der Zeit, so misst man eine Spannung, die während dieser Zeit konstant ist, wie in Abb. 4.164 gezeigt. Je schneller das Magnetfeld steigt, desto höher ist die Spannung. Das Integral $\int U(t) dt$, in diesem Fall $U \Delta t$, ist jedoch unabhängig von der Rate und nur durch die Flussdifferenz $\Delta\phi$ zwischen Anfangs- und Endwert gegeben,

$$\int U(t) dt = \phi_1 - \phi_2 = -\Delta\phi.$$

4.8.2 Magnetischer Fluss

Der magnetische Fluss ϕ durch eine Fläche A ist definiert als das Integral

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \vec{A} = \int B dA \cos \theta,$$

d.h. nur die Komponente der Flussdichte senkrecht zur Fläche trägt bei. Bildlich kann man sich den Fluss als die Summe aller Feldlinien ausrechnen, welche die Fläche A durchstoßen. Die Einheit des magnetischen Flusses,

$$[\phi] = \text{Vs} = \text{Wb} = \text{Weber},$$

bezieht sich auf Wilhelm Weber (1804-1891). Die magnetische Flussdichte B ist dementsprechend definiert als Fluss pro Fläche,

$$B = \frac{d\phi}{dA} \quad [B] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T} = \text{Tesla}.$$

Die Einheit Tesla erinnert an Nikola Tesla (1856-1943).

Die magnetische Flussdichte \vec{B} und das Magnetfeld \vec{H} sind im Vakuum und in vielen Materialien direkt proportional zueinander:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_r \mu_0 \vec{H}. \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}. \end{aligned}$$

Die Proportionalitätskonstante μ_0 wird als magnetische Feldkonstante oder Permeabilität des Vakuums bezeichnet. In einem Material wird die Permeabilität des Vakuums mit der relativen Permeabilität μ_r multipliziert.

4.8.3 Induktionsgesetz

Eine nützlichere Schreibweise für die Beziehung zwischen Flussänderung und induzierter Spannung ist die differentielle Form

$$U_{ind}(t) = -N \frac{d\phi}{dt},$$

wobei N die Anzahl der Windungen darstellt. Die Änderung $d\phi/dt$, resp. $\phi_2 - \phi_1$ des magnetischen Flusses kann auf unterschiedliche Weise erreicht werden. Wir beschränken uns hier auf den einfachen Fall, dass das Magnetfeld homogen ist. Dann ist

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(B A \cos \theta).$$

Hier stellt A die Fläche der Leiterschleife und θ den Winkel zwischen Feldrichtung und Flächennormaler dar. Somit existieren drei Möglichkeiten, um eine Spannung zu induzieren:

Man kann

- die Flussdichte B ändern. Dies wird typischerweise mit einem Elektromagneten erreicht. Das Prinzip wird vor allem im Transformator verwendet, der in Kapitel 4.8.12 im Detail behandelt wird. Eine etwas andere Möglichkeit, die Flussdichte zu ändern, basiert darauf, dass man einen Magneten mehr oder weniger weit in die Leiterschleife hinein schiebt. Dies wurde im obigen Experiment gezeigt und wird bei einigen Typen von Mikrofonen verwendet.
- die Größe der Schleife ändern.



Abbildung 4.165: Änderung der Schleifengröße durch rollenden Stab.

In diesem Experiment wird das erreicht, indem man eine Leiterschleife verwendet, welche aus zwei festen und einem rollenden Kupferstab gebildet wird. Ein Permanentmagnet sorgt für den Fluss durch diese Spule.

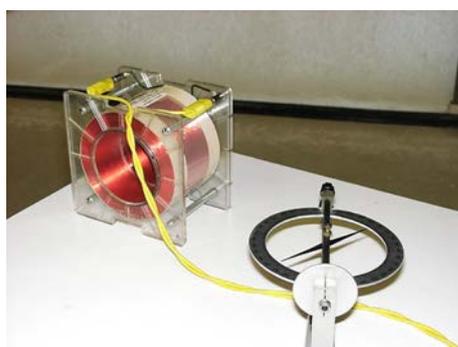


Abbildung 4.166: Orientierung der Spule.

- Als dritte Möglichkeit kann man die Orientierung der Schleife bezüglich dem Magnet-

feld ändern. Im Experiment verwenden wir eine Spule, die eine große Anzahl Windungen aufweist. Damit ist es möglich, sogar im Erdmagnetfeld eine leicht messbare Induktionsspannung zu erzeugen. Den zweiten und dritten Fall kann man zusammenfassen als eine Änderung von $d\vec{A}/dt$.

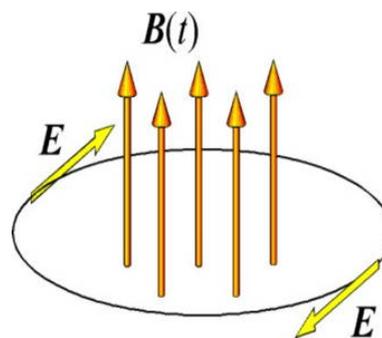


Abbildung 4.167: Magnetische Flussdichte und induziertes Feld.

Die induzierte Spannung entspricht einem Integral des Feldes über die Schleife,

$$U(t) = \oint_{\text{Schleife}} E(t, r) dr \propto \frac{\partial}{\partial t} B(t).$$

Die Flussänderung erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld. Da das geschlossene Wegintegral für dieses Feld nicht verschwindet, existiert kein Potenzial für dieses Wirbelfeld!

4.8.4 Wechselstromgenerator

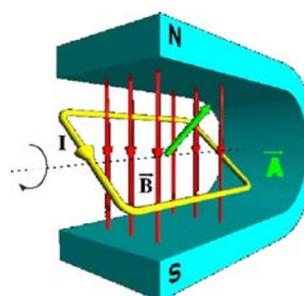


Abbildung 4.168: Drehbare Spule im Magnetfeld.

Wir betrachten den dritten Fall etwas genauer; er stellt die Grundlage für die Erzeugung von Strom in Kraftwerken dar. Abb. 4.168 zeigt das Prinzip. Wir betrachten hier eine rechteckige Schleife mit Seitenlängen ℓ, ℓ' , welche sich um eine Achse senkrecht zum Magnetfeld dreht. Die induzierte Spannung beträgt

$$U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -N \frac{d}{dt}(\vec{B}_0 \cdot \vec{A}).$$

Wir gehen davon aus, dass sowohl das Magnetfeld \vec{B}_0 wie auch der Betrag A der Fläche konstant sind.

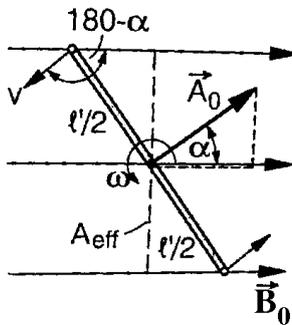


Abbildung 4.169: Drehmoment auf die Spule.

