

Ausgabe: 01.04.2019

Abgabe: bis 05.04.2019 12:30 Uhr

Prof. Dr. D. Suter

Aufgabe 1: Einführung in die Lösung von Differenzialgleichungen 3 Punkte

Differenzialgleichungen (DGLn) spielen eine wichtige Rolle in der Physik. Oft ist bei einer physikalischen Aufgabenstellung eine Situation gegeben, aus der mithilfe physikalischer Gesetze zunächst DGLn gewonnen werden. Liegt ein hinreichend einfaches System vor, dann können diese analytisch gelöst werden, um die Zeitentwicklung eines Anfangszustands zu untersuchen. Ist das nicht möglich, können manchmal trotzdem noch qualitative Aussagen getroffen oder numerische Verfahren angewandt werden.

Im Folgenden sollen Sie angeleitet ein einfaches Beispiel einer DGL analytisch lösen. Dabei verwenden wir bereits eine physikalische Schreibweise, $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ist eine zeitliche Ableitung. Betrachtet wird nun die lineare DGL

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 3x(t) = \exp(-2t). \quad (1)$$

Dies ist eine DGL 2. Ordnung, d. h. die höchste vorhandene Ableitung ist eine 2. Ableitung.

Mit der Konvention $x(t) = x$ werden im Folgenden Argumente aufgrund der Übersicht unterdrückt. Außerdem mögen Einheiten für diese Aufgabe nicht beachtet werden; es ist selbstverständlich eigentlich nicht möglich, so wie in der obigen Gleichung Funktionen mit ihren Ableitungen zu addieren.

a) Verwenden Sie den Ansatz

$$x_h = \exp(\lambda t), \quad (2)$$

um die homogene DGL zu lösen. Dabei ist λ zu bestimmen. Beachten Sie, dass es zwei Lösungen für λ gibt, da es sich um eine DGL zweiter Ordnung handelt. Dementsprechend ergeben sich zwei linear unabhängige Lösungen. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ergibt sich durch Linearkombination, wobei sich die Koeffizienten der einzelnen Terme später durch das Lösen des Anfangswertproblems (AWP) ergeben.

b) Die allgemeine Lösung der DGL ist die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen DGL addiert mit einer speziellen Lösung für die Inhomogenität. Verwenden Sie für letztere den Ansatz

$$x_{inh} = A \exp(-2t) \quad (3)$$

und bestimmen Sie A .

c) Die nun erhaltene allgemeine Lösung

$$x = x_h + x_{inh} \quad (4)$$

löst die DGL. Bei einem konkreten Problem liegen noch Anfangswerte vor. Da die vorliegende DGL zweiter Ordnung ist, werden die beiden Anfangswerte $x(t=0) = 0$ und $\dot{x}(t=0) = 1$ vorgegeben. Bestimmen Sie mit dieser zusätzlichen Information die bisher noch unbestimmt gebliebenen Koeffizienten der Linearkombination der homogenen Lösung.

BONUS (1 Zusatzpunkt): Informieren Sie sich in geeigneter Literatur, welche Formen von DGLn typischerweise in Einführungskursen in die Physik diskutiert werden und benennen Sie, welches System durch so eine DGL beschrieben werden kann.

Aufgabe 2: Systematische vs. statistische Fehler**2 Punkte**

Unterscheiden Sie die folgenden Aussagen auf systematische und zufällige Fehler und erklären Sie den Unterschied zwischen den beiden Arten.

- schräges Ablesen auf einer Messskala
- ungenaue Kalibrierung
- Vibration im Untergrund
- Schätzung auf Messskala
- Verunreinigung der Probe
- Temperaturschwankungen während einer Messung
- Reaktionszeit des Beobachters
- Alterung der Messgeräte

Aufgabe 3: Messwerte und Fehler**4 Punkte**

Es seien die folgenden Messwert für die Masse m und die Geschwindigkeit v eines Körpers gegeben:

Tabelle 1: Messdaten eines Versuchs

m/kg	$v/(\text{m/s})$
1,15	67,74
1,26	47,26
1,22	48,64
1,05	40,88
1,00	46,22
1,22	60,45
0,80	47,15
1,08	53,94

a) Bestimmen Sie auf jeweils den Mittelwert, die Standardabweichung und die Standardabweichung des Mittelwerts der beiden Stichproben. Das Runden auf zwei Nachkommastellen genügt.

b) Das Ziel des Experiments ist die empirische Bestimmung der kinetischen Energie eines Körpers. Diese beträgt klassisch

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2. \quad (5)$$

Bestimmen Sie auf der Basis der in a) ermittelten Werte die Standardabweichung von E_{kin} , also $\sigma_{E_{\text{kin}}}$. Es ist nicht nötig, mit exakten Werten zu rechnen; Sie dürfen die auf zwei Nachkommastellen gerundeten Werte verwenden.

c) Die Geschwindigkeitsmessungen geschahen auf Basis von Zeitmessungen mit einer manuell bedienten Stoppuhr sowie bekannter Strecke. Ist die Annahme, dass die Unsicherheiten statistischer und nicht systematischer Natur sind, gerechtfertigt?

