

1. Aufgabe

Betrachtet sei ein zum Körper 90° angewinkelter Unterarm. In der Hand befinde sich ein Bierkrug mit „Dortmunder-Premium Pils“ (Gefäßinhalt 1 l ; Leergewicht des Kruges $G_K = 10\text{ N}$). Die Armlänge l beträ 50 cm . Zur Modellierung des Problems sollen für Elle und Speiche zwei Rundstäbe in paralleler Anordnung betrachtet werden. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass Elle und Speiche hier (entgegen der Realität) von gleicher Größe sind. Wie müsste der Knochen geformt sein, damit an jeder Stelle x (x -Koordinate in der Knochenachse) die Festigkeit (Biegespannung) gleich groß ist? Bestimmen Sie dazu die x -Abhängigkeit des Durchmessers $D(x)$. Welchen Durchmesser müsste der Knochen am Ellenbogen mindestens haben, um das volle Bierglas sicher zu halten. Gehen sie von folgenden zwei Knochenmodellen aus:

1. Vollstab

2. Hohlstab mit Aussen- zu Innendurchmesserverhältnis von $\frac{D}{d} = 2$

Nehmen Sie an, dass der Arm kein eigenes Gewicht hat.

[Bruchspannung des Knochenmaterials $\sigma_B = 120\text{ N/mm}^2$]

$$\int z^2 \sqrt{a^2 - z^2} dz = -\frac{z}{4} \sqrt{(a^2 - z^2)^3} + \frac{a^2}{8} \left[z \sqrt{(a^2 - z^2)} + a^2 \arcsin\left(\frac{z}{a}\right) \right] + C$$

2. Aufgabe

Gegeben sei eine Skibindung, die dann auslöst, wenn die Querkraft F an der Spitze der Bindung einen Grenzwert überschreitet. Dieser Wert ist unter der Bedingung vierfacher Sicherheit ($\frac{\tau_B}{\tau_{max}}$) gegenüber Torsionsbruch zu ermitteln. Gehen Sie dabei von der Vorstellung aus, dass der Knochenaufbau, samt Knie, im Bein eines Menschen durch einen runden Ersatzstab der Länge l und dem Durchmesser d beschrieben werden kann. Dieses soll am oberen Ende fest eingespannt sein. Dabei gelten für den Stab die Stoffdaten des Knochenmaterials. Ermitteln Sie weiterhin denn Winkel, den sich der Körper gegenüber der Skiachse in dem Augenblick verdreht hat, in dem die Bindung auslöst.

Zahlenwerte:	Ersatzstab	Durchmesser	$d =$	4	cm
		Länge	$l =$	1	m
	Knochenmaterial	Bruchspannung	$\tau_B =$	0,6	MPa
	(Schätzungen)	Schubmodul	$G =$	3,8	GPa
	Sonstiges	Schuhgröße (Länge)	$s =$	25	cm
		Sicherheit	$\nu =$	4	

3. Aufgabe

Im Allgäu möchte ein ansässiger Landwirt von Rinder- auf Elefantenhaltung umstellen. Allerdings möchte er auf den traditionellen Almbtrieb, bei dem die Tiere Glocken um den Hals tragen, nicht verzichten. Da die Elefanten bei gleichen Proportionen doppelt so groß¹ sind wie die Rinder, könnten die Elefantenglocken, bei gleicher Nackenbelastung, ohne bedenken auch die doppelte Größe haben, meint der Landwirt. Sind Sie der selben Meinung? Nehmen Sie an, dass die Tiere aus zwei Kugeln (mit Radius r für den Kopf und Radius R für den starren Körper) bestehen. Diese beiden Kugeln sind mit einem runden, masselosen Vollstab verbunden (Länge l). Bilden Sie das Verhältnis aus der maximalen Spannung, die im Hals eines Elefanten und in dem eines Rindes, auf Grund der Masse des Kopfes auftritt. Was sind im Allgemeinfall die Konsequenzen dieser Spannungen im Bezug auf die maximal erreichbare Größe eines Lebewesens?

[Tip: die Tiere bestehen aus Wasser, die Spannungsbeziehung für einen Vollstab kennen Sie aus Aufgabe 1]

¹Größe soll sich hier auf den Durchmesser beziehen, siehe auch restliche Aufgabe.