Hingegen soll die Orientierung von \vec{A} sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω ändern, wie in Abb. 4.169 gezeigt. Damit wird

$$U_{ind} = -N \frac{d}{dt}(B_0 A \cos \omega t) = N B_0 A \omega \sin \omega t.$$

Man erhält also eine Spannung, die sinusförmig variiert. Dieser Effekt ist die Grundlage für elektrische Generatoren. Die elektrische Leistung, die dabei gewonnen wird, muss durch mechanische Arbeit kompensiert werden, welche nötig ist, um den induzierten Dipol im statischen Magnetfeld zu drehen. Dies gilt allgemein, für alle hier vorgestellten Varianten der Induktion: die induzierten Ströme erzeugen ein Magnetfeld, welches der Ursache entgegenwirkt (Lenz'sche Regel). Entsprechend kann man in alle gezeigten Anordnungen nicht nur als Generator, sondern auch umgekehrt als Motor betreiben.

4.8.5 Induzierte Ströme und Lenz'sche Regel

Das Experiment zeigt zunächst, dass in der Leiterschleife eine Spannung induziert wird. Natürlich entspricht dieser Spannung auch ein Strom. Ein Strom durch eine Leiterschleife erzeugt darin einen magnetischen Dipol. Damit stellt sich die Frage, wie dieser Dipol orientiert ist - gleich wie der Magnet, der ihn erzeugt, oder umgekehrt.

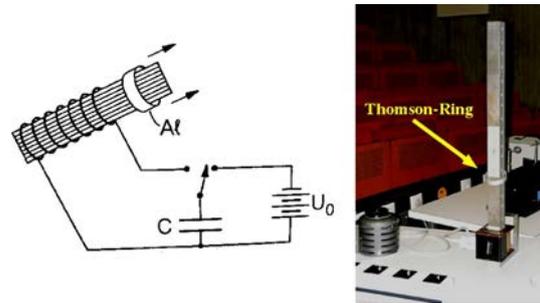


Abbildung 4.170: Versuchsaufbau zum Thomson-Ring Versuch.

Für die Klärung dieser Frage verwenden wir den Thomson-Ring: Wie in Abb. 4.170 gezeigt, wird eine Leiterspule aus Aluminium um einen Eisenkern gelegt, in dem mit Hilfe einer Induktionsspule ein wechselndes Magnetfeld erzeugt wird. Man beobachtet, dass die Spule schwebt. Somit wird sie vom Magneten, der den Strom induziert, abgestoßen.

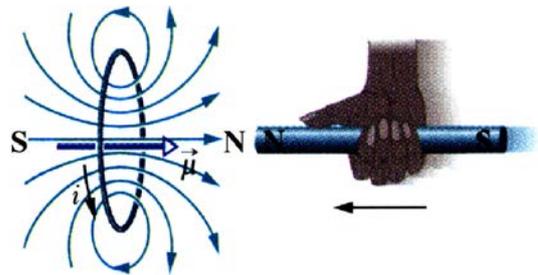


Abbildung 4.171: Die Lenz'sche Regel.

Daraus folgt, dass der induzierte Magnet dem erzeugenden Magneten entgegen-gerichtet ist. Die-

ses Resultat ist allgemein als "Lenz'sche Regel"⁵ bekannt: Wie in Abb. 4.171 gezeigt, wirkt die induzierte Spannung ihrer Ursache entgegen. Im Falle einer Leiterschleife erzeugt die Spannung einen Strom, welcher eine Änderung des Feldes verringert: Wird der Magnet in die Spule hineingeschoben so schwächt der induzierte Strom dieses Feld ab; wird er herausgezogen, so verstärkt der induzierte Strom das Feld, d.h. er versucht eine Abschwächung zu verringern. Der induzierte Dipol erzeugt in beiden Fällen eine Kraft, welche überwunden werden muss wenn der Magnet in die Leiterschleife hinein geschoben wird.

4.8.6 Wirbelströme

Zeitlich variable Magnetfelder, die in elektrische Leiter eindringen, erzeugen dort ebenfalls Ströme, welche die Quellen von Magnetfeldern sind. Diese Ströme werden als Wirbelströme bezeichnet. Sie können schädlich sein, wie z.B. in Transformatoren, wo sie für einen Teil der Verluste verantwortlich sind, oder nützlich, wie z.B. in Wirbelstrombremsen, wo sie als verschleissfreie Bremsen dienen.

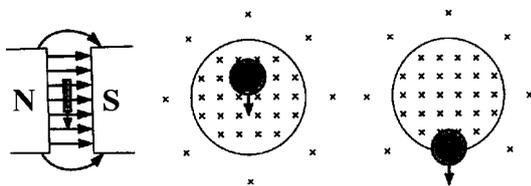


Abbildung 4.172: Wirbelströme: Eine Kupferscheibe fällt durch ein Magnetfeld und wird durch Wirbelströme gebremst.

Den Effekt kann man z.B. beobachten wenn man eine Münze durch ein Magnetfeld fallen lässt. Dabei findet man, dass sie nur langsam in das Magnetfeld eindringt (siehe Abb. 4.172). Im homogenen Magnetfeld fällt sie mit normaler Geschwindigkeit, da hier der Fluss konstant bleibt. Am unteren Ende des Magnetfeldes wird sie wieder stark verlangsamt. Der Effekt zeigt eine gewisse Analogie zum Meissner-Effekt: Auch hier

⁵Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804 - 1865)

verzögern die Wirbelströme das Eindringen des Magnetfeldes in das Leitermaterial. Allerdings kann dies für normal leitende Materialien nur eine Verzögerung bewirken, da die Verluste im Leiter ein Abklingen der Oberflächenströme bewirken.



Abbildung 4.173: Waltenhofen'sches Pendel.

Den Effekt der Wirbelstrombremse man auch anhand des Waltenhofen'schen Pendels zeigen (→ Abb. 4.173). Dabei schwingt ein Pendel mit einer Kupferplatte als Gewicht zwischen den Polschuh eines Magneten. Je stärker das Magnetfeld ist, welches hier eingeschaltet wird, desto stärker ist die Bremswirkung. Dieser Effekt verschwindet praktisch völlig, wenn statt einer durchgehenden Kupferplatte eine Kupferplatte mit Schlitzen eingesetzt wird. Die Schlitze eliminieren einen Teil der Wirbelströme und damit die Bremswirkung. Dies wird. u.a. in Transformatoren genutzt: die Eisenkerne in Transformatoren enthalten Schlitze, um Wirbelströme und damit verbundene Verluste zu verringern.

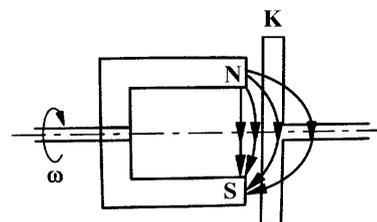


Abbildung 4.174: Wirbelstrombremse als Kupplung.

Man kann Wirbelströme auch dazu verwenden, eine verschleissfreie Kupplung zu bauen. Bei dem

in Abb. 4.174 gezeigten System dreht sich der Hufeisenmagnet so, dass die Feldlinien sich in der frei rotierenden Kupferscheibe K bewegen. Dabei werden Wirbelströme induziert, welche die Kupferscheibe in eine Drehbewegung versetzen. Wirbelstrombremsen werden nach dem Prinzip des Waltenhofen'schen Pendels konstruiert.

4.8.7 Selbstinduktion

Wird ein elektrischer Leiter von einem variablen Strom durchflossen, so erzeugt er ein zeitlich veränderliches Magnetfeld, welches auch im Leiter selbst eine Spannung erzeugt, die der zeitlichen Änderung entgegenwirkt. Dieser Effekt wird als Selbstinduktion bezeichnet. Die Stärke hängt von der Geometrie der Leiter ab. Der Effekt muss vor allem bei der Entwicklung von schnellen Schaltungen berücksichtigt werden, wo er wesentlich zur Beschränkung der Geschwindigkeit beiträgt.

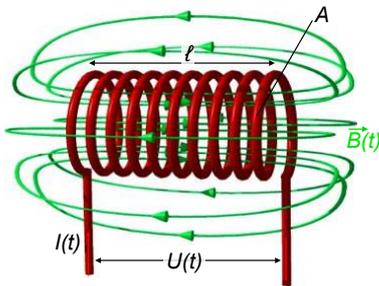


Abbildung 4.175: Der Strom $I(t)$ erzeugt in der Spule das Feld $\vec{B}(t)$.

Wir betrachten als Beispiel eine lange zylinderförmige Spule der Länge ℓ mit N Wicklungen, wie in Abb. 4.175 gezeigt. Bei einem Strom I beträgt das Magnetfeld im Innern

$$H = \frac{IN}{\ell}.$$

Ändert man den Strom durch die Spule, so induziert die damit verbundene Flussänderung eine Spannung

$$\begin{aligned} U_{ind} &= -N \frac{d\phi}{dt} = -NA\mu_0\mu_r \frac{dH}{dt} \\ &= -NA\mu_0\mu_r \frac{N}{\ell} \frac{dI}{dt}. \end{aligned}$$

Der Proportionalitätsfaktor zwischen Stromänderung und induzierter Spannung wird als Induktivität bezeichnet,

$$U_{ind} = -L \frac{dI}{dt}. \quad [L] = \text{Henry} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = \Omega\text{s}$$

Die Einheit Henry bezieht sich auf Joseph Henry (1797-1878). Im hier betrachteten Fall einer Spule ist somit

$$L_{Spule} = \mu_0\mu_r \frac{N^2 A}{\ell}.$$

Die Definition der Induktivität erfolgt analog zum Kondensator, wo die Kapazität als Verhältnis aus gespeicherter Ladung (d.h. Integral des Stroms) und Spannung definiert ist. Bei der Induktivität erzeugt nicht das Integral, sondern die zeitliche Änderung des Stroms eine Spannung. Induktivitäten sind, neben Widerständen und Kapazitäten die dritte Form von passiven, linearen elektronischen Bauelementen. Wie bei Widerständen addieren sich Induktivitäten bei Serienschaltung, während bei Parallelschaltungen die Kehrwerte addiert werden.

Die Induktivität kann auch gemessen werden als Integral der induzierten Spannung für eine gegebene Stromänderung:

$$L = \frac{\int U_{ind} dt}{\Delta I}.$$

Das Integral umfasst den Zeitbereich während dem der Strom von I_1 auf $I_2 = I_1 + \Delta I$ geändert wird.

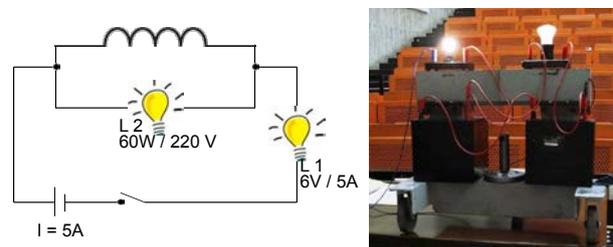


Abbildung 4.176: Einschaltverzögerung durch Induktionsspulen.

Das Einschaltverhalten einer Induktivität kann im Experiment sichtbar gemacht werden, indem

man die entsprechenden Ströme über Glühlampen sichtbar macht. Abb. 4.176 zeigt einen entsprechenden Aufbau. Hier fließt nach Schließen des Schalters ein konstanter Strom von 5 A durch die Lampe L_1 . Unmittelbar nach Einschalten wächst der Strom durch die Spule, während der Strom durch die Lampe L_2 abnimmt. Beim Öffnen des Schalters löscht L_1 aus, während die Lampe L_2 noch brennt: die im Magnetfeld der Spule enthaltene Energie wird durch diese Lampe entladen.

4.8.8 Magnetische Feldenergie

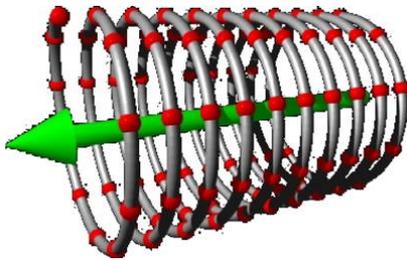


Abbildung 4.177: Magnetfeld einer Spule.

Mit Hilfe der Selbstinduktion kann für eine lange dünne Zylinderspule der Energieinhalt des magnetischen Feldes hergeleitet werden (\rightarrow Abb. 4.177): Damit der Strom I durch die Spule fließen kann, muss die Arbeit

$$W = \int UI dt = L \int \frac{dI}{dt} I dt$$

geleistet werden. Hier wurde berücksichtigt, dass die von außen angelegte Spannung gerade die induzierte Spannung kompensieren muss,

$$U = -U_{ind} = L \frac{dI}{dt}.$$

Die Integration ergibt

$$W = L \int I dI = \frac{1}{2} LI^2.$$

Schreibt man den Strom als Funktion der magnetischen Feldstärke $H = IN/\ell$, $I = H\ell/N$, so

erhält man

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} L \frac{H^2 \ell^2}{N^2} = \frac{1}{2} \frac{H^2 \ell^2}{N^2} \mu_0 \mu_r \frac{N^2 A}{\ell} \\ &= \frac{1}{2} H^2 \mu_0 \mu_r \ell A = \frac{\mu_0 \mu_r}{2} H^2 V. \end{aligned}$$

Division durch das Volumen $V = \ell A$ ergibt die Energiedichte

$$w_{magn} = \frac{1}{2} H^2 \mu_0 \mu_r = \frac{1}{2} HB. \quad (4.7)$$

Dies gilt für eine lineare Beziehung zwischen H und B ; für nichtlineare Abhängigkeiten muss die Energie durch Integration bestimmt werden.

Mit Hilfe der Selbstinduktion können auch sehr hohe Spannungen erzeugt werden indem man den Strom sehr schnell ändert, z.B. indem man ihn plötzlich unterbricht.

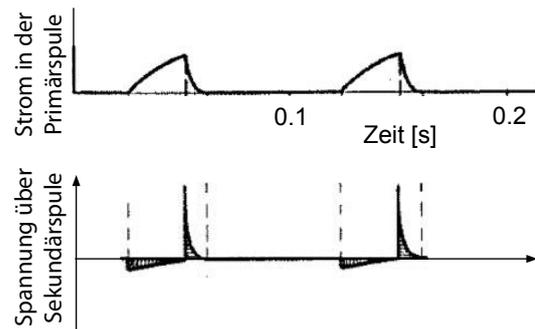


Abbildung 4.178: Funkeninduktor.

Dies wird z.B. beim Funkeninduktor (\rightarrow Abb. 4.178) verwendet. Dieser ist aus einer zylindrischen Primärspule mit wenigen und einer darüber gewickelten Sekundärspule mit vielen Windungen aufgebaut. Man lässt dabei zunächst einen Strom durch die Primärspule fließen. Wenn das Feld in der Spule stark genug ist, öffnet es einen Schalter, welcher den Strom unterbricht. Im Magnetfeld in der Spule ist jedoch gemäß Gl. (4.7) eine erhebliche Energie gespeichert, die nach außen abgeführt werden muss. Durch die rasche Änderung des Stroms ändert sich der magnetische Fluss durch die darüber gewickelte Sekundärspule mit vielen Windungen. Dadurch wird eine hohe Spannung aufgebaut, welche über

eine Funkenstrecke kurzgeschlossen wird. Dieses Prinzip wird auch in Benzinmotoren zur Erzeugung des Zündfunken im Zylinder verwendet.

4.8.9 Periodische Ströme und Felder

Periodische Spannungen, Ströme und Felder spielen eine besonders wichtige Rolle. Sie werden beschrieben durch harmonische Funktionen

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi_u).$$

Hier stellt U_0 die Amplitude, ω die Kreisfrequenz und ϕ_u die Phase dar. In einem linearen System fließt dann ein Strom $I(t)$ mit der gleichen Frequenz:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi_i). \quad (4.8)$$

Die beiden Phasen unterscheiden sich wenn die Schaltung Induktivitäten und / oder Kapazitäten enthält (was in realen Schaltungen immer der Fall ist!).

Wenn Spannungen und Ströme zeitabhängig sind, ist es nützlich, ihre Stärke über einen zeitunabhängigen Parameter zu quantifizieren. Eine Möglichkeit sind Effektivwerte, z.B.

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt}.$$

Für eine sinus-förmige Zeitabhängigkeit wie in (4.8) ist

$$I_{eff} = I_0 \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Die Leistung, welche bei einem Wechselstrom über einer Impedanz abfällt, ändert sich als Funktion der Zeit. Die mittlere Leistung eines Wechselstroms hängt deshalb nicht nur von der Amplitude oder vom Effektivwert von Strom und Spannung ab, sondern auch von der relativen Phase. Sie kann berechnet werden als

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) U(t) dt = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos(\phi_u - \phi_i).$$

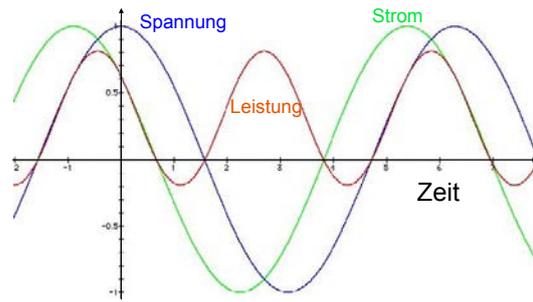


Abbildung 4.179: Strom, Spannung und Leistung als Funktion der Zeit.

Die Leistung hängt somit vom Produkt der Amplituden von Strom und Spannung ab und oszilliert mit der relativen Phase $\phi_u - \phi_i$ zwischen Strom und Spannung. Abb. 4.179 zeigt die Zeitabhängigkeit für einen spezifischen Fall.

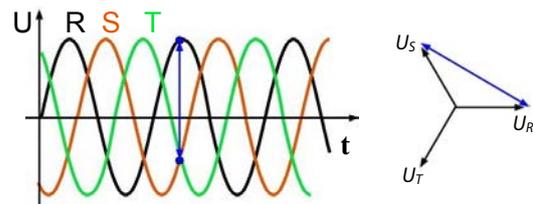


Abbildung 4.180: 3-Phasen Wechselstrom.

Beim 3-Phasen Wechselstrom verwendet man drei Leiter (zusätzlich zum Nulleiter), in denen die Phase der Spannung jeweils um 120 Grad verschoben ist:

$$\begin{aligned} U_R &= U_0 \sin(\omega t) \\ U_S &= U_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ U_T &= U_0 \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Diese drei Phasen können als komplexe Amplituden dargestellt werden. In Europa ist die Frequenz $\nu = \omega/2\pi = 50$ Hz, die Amplitude $U_0 = 325$ V. Die Spannung zwischen zwei der drei Phasen beträgt $U_0 = 560$ V, was einem Effektivwert von 400 V entspricht. Man sieht leicht, dass die Summe der drei Amplituden verschwindet.

4.8.10 Komplexe Schreibweise, Impedanz

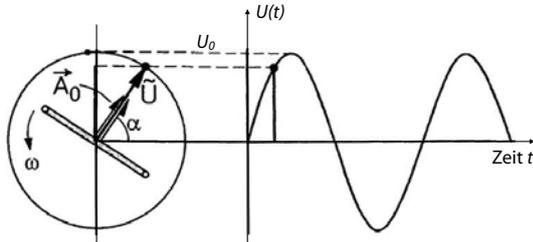


Abbildung 4.181: Darstellung einer harmonischen Zeitabhängigkeit als komplexe Amplitude.

Wechselströme und Wechselspannungen können auch gut als komplexe Größen dargestellt werden, d.h. als Absolutbetrag und Phase. Die physikalischen Größen entsprechen dem reellen Anteil. Eine Wechselspannung der Kreisfrequenz wird dann als

$$U(t) = U_\omega e^{i(\omega t + \phi_u)} = U_\omega e^{i\phi_u} e^{i\omega t}$$

dargestellt, wie in Abb. 4.181 gezeigt. Meist rechnet man nur mit der komplexen Amplitude $U_\omega e^{i\phi_u}$. Die Realteile werden auch als Wirkanteile, die Imaginärteile als Blindanteile bezeichnet. Gemäss der Euler'schen Formel $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ kann man die beiden Schreibweisen ineinander überführen:

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi_n) = \Re[U_0 e^{i(\omega t + \phi_n)}].$$

Diese Notation hat den großen Vorteil, dass Kapazitäten (Kondensatoren) und Induktivitäten (Spulen) einfach als komplexe Widerstände behandelt werden können. Für alle passiven, linearen Elemente gilt

$$U = Z I.$$

Hier stellt Z die Impedanz der Schaltung dar, in offensichtlicher Verallgemeinerung des Ohm'schen Gesetzes.

Wie in Abb. 4.182 gezeigt, ist der Realteil der Impedanz gegeben durch den Ohm'schen Widerstand, während die imaginäre Achse die Beiträge von Induktivitäten und Kondensatoren enthält.

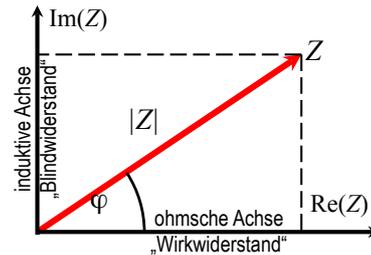


Abbildung 4.182: Impedanz in der komplexen Ebene.

Die Berechnung von zeitabhängigen Problemen in elektrischen Schaltungen reduziert sich von der Lösung von Differentialgleichungen auf die Lösung von einfachen lineare algebraischen Gleichungen. Der Preis, den man dafür bezahlt, ist, dass das Verhältnis zwischen Spannungen und Strömen von der Frequenz des Wechselstroms abhängt.

Ein idealer Ohm'scher Widerstand ist für Gleich- und Wechselströme identisch, d.h. das Verhältnis von Spannung und Strom ist konstant. Ein Kondensator ist für Gleichströme undurchlässig, stellt aber für hohe Frequenzen einen Kurzschluss dar; die entsprechende Impedanz ist indirekt proportional zur Frequenz.

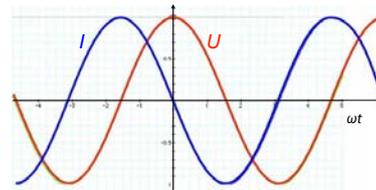


Abbildung 4.183: Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung über einem Kondensator.

Strom und Spannung sind jedoch nicht in Phase. Wie in Abb. 4.183 gezeigt, erreicht die Spannung dann ihr Maximum, wenn das Integral des Stroms maximal ist, d.h. beim Nulldurchgang des Stroms. Die Phasenverzögerung um 90 Grad entspricht in der komplexen Darstellung einer Multiplikation mit $e^{i\pi/2} = i$. Die Impedanz ei-

ner Kapazität C ist deshalb

$$Z(C) = \frac{1}{i\omega C}.$$

Eine Spule ist für hohe Frequenzen undurchlässig, stellt aber für Gleichströme einen Kurzschluss dar. Hier ist die Spannung proportional zur Ableitung des Stroms, sie eilt dem Strom um eine Viertelperiode voraus. Die Impedanz ist deshalb

$$Z(L) = i\omega L.$$

Zusammengefasst sind die Impedanzen $Z_\omega = U_\omega/I_\omega$ für

- Ohm'schen Widerstand $Z(R) = R$
- Induktionsspule $Z(L) = i\omega L$
- Kondensator $Z(C) = \frac{1}{i\omega C}$.

4.8.11 Rechnen mit Impedanzen

Die Rechenregeln für komplexe Impedanzen sind die gleichen wie für Widerstände. So kann die Knotenregel ersetzt werden durch die Regel, dass die Summe aller Ladungen, welche durch einen Knoten fließt, verschwindet.

Für die Parallel-, resp. Serienschaltung von Impedanzen gelten die gleichen Rechenregeln wie für Widerstände. Daraus folgt z.B., dass für eine Serienschaltung von Kapazitäten die Kehrwerte addiert werden,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Die komplexe Schreibweise eignet sich auch, um die Leistung zu berechnen. Man erhält den Effektivwert der Leistung, oder die Wirkleistung, für einen Wechselstrom als

$$P = \frac{1}{2} \Re \{UI^*\} = \frac{1}{2} \Re \{U^*I\}.$$

Der Faktor

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt$$

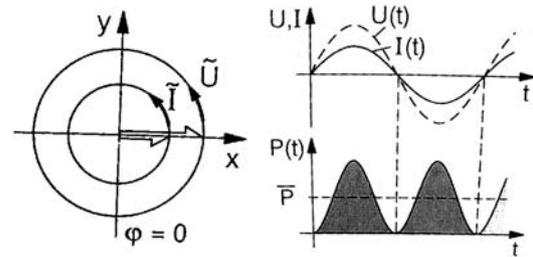


Abbildung 4.184: Strom und Spannung beim Ohm'schen Widerstand.

enthält die Mittelung über eine Periode der Oszillation.

Für einen Ohm'schen Widerstand sind Strom und Spannung immer in Phase, d.h.

$$U = U_0 e^{i(\omega t + \phi)}, \quad I = I_0 e^{i(\omega t + \phi)},$$

mit gleicher Phase ϕ , wie in Abb. 4.184 gezeigt. Im Zeigerdiagramm sind die beiden komplexen Amplituden parallel. Somit ist

$$P = \frac{1}{2} \Re \{U_0 e^{i(\omega t + \phi)} I_0 e^{-i(\omega t + \phi)}\} = \frac{1}{2} U_0 I_0.$$

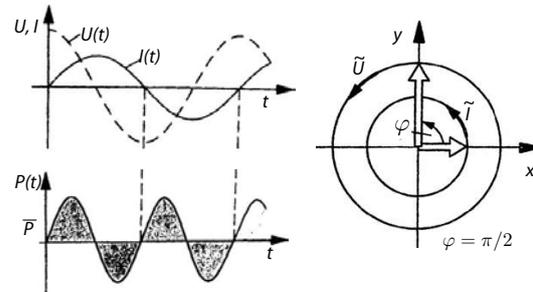


Abbildung 4.185: Strom und Spannung bei einer Spule.

Für eine rein imaginäre Impedanz (Spule oder Kondensator) sind Spannung und Strom 90° außer Phase, Abb. 4.185 zeigt den Fall einer Spule.

$$U = U_0 e^{i(\omega t + \phi)},$$

$$I = I_0 e^{i(\omega t + \phi - \pi/2)}.$$

Die Effektivleistung ist dann

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} \Re \left\{ U_0 e^{i(\omega t + \phi)} I_0 e^{-i(\omega t + \phi - \pi/2)} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \Re \left\{ e^{i\pi/2} \right\} = 0,
 \end{aligned}$$

d.h. es wird keine mittlere Arbeit geleistet. Die momentane Leistung $P(t)$ ist während einer Periode gleich lang positiv wie negativ. Ein idealer Transformator z.B., der im Leerlauf betrieben wird, zieht keine Leistung. Allerdings sind in den Zuleitungen Strom und (Verlust-)Spannung nicht notwendigerweise außer Phase, so, dass trotzdem Verluste auftreten.

In einer allgemeinen elektrischen Schaltung findet man sowohl reelle wie auch imaginäre Impedanzen. Die Gesamtimpedanz erhält man bei Serienschaltung durch Addition, bei Parallelschaltungen durch Addition der Kehrwerte. Mit den resultierenden komplexen Impedanzen kann anschließend wie gewohnt gerechnet werden.

4.8.12 Transformatoren

Transformatoren sind eine Möglichkeit, Spannungen auf einen anderen benötigten Wert zu bringen.

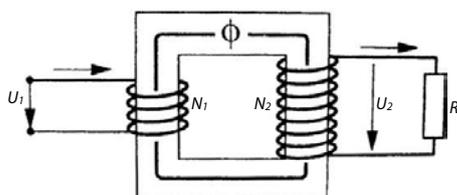


Abbildung 4.186: Transformatorschaltung.

Man bringt dazu einen Eisenkern in eine Spule, durch die ein Wechselstrom fließt. Abb. 4.186 zeigt die Schaltung für den idealen, d.h. verlustfreien Transformator. Reale Transformatoren weisen Verluste auf, aufgrund

- Streufeld Verluste: $\phi_s < \phi_p$
- Ohm'sche Verluste in den Spulenwiderständen

- Wirbelstromverluste im Transformatorblech
- Ummagnetisierungsverluste (=Fläche der Hysterese)

Für den idealen Transformator kann der induzierte magnetische Fluss über das Induktionsgesetz berechnet werden. Auf der Eingangsseite wird ein Wechselstrom der Spannung U_1 angelegt, welcher in der Spule einen magnetischen Fluss ϕ erzeugt. Dieser magnetische Fluss wird gerade so stark, dass die gemäß Induktionsgesetz erzeugte Spannung der Eingangsspannung entspricht,

$$U_1 = -N_1 \frac{d\phi}{dt},$$

wobei N_1 die Zahl der Windungen auf der Eingangsseite (= der Primärseite) angibt.

Im idealen Transformator wird der gesamte erzeugte magnetische Fluss mit Hilfe eines Eisenkerns zur zweiten, sekundärseitigen Spule mit N_2 Windungen gebracht. Dort wird, ebenfalls nach Induktionsgesetz, eine Wechselspannung

$$U_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

induziert. Das Verhältnis der beiden Spannungen ist somit

$$U_2 = U_1 \frac{N_2}{N_1},$$

d.h. die beiden Spannungen an einem Transformator verhalten sich (im Leerlauf) wie das Verhältnis der beiden Windungszahlen.

Wird ein Verbraucher angeschlossen, d.h. fließt auf der Sekundärseite ein Strom, so muss die dadurch induzierte Spannung ebenfalls berücksichtigt werden. Das Übertragungsverhältnis hängt außerdem von den Verlusten im Transformator ab, also z.B. davon, ob die gesamte Flussdichte auf die Sekundärseite übertragen wird. Die übliche Konstruktion eines Transformators nutzt direkt die Tatsache, dass die induzierte Spannung

durch die Änderung der magnetischen Flussdichte B und nicht durch die Änderung des magnetischen Feldes H bestimmt ist: der Eisenkern erhöht die Flussdichte und damit die induzierte Spannung um μ_r .

Transformatoren werden vor allem verwendet, um die Spannung von einer Netzspannung (z.B. 230 V) auf die aktuell benötigte Spannung zu transformieren (z.B. 12 V). Sie können aber auch dazu verwendet werden, sehr hohe Ströme zu erzeugen, z.B. zum Schweißen.

Transformatoren werden u.a. verwendet, um die Spannung bei der Übertragung über große Distanzen zu erhöhen und sie anschließend wieder zu erniedrigen. Dies ist deshalb nützlich weil dadurch die Verluste gering gehalten werden. Dies kann man anhand eines einfachen Rechenbeispiels zeigen: Wir nehmen an, dass eine Leistung von 2 kW vom Erzeuger zum Verbraucher übertragen werden soll und, dass die Übertragungsleitung einen Widerstand von $R = 10 \Omega$ aufweise. Bei einer Spannung von 200 V wird ein Strom von 10 A benötigt. Die Spannung sinkt dann bis zum Verbraucher auf 100 V, so, dass nur noch 1 kW (=50%) zur Verfügung stehen. Wird die gleiche Leistung bei 20 kV übertragen so wird ein Strom von 0.1 A benötigt; die Spannung sinkt um 1 V auf 19999 V, d.h. die Verluste sind auf 1/20000 reduziert worden.

4.8.13 Aperiodische Ströme

Je größer der Kondensator, desto mehr Zeit benötigt man bei gegebenem Strom, um ihn zu laden. Man kann die komplexe Schreibweise auch für aperiodische Ströme verwenden.

Wir betrachten einen Schaltkreis, der eine Spannungsquelle U_0 enthält, einen Widerstand R , einen Kondensator C , und einen Schalter S . Unmittelbar nach dem Schließen des Schalters S findet man die Spannungen

$$V_R = IR \quad V_C = I \frac{1}{i\omega C}.$$

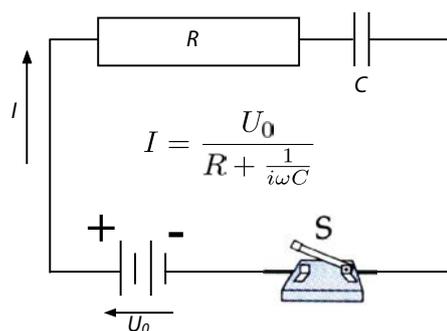


Abbildung 4.187: Stromkreis mit Schalter

Mit $V_R + V_C = U_0$ findet man

$$IR + I \frac{1}{i\omega C} = U_0,$$

oder

$$I = \frac{U_0}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{U_0}{R} \frac{1}{1 + \frac{1}{i\omega RC}}.$$

Dieser Ausdruck beschreibt das Verhalten des Stroms im Frequenzbereich: für kleine Frequenzen $\omega < 1/RC$ ist der Nenner groß und es fließt kein Strom, für große Frequenzen beträgt der Strom

$$I_0 = \frac{U_0}{R}.$$

Dieses Resultat kann qualitativ leicht nachvollzogen werden: Ein Gleichstrom kann nicht durch den Kondensator fließen, für hohe Frequenzen ($\omega RC \gg 1$) wirkt der Kondensator dagegen wie ein Kurzschluss und die gesamte Spannung fällt über dem Widerstand ab.

Um das zeitliche Verhalten zu bestimmen, müssen wir diese Funktion Fourier-transformieren. Wir erhalten

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC}.$$

Der Strom setzt somit zunächst mit dem Maximalwert ein, der ohne den Kondensator fließen würde, und nimmt exponentiell auf Null ab. Die Zeitkonstante ist gegeben durch das Produkt aus Widerstand und Kapazität.

Um schnelle Schaltungen zu erhalten, benötigt man somit kleine Kapazitäten und Widerstände.

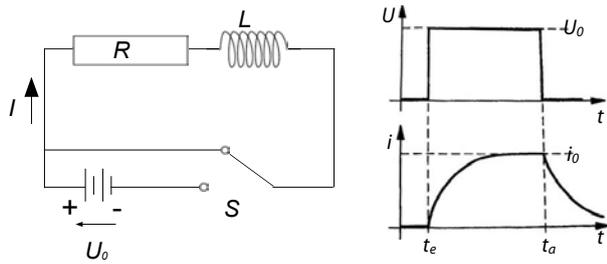


Abbildung 4.188: Widerstand und Spule als Tiefpassfilter.

Dies wird am Besten bei integrierten Schaltkreisen erreicht.

Legt man an eine Spule eine Spannung an, so folgt der Strom verzögert. Wir berechnen hier das Ausschaltverhalten: Wenn die Batterie in Abb. 4.188 überbrückt ist, muss die Summe der Spannung über der Spule und der Spannung über dem Widerstand gleich sein:

$$IR = -L \frac{dI}{dt}.$$

Die Lösung dieser Bewegungsgleichung für die Stellung des Schalter wie in Abb. 4.188 und einen endlichen Anfangsstrom I_0 ist

$$I(t) = I_0 e^{-tR/L}.$$

Der Strom fällt somit exponentiell auf Null ab, mit der Zeitkonstanten $\tau = L/R$.

Der Einschaltvorgang unterscheidet sich lediglich durch die zusätzliche Spannungsquelle. Der Strom steigt deshalb vom Anfangswert Null exponentiell auf den Langzeitwert $I_\infty = U/R$ an. Bei langen Zeiten hat die Spule also keinen Einfluss auf das Verhalten der Schaltung; sie verzögern jedoch die Zeit, bis der stationäre Zustand erreicht wird. Schnelle Schaltungen erhält man somit mit kleinen Induktivitäten und großen Widerständen in Serie zur Induktivität.

4.9 Die Maxwell Gleichungen

Im Bereich der klassischen Mechanik bieten die Newton'schen Gesetze eine Grundlage für die

meisten beobachteten Phänomene. Im Gebiet von Elektrizität und Magnetismus liefern die Maxwell'schen Gleichungen eine noch umfassendere Beschreibung, welche die Grundlage für alle beobachteten Phänomene umfasst. Die vier Gleichungen, welche Maxwell 1861-1864 hergeleitet hat, basieren auf damals bereits bekannten Beziehungen wie dem Durchflutungsgesetz und dem Induktionsgesetz und bleiben bis heute gültig. Je nach Materialsystem müssen sie um die relevanten Daten für das Medium ergänzt werden (Suszeptibilitäten und Permeabilitäten). Ansonsten wird ihre Gültigkeit nur durch die Quantenmechanik begrenzt; die Verallgemeinerung auf Phänomene, bei denen die Quantenmechanik eine Rolle spielt, liefert die Quanten-Elektrodynamik.

4.9.1 Felder

Die Maxwell-Gleichungen stellen Beziehungen zwischen elektrischen und magnetischen Feldern her. Deren Definitionen werden deshalb hier nochmals zusammengefasst. Das elektrische Feld \vec{E} ist definiert über die Kraft \vec{F} , die auf eine Probeladung q wirkt:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad [E] = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Die elektrische Verschiebungsdichte \vec{D} kann dagegen über eine Flächenladungsdichte definiert werden,

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{n} \quad [D] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

In vielen Systemen ist \vec{D} proportional zu \vec{E} :

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \quad \epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}.$$

Im Vakuum ist $\epsilon_r = 1$.

Den magnetischen Teil des Feldes beschreibt die magnetische Feldstärke

$$\vec{H} \quad [H] = \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

resp. die magnetische Flussdichte \vec{B} , welche häufig direkt proportional zu \vec{H} ist:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad \mu_0 = \frac{4\pi}{10^7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad [B] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T}.$$

In nichtmagnetischen Materialien ist $\mu_r = 1$. Hier wurde angenommen, dass das Medium isotrop sei, dass also alle Richtungen gleichwertig seien. Dies ist insbesondere in Festkörpern meist nicht der Fall. Die Proportionalitätskonstanten ϵ_r , μ_r werden dann zu Tensoren.

Es gilt das Überlagerungsprinzip:

$$\vec{E}_t = \sum_i \vec{E}_i,$$

wobei \vec{E}_i das Feld darstellt, welches von der Ladung q_i erzeugt wird: die Felder einzelner Ladungen addieren sich. Daraus folgt auch, dass der Fluss durch eine beliebige Oberfläche sich ebenfalls als Summe der einzelnen Beiträge, respektive im kontinuierlichen Grenzfall als Integral ergibt:

$$\iint_O \vec{E}_t \cdot d\vec{A} = \sum_i \iint_O \vec{E}_i \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{q_t}{\epsilon_0},$$

mit $q_t = \sum_i q_i$ als Gesamtladung.

Für das Magnetfeld gilt

$$\iint_O \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (4.9)$$

Wie beim Fluss des elektrischen Feldes ist der Fluss des magnetischen Feldes ein Maß für die Zahl der Feldlinien, welche durch die entsprechende Fläche dringen. In differentieller Form wird aus (4.9)

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0.$$

Dies ist ein Ausdruck dafür, dass magnetische Feldlinien immer geschlossen sind.

4.9.2 Die Grundgleichungen von Elektrizitätslehre und Magnetismus

Zwischen den Feldern und den Ladungen gibt es einige Beziehungen, die wir bereits diskutiert haben:

$$\text{elektrische Feldgleichung : } \text{div } \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

$$\text{magnetische Feldgleichung : } \text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

$$\text{Induktionsgesetz : } U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\text{Durchflutungsgesetz : } \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}.$$

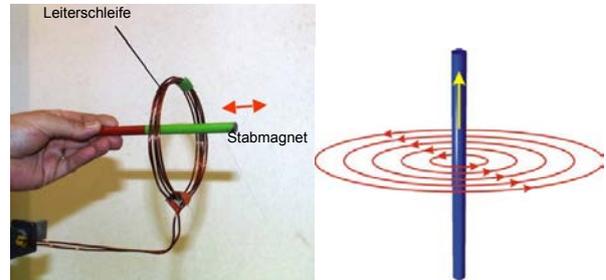


Abbildung 4.189: Induktionsgesetz (links) und Durchflutungsgesetz (rechts).

Während diese Phänomene zunächst als relativ unabhängig voneinander gesehen wurden, konnte James Clerk Maxwell 1864 eine Theorie des Elektromagnetismus aufstellen, welche alle Phänomene in einem einheitlichen Gesamtbild zusammenfasste. Für eine einheitliche Schreibweise werden das Induktionsgesetz und das Durchflutungsgesetz etwas umgeformt. Beide sind hier in ihrer Integralform geschrieben, bei denen jeweils über eine Fläche A integriert wird. In der differentiellen Form beziehen sie sich beide auf ein infinitesimales Flächenelement. Außerdem drücken wir die abgeleiteten Größen $U = \int E$ und $\Phi = \iint B$ durch die Felder aus, so dass die Gleichungen direkt die Felder E , D , H und B miteinander verknüpfen. Damit erhält das Induktionsgesetz die Form

$$U_{\text{ind}} = \oint_{dA} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

Das erste Integral erfolgt entlang dem Rand der Fläche, das zweite Integral über die Fläche. Mit Hilfe des Stokes'schen Satzes wandeln wir das Linienintegral ebenfalls in ein Flächenintegral um:

$$\oint_{dA} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_A \text{rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

Da diese Gleichung für beliebige Flächen A gilt, müssen die Integranden gleich sein,

$$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}.$$

In analoger Weise erhalten wir aus dem Durchflutungsgesetz die differentielle Form

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}. \quad (4.10)$$

4.9.3 Der Verschiebungsstrom

Betrachtet man nur den Strom, welcher in einem Leiter fließt, so kommt es zu Unstetigkeiten, z.B. bei der Aufladung eines Kondensators: zwischen den Platten werden keine Elektronen transportiert. Trotzdem erscheinen auf der einen Seite Ladungen, welche auf der anderen Seite entfernt werden. Betrachtet man also die Spannung, welche in einer Leiterschleife erzeugt wird, wenn der Strom durch den Kondensator ändert, so würde man unterschiedliche Resultate erhalten, je nachdem ob man die Integrationsfläche durch den Draht vor dem Kondensator oder durch den Bereich zwischen den Kondensatorplatten legt. Dies ist unphysikalisch und entspricht nicht dem experimentellen Befund.

Maxwell erkannte, dass die Gleichung (4.10) unvollständig war: neben den "gewöhnlichen" Strömen j kann auch der sog. "Verschiebungsstrom", welcher einer Änderung der dielektrischen Verschiebung entspricht, einen Beitrag zum Magnetfeld liefern. Die Ladung auf den Kondensatorplatten beträgt

$$Q = \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}.$$

Der Strom ist Ladung pro Zeit, also

$$\frac{dQ}{dt} = I_v = \frac{d}{dt} \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}.$$

Berücksichtigt man dies im Durchflutungsgesetz, so wird dieses zu

$$\oint_{dA} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I + I_v,$$

respektive in der differentiellen Form zu

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{d}{dt} \vec{D}.$$

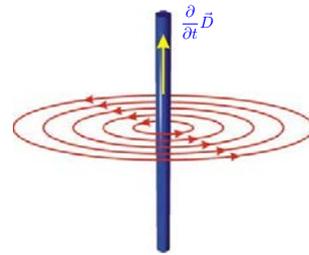
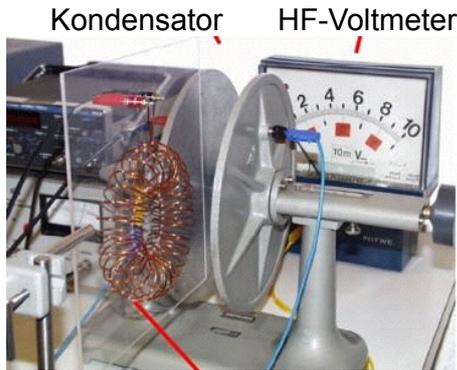


Abbildung 4.190: Beitrag des Verschiebungsstroms zum Magnetfeld.

Die Änderung $d\vec{D}/dt$ der dielektrischen Verschiebung \vec{D} als Funktion der Zeit erzeugt also ein entsprechendes Magnetfeld, wie in Abb. 4.190 skizziert. Dieses kann z.B. mit Hilfe des Induktionsgesetzes über die induzierte Spannung nachgewiesen werden.

Abbildung 4.191 zeigt ein entsprechendes Experiment. Im Luftspalt zwischen den beiden Kondensatorplatten befindet sich eine torusförmige Spule, welche die Flussänderung entlang ihrer Achse misst. Hier werden offenbar keine Ladungsträger durch den Luftspalt verschoben, aber es wird ein elektrisches Feld und damit eine dielektrische Verschiebung aufgebaut. Die zeitliche Änderung dieses Feldes erzeugt ein kreisförmiges Magnetfeld, konzentrisch zur Achse des System, wie ein normaler Strom. Diese kann über seine Induktionswirkung in der toroidalen Spule experimentell nachgewiesen werden.



Toroidspule zur Vermessung der kreisförmigen Magnetfelder

Abbildung 4.191: Messung des Verschiebungsstroms über das induzierte Magnetfeld.

4.9.4 Die Maxwell-Gleichungen

Die erste Maxwell-Gleichung entspricht der Feldgleichung. Sie kann in integraler oder differenzieller Form geschrieben werden:

$$\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = q_t \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}). \quad (4.11)$$

Die zweite Maxwell-Gleichung ist analog für das Magnetfeld, respektive die nicht vorhandene magnetische Ladung:

$$\iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0. \quad (4.12)$$

Während die ersten beiden Gleichungen das elektrische, respektive das magnetische Feld mit der Ladungsverteilung verknüpfen, stellen die dritte und vierte Maxwell Gleichung eine Beziehung zwischen der zeitlichen Ableitung des einen Feldes und dem anderen Feld her. Die dritte entspricht dem Induktionsgesetz:

$$\int_{dA} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (4.13)$$

Die vierte Gleichung entspricht dem erweiterten Durchflutungsgesetz:

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{r} = I + \frac{d}{dt} \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (4.14)$$

Hier bezieht sich A jeweils auf eine Fläche und dA auf den Rand dieser Fläche. Die Gleichungen weisen eine hohe Symmetrie auf: sie bleiben fast identisch wenn $H \leftrightarrow E$ und $B \leftrightarrow D$ ersetzt werden, außer

- dass das Vorzeichen bei der zeitlichen Ableitung wechselt
- die magnetische Ladungsdichte ρ_m identisch verschwindet und damit auch die magnetische Stromdichte.

Der von Maxwell eingeführte Beitrag des Verschiebungsstroms verschwindet für zeitlich konstante Felder. Bei der Diskussion von Wellen erhält er jedoch eine entscheidende Bedeutung.

Maxwell erkannte auch, dass nach diesen Gleichungen Wellen existieren müssten, d.h. sich räumlich ausbreitende zeitabhängige elektromagnetische Felder. Diese werden in Kapitel 6.5 diskutiert. 20 Jahre später gelang es Heinrich Hertz, diese Wellen experimentell nachzuweisen.

Weitere 20 Jahre später wurden elektromagnetische Wellen erstmals für die Übertragung von Informationen über große Distanzen verwendet. Marconi testete 1901 die erste transatlantische Funkverbindung (\rightarrow Abb. 4.192). Dies gilt allerdings heute nicht mehr als gesichert - vermutlich hatte er nur eine Störung als Signal interpretiert.

Neben den oben angegebenen Gleichungen benötigt man für die Beschreibung der Wellenausbreitung in Materie noch die ebenfalls bereits bekannten Materialgleichungen

$$B = \mu_r \mu_0 H \quad \text{und} \quad D = \epsilon_r \epsilon_0 E.$$

4.9.5 Grenzflächen

Die Maxwell-Gleichungen liefern viele nützliche Resultate. Eine einfache aber sehr nützliche Be-



Abbildung 4.192: Marconi's Empfangsstation in Neufundland.

ziehung erhält man aus den davon abgeleiteten Kontinuitätsbedingungen. Falls auf der Grenzfläche kein Strom fließt, liefert das 4. Maxwell'sche Gesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \rightarrow H_{\parallel}^1 = H_{\parallel}^2,$$

d.h. die parallele Komponente des H -Feldes ist an der Grenzfläche kontinuierlich. Aus der 2. Maxwell'schen Gleichung erhält man

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow B_{\perp}^1 = B_{\perp}^2,$$

d.h. die senkrechte Komponente des B -Feldes ist kontinuierlich. Analog folgt aus der ersten und dritten Maxwell Gleichung

$$D_{\perp}^1 = D_{\perp}^2 \quad E_{\parallel}^1 = E_{\parallel}^2.$